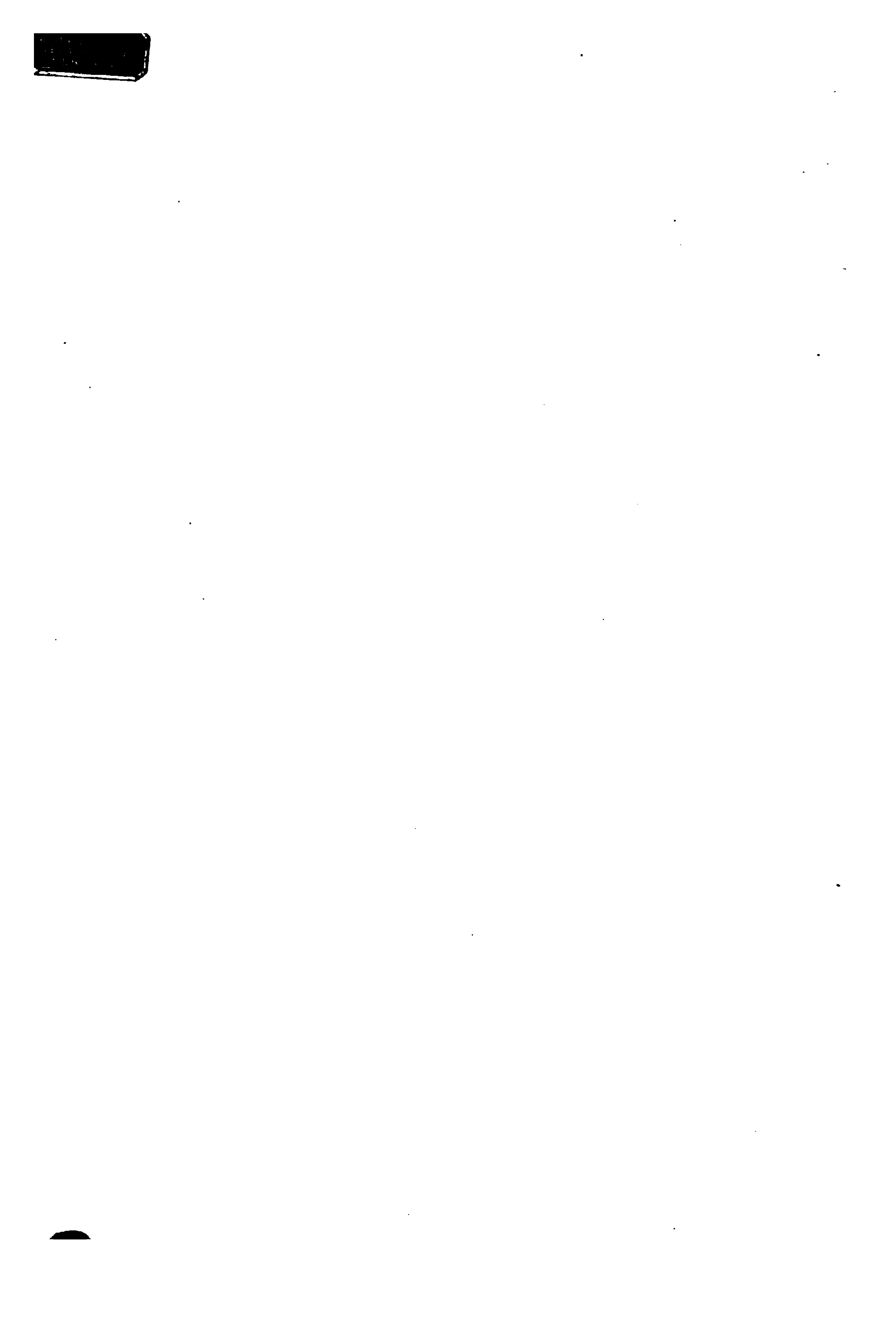


THEORIE

DER

STATISCH BESTIMMTEN TRÄGER

FÜR

BRÜCKEN UND DÄCHER.

NACH VORTRÄGEN
AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU STUTTGART

VON

PROF. DR. JACOB J. WEYRAUCH.

MIT 340 FIGUREN AUF LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

Vorwort.

Die im vorliegenden Werke gegebene Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger führt zu Formeln und Methoden, mittelst welcher die statische Berechnung jener Träger im Allgemeinen durch einfache Substitution bekannter Zahlenwerthe erledigt werden kann. Wie dies zu geschehen hat, ist überdies in der gleichzeitig erscheinenden Sammlung von *Beispielen und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten Träger* für alle gewöhnlichen und zahlreiche ungewöhnliche Fälle so vollständig gezeigt, dass der projektirende Ingenieur die Resultate auch ohne eingehendes Studium der Theorie benutzen und diesen Band als Formelsammlung ansehen kann. Dieselbe gestattet dann nebenbei, eventuell durch Rückgreifen auf die Ableitungen, jeden Zweifel über Bedeutung und Gültigkeitsbereich der einzelnen Formeln auszuschliessen.

Die vorgeführte Theorie bildet den ersten Theil von Vorträgen, welche ich seit einer Reihe von Jahren am hiesigen Polytechnikum unter der Bezeichnung *Analytische Theorie der Ingenieurconstructionen* zu halten pflege. Wenn also wohl gesagt werden darf, dass der ganze Aufbau der Theorie und die meisten resultirenden Formeln in der Literatur neu sind, so sind sie doch nicht unerprobt, wovon schon die Beispielsammlung Zeugniss ablegen wird. Möglichst leichte und directe praktische Verwendbarkeit war die erste Forderung welche ich an die Theorie stellte; denn für den Ingenieur der Praxis, der keine Zeit zu langen Zwischenstudien hat, genügt es in der Regel nicht, zu zeigen, wie eine Aufgabe gelöst werden könnte, er will wissen, wie sie gelöst wird. Dies findet man nun gerade für die schwierigeren Fälle (Belastung durch Radlastzüge, beliebige Gurtungsformen, ungewöhnliche Trägerarten u. s. w) nur selten ge-

zeigt und manche nur angedeutete Methode würde sich beim Versuche praktischer Verwendung als nicht wohl brauchbar erweisen.

Bei der angestrebten Vollständigkeit der Theorie hätten die Ableitungen leicht eine übermässige Ausdehnung gewinnen können, wenn es nicht gelungen wäre, dieselben durch Einführung der *X-Gurtung* und *Z-Gurtung* für die wichtigsten Trägersysteme auf die Hälfte zu reduciren. Die Formeln für diese Systeme werden mit doppelten Vorzeichen abgeleitet und es gelten in jedem Falle die oberen oder unteren Vorzeichen, jenachdem die X-Gurtung oben oder unten liegt (siehe beispielsweise §§ 31—33 oder überhaupt die Abschnitte III, V, VI und VII). Von weiteren characteristischen Einzelheiten der ganzen Theorie nenne ich die Einführung der Momente S, S' und der Grenzmomente M_s, die Einführung der Funktionen ε und ν, die Verwendung der Fahrbahnlasten P in den Ausdrücken für die Beanspruchungen und Grenzbeanspruchungen, die Heranziehung der Influenzlinien zur Ableitung dieser *Formeln*, die Einführung von Tabellen der Lastmomente r, s, wie von Formeln zur Berechnung mit genauen Lastäquivalenten p (Beispielsammlung) und die Verbannung aller trigonometrischen Funktionen und damit aller Zweideutigkeiten aus den für die Anwendung bestimmten Gleichungen. Bezüglich der Behandlung einzelner Trägerarten und alles Weiteren muss auf die betreffenden Abschnitte verwiesen werden.

Was die Art der Darstellung des gebotenen Materials betrifft, so dürften einige Erläuterungen am Platze sein. Dem Vortrage über analytische Theorie der Ingenieurconstructionen an hiesiger Hochschule geht ein sechsstündiges Jahrescolleg über allgemeine technische Mechanik, sowie ein zweistündiges Semestercolleg über graphische Statik der Brückenconstructionen voraus, beide mit Uebungen, sodass eine gewisse Vertrautheit mit den zu behandelnden Fragen bei den Zuhörern meiner Vorträge bereits vorhanden ist und die Rücksicht auf möglichst logische Gliederung des Stoffs und damit auf gute Uebersicht und schnelle Bewältigung desselben ausschlaggebend sein dürfen. Um jedoch den etwas trockenen Gegenstand anregender zu machen, suche ich einfachere Beispiele und Hinweise auf Ausführungen in den Vortrag zu verweben, welche als veränderlich oder durch locale Verhältnisse beeinflusst in diesem Buche grösstentheils weggelassen sind. Um ferner ein Verlieren in Einzel-

heiten zu vermeiden, werden Ausnahmen von den allgemeinen Formeln, wie sie bei Endverticalen, Mittelverticalen u. s. w. vorkommen, nach Hindeutung auf dieselben in die Uebungen verwiesen, wo sie bei Gelegenheit ihres Auftretens Erledigung finden. Auch bei dieser Veröffentlichung sind solche Ausnahmefälle erst in der Aufgabensammlung berücksichtigt. Den gewöhnlichen vollwandigen Balkenträger auf zwei Stützen bringe ich behufs beispielsweiser Anwendung der Methoden des ersten Abschnitts unmittelbar nach Letzterem zur Behandlung. Obschon jener Träger nur hinsichtlich der äussern Kräfte statisch bestimmt, hinsichtlich der innern aber statisch unbestimmt ist, könnte man ihn doch in diesem Werke über statisch bestimmte Träger suchen und wird ihn auch darin finden, wenn auch wieder in der Aufgabensammlung (Aufgaben 7—14, Beispiele 1, 4—12). An die Vorträge über statisch bestimmte Träger schliessen sich unmittelbar diejenigen über statisch unbestimmte an, für welche in den beiden ersten Abschnitten schon tüchtig vorgearbeitet ist, ebenso im achten Abschnitte, der u. A. direct verwendbare Formeln für Fachwerke doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen liefert.

Dass die Entwicklungen im Vortrage nicht überall soweit wie im Buche gehen, braucht nicht erst erwähnt zu werden. Am wenigsten wird dies nach Herausgabe des Letzteren nöthig sein, da die Behandlung der einzelnen Trägerarten nach Feststellung der Formeln für beliebige Systeme derselben immer die gleiche ist. Um auch beim Studium des Buches je nach Bedürfniss vorgehen zu können, sind die einzelnen Abschnitte möglichst für sich verständlich gehalten. Ferner sind zwanzig Paragraphen von hundert durch der Ueberschrift beigesetzte Kreuze als solche kenntlich gemacht, welche ohne Störung des Zusammenhangs in erster Linie auch dann vorläufig übergangen werden können, wenn man sämmtliche Abschnitte studiren will. Schliesslich wurde durch ein ausführliches Inhaltsverzeichniss zu Anfang des Werkes und Zusammenstellungen angewandter Ausdrücke und Buchstabenbezeichnungen zu Ende desselben die Orientirung zu erleichtern gesucht.

Weitgehende mathematische Kenntnisse sind für das Studium der vorliegenden Theorie nicht erforderlich. Abgesehen von den §§ 4—6, deren Resultate man als Ergebnisse der reinen Mathematik

hinnehmen kann, und einigen für praktische Berechnungen nebensächlichen Differentiationen würde sogar die niedere Analysis mit Ausschluss der Determinantentheorie genügen. Eine gewisse Reife des Urtheils ist allerdings für schnelles Verständniss der Ableitungen trotzdem nöthig, dürfte aber bei Ingenieuren überhaupt nicht zu entbehren sein.

Stuttgart, im November 1886.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

I. Abschnitt.

Beliebige ebene Träger.

II. Abschnitt.

Ebene Fachwerke beliebiger Art.

III. Abschnitt.

Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern.

IV. Abschnitt.

Einfluss der Gegendiagonalen.

V. Abschnitt.

Continuirliche Gelenkträger.

VI. Abschnitt.

Bogenträger mit drei Gelenken.

VII. Abschnitt.

Träger mit constantem Horizontalschube. Continuirliche Bogenträger. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Träger mit imaginären Gelenken.

VIII. Abschnitt.

Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme.

Anhang.

I. Abschnitt.

Beliebige ebene Träger.

In diesem Abschnitte soll zunächst mit denjenigen Begriffen, Beziehungen und Methoden bekannt gemacht werden, welche bei allen zu betrachtenden Trägern Verwendung finden können. Es liegt im Interesse der Klarheit und Zeitersparniss, dieselben von vornherein so vollständig vorzuführen, dass in der Folge darauf verwiesen werden kann und nicht beim Weiterbau die Grundlagen fortwährend ergänzt werden müssen.

§ 1. Innere und äussere Kräfte an materiellen Systemen.

Wird eine beliebige Zusammenstellung von Theilen der Materie ausschliesslich andrer der Betrachtung unterworfen, so pflegt man ihre Gesammtheit ein *materielles System* zu nennen. Zwischen den Theilen des Systems unter sich können Kräfte wirken, wir bezeichnen sie als *innere Kräfte.* Es können aber auch Kräfte zwischen Theilen des Systems und nicht zum Letztern gehörigen Massenpunkten wirken, diese sollen *äussere Kräfte* heissen. Alle Kräfte, welche bei Untersuchung eines Systems auftreten, sind entweder innere Kräfte oder äussere Kräfte.

Jeder Theil s eines materiellen Systems S lässt sich als neues System behandeln, in welchem Falle diejenigen Kräfte, welche von dem Reste $S-s$ des ursprünglichen Systems auf das Theilsystem s wirken, in Bezug auf Letzteres zu den äusseren Kräften gehören, während sie in Hinsicht S innere Kräfte waren. In Fig. 1 sind für das ganze System S die im Schnitte angedeuteten Kräfte innere Kräfte, alle übrigen äussere Kräfte. Für das Theilsystem s sind die durchkreuzten und für $S-s$ die nicht durchkreuzten Kräfte als äussere anzusehen.

Als *Körper* im weiteren Sinne wird jedes materielle System bezeichnet. Gewöhnlich versteht man jedoch unter Körpern speziell solche Theile der Materie, welche, abgesehen von den durch die unbekannte Constitution der Letzteren bedingten Beschränkungen, einen durch beliebig viele Flächen eingeschlossenen zusammenhängenden Raum ausfüllen. Die eingrenzenden Flächen heissen dann *Oberfläche des Körpers*, während der eingegrenzte Raum *Volumen des Körpers* genannt wird.

Die äusseren Kräfte, welche einen Körper angreifen, können *Massenkräfte* oder *Oberflächenkräfte* sein. Erstere wirken auf die Massentheilchen ohne Rücksicht auf die Begrenzung des Körpers, wie die Erdanziehung, Centrifugalkraft und das aus beiden resultirende *Eigengewicht*, Letztere beeinflussen die Oberflächenelemente unabhängig von den gerade anliegenden Massentheilchen, wie der Atmosphärendruck, Reibungen, *Stützenreactionen*, sie rühren von angrenzenden fremden Körpern her. Im Ingenieurwesen gestattet man sich vielfach, Massenkräfte, insbesondere das Eigengewicht, durch eine Anzahl Oberflächenkräfte zu ersetzen.

Wird durch einen Körper ein mathematischer *Schnitt* irgendwelcher Form gelegt, so können wir uns in demselben zwei *Flächen* zusammenhängen denken, welche die innern Kräfte im Allgemeinen relativ zu bewegen suchen. Die Beanspruchungen per Quadrateinheit jener Flächen hierbei sollen *Spannungen* heissen. Da man die auf ein Flächenelement oder irgend eine ebene Fläche wirkende Kraft in eine *Normalkraft* und eine *Tangentialkraft* zerlegen kann, so darf auch von *Normalspannungen* und *Tangentialspannungen* die Rede sein. Die Normalkräfte suchen die im Schnitte zusammenhängenden Flächen auseinander zu reissen oder gegen einander zu pressen und werden demnach in *Zugkräfte* und *Druckkräfte* unterschieden, die Tangentialkräfte streben die fraglichen Flächen längs einander zu verschieben und werden daher auch *Schubkräfte* genannt. Per Quadrateinheit haben wir *Zugspannungen*, *Druckspannungen* und *Schubspannungen*.

Ist ein materielles System in sich und hinsichtlich seiner Umgebung in Ruhe, so müssen sowohl die in jedem Systempunkte angreifenden äussern und innern Kräfte, wie auch die am ganzen Systeme oder irgend einem Theilsysteme angreifenden äussern Kräfte allein im Gleichgewichte sein. Das Gleichgewicht der äussern Kräfte für sich folgt daraus, dass beim Ansatze der Gleichgewichtsbedingungen für alle am Systeme angreifenden äussern und innern Kräfte die Letzteren wegen paarweiser Gleichheit in entgegengesetzten Rich-

tungen ausfallen. Auch in jedem beliebig geformten Schnitte durch das System müssen irgend welchen von einer Seite her angreifenden Kräften von der andern Seite her genau gleich grosse Kräfte entgegengesetzter Richtung widerstehen. Zu voller Bestimmtheit der *Schnittkräfte* ist daher stets anzugeben, von welcher Seite des Schnittes her dieselben wirken, auf welche der im Schnitte zusammenhängenden Flächen sie bezogen sind.

Ein materielles System würde dann als *starr* zu bezeichnen sein, wenn keinerlei Ursachen eine Aenderung der relativen Lagen irgendwelcher Theile desselben bewirken könnten. Da alle bekannten Körper Formänderungen zulassen, so haben wir es in Wirklichkeit nie mit starren Systemen zu thun. Man pflegt jedoch in der Ingenieurmechanik materielle Systeme dann als starr zu behandeln, wenn die eintretenden Verschiebungen klein genug sind, um einen in Betracht kommenden Einfluss auf die augenblicklich interessirenden Grössen nicht auszuüben und insolange die Herleitung der Letzteren eine Berücksichtigung der Ersteren nicht erfordert.

Elasticität nennt man das Streben der Körper, gewisse durch äussere Kräfte hervorgebrachte Gruppirungsänderungen der Theilchen wieder rückgängig zu machen, oder auch die Fähigkeit zur Wiederherstellung der ursprünglichen Gruppirung nach Entfernung der äussern Kräfte. Die Kräfte, welche darauf hinwirken, heissen *elastische Kräfte* und die rückgängig werdenden Formänderungen *elastische Formänderungen* im Gegensatze zu *bleibenden Formänderungen.* Die elastischen Kräfte rühren von der *Cohäsion* her, welche aus der Einwirkung der Theilchen auf einander resultirt und in der *Festigkeit* des Materials ihre Grenze findet. Ob überhaupt vollkommen verschwindende Formänderungen vorkommen, gilt für zweifelhaft, in der Ingenieurmechanik nimmt man es an, solange die auftretenden Spannungen ein gewisses Maass, die *Elasticitätsgrenze*, nicht überschreiten. In diesem Werke setzen wir die elastischen Formänderungen immer so klein voraus, dass sie bei Ableitung sonst bestimmter Grössen unberücksichtigt bleiben dürfen.

Sollen Trennungen in einem Körper nicht eintreten, so müssen alle Spannungen unter den betreffenden Festigkeiten bleiben; sollen bleibende Formänderungen nicht eintreten, so müssen sie auch unter den Elasticitätsgrenzen bleiben. Das Verhältniss der Festigkeit zur Spannung heisst die *Bruchsicherheit*, das Verhältniss der Elasticitätsgrenze zur Spannung die *Grenzsicherheit.* Der reciproke Werth der Bruchsicherheit wird *Bruchsicherheitscoefficient*, der reciproke Werth

1*

der Grenzsicherheit *Grenzsicherheitscoefficient* genannt. Gewöhnlich spricht man jedoch nur von m-facher *Sicherheit* oder vom *Sicherheitscoefficienten* $\frac{1}{m}$, indem als bekannt vorausgesetzt wird, ob die Festigkeit oder Elasticitätsgrenze als Ausgangspunkt dient. Bei Ingenieurconstructionen trifft gewöhnlich Ersteres zu, doch bleibt man gleichzeitig unter der Elasticitätsgrenze. Durch den Sicherheitscoefficienten sollen alle unvorhergesehenen und zahlenmässig unverfolgbaren Einflüsse berücksichtigt werden; mit ihm hat man den Ausgangswerth (Festigkeit oder Elasticitätsgrenze) zu multipliciren, um die bei m-facher Sicherheit *zulässige Spannung* zu erhalten. Bei den Festigkeitsberechnungen im Ingenieurwesen ist dahin zu trachten, dass an allen Stellen einer Construction gegen alle Zerstörungsarten die gleiche Sicherheit besteht. Dies ist nie ganz erreichbar.

In der Theorie der Ingenieurconstructionen hat man es immer mit Systemen im Gleichgewichtszustande zu thun. Die Herleitung gesuchter äusserer und innerer Kräfte bildet den Gegenstand der *statischen Berechnung* solcher Constructionen. Bei dieser Berechnung sind entweder die Dimensionen der Constructionstheile schon bekannt und soll nur deren Zweckmässigkeit erwiesen werden, oder man beabsichtigt, gewisse Dimensionen erst mit Rücksicht auf die Resultate der statischen Berechnung zu wählen. Sowohl der *Dimensionenbegründung* wie der *Dimensionenberechnung* sind diejenigen Combinationen angreifender Kräfte und sonstiger Ursachen zu Grunde zu legen, welche die stärksten Dimensionen bedingen. In diesem Werke kommen nur statische Berechnungen in Frage.

§ 2. Art, System und Form der Träger. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte, stabile und labile Träger.

Ein *Träger* ist ein materielles System, welches zur Aufnahme und Uebertragung von *Lasten* oder andern äussern *Activkräften* auf ausserhalb desselben gelegene Stützen dient. Der Träger S kann aus mehreren *Trägerstücken* bestehen, solchen Theilsystemen s, zwischen welchen infolge constructiver Mittel resultirende Kräfte von bekanntem Angriffspunkte, bekannter Richtung oder bekannter Grösse wirken. Je nach der Anzahl und Anordnung der *Auflager* und Trägerstücke unterscheidet man verschiedene *Trägerarten*, die äussere Begrenzung gibt Veranlassung zur Bezeichnung verschiedener *Trägerformen* und die Gliederung der Trägerstücke zur Unterscheidung verschiedener *Trägersysteme*.

Unter dem Einflusse äusserer Activkräfte und anderer Ursachen entstehen für jeden Träger innere Kräfte und als weitere äussere Kräfte *Stützenreactionen*. Eine Trägerart heisst *statisch bestimmt* oder *statisch unbestimmt*, je nachdem bei bekannten äussern Activkräften und Gleichgewichtslagen der Trägerstücke sämmtliche äussern Kräfte der Letzteren durch die Statik allein bestimmt sind oder nicht; sie heisst *stabil* oder *labil*, je nachdem abgesehen von elastischen Formänderungen die relative Lage der Trägerstücke zu einander und zu den Stützen eine feste oder mit den äussern Kräften veränderliche ist.

Wir fassen in dieser Schrift nur *ebene Träger* ins Auge, dadurch characterisirt, dass sämmtliche äussere Kräfte und die mit ihnen ins Gleichgewicht tretenden Resultanten der innern Kräfte in einer Ebene liegen. Alle Untersuchungen lassen sich dann auf diese *Trägerebene* beschränken, welche bei Berücksichtigung des Eigengewichts nur Verticalebene sein kann. In letzterem Falle heissen die Entfernungen zwischen den Verticalen durch unmittelbar auf einander folgende Stützpunkte *Spannweiten* oder *Oeffnungen*, die Zwischenstützen *Pfeiler*, die Endstützen *Widerlager*. Der Träger ist ein *einfacher Träger* oder ein *continuirlicher Träger*, je nachdem er sich nur über eine oder aber über 2, 3 bis ∞ viele Oeffnungen erstreckt.

Die Stützenreactionen eines Trägers mit n Stützen sind vollständig bestimmt durch ihre Intensitäten, Richtungen und Angriffspunkte, also für ebene Träger durch je zwei Componenten und ein Moment. Zur Ermittelung dieser $3n$ Grössen hat man zunächst die drei Gleichgewichtsbedingungen der Ebene, welchen die am ganzen Systeme S wirkenden äussern Kräfte genügen müssen (§ 1). Soll also die Trägerart statisch bestimmt sein, so sind constructive Anordnungen derart zu treffen, dass die übrigen $3(n-1)$ Grössen bekannt oder durch neue Bedingungsgleichungen bestimmt werden. Dies ist durch verschiedene Mittel erreichbar, am gewöhnlichsten sind *Gelenke* (Moment in Hinsicht des Gelenkpunkts gleich Null) und *Gleitungen* (Kraftcomponente längs der Bahn gleich Null). Die so entstehenden Trägerstücke werden, abgesehen von elastischen Formänderungen, in sich als unverschiebbar angenommen.

Damit am Träger Gleichgewicht herrsche, müssen an jedem Theilsysteme s die darauf einwirkenden äusseren Kräfte im Gleichgewichte stehen und also bei t Trägerstücken $3t$ von einander unabhängige Bedingungsgleichungen erfüllt sein, welche zur Berechnung unbekannter Grössen dienen können. Von den die Trägerstücke ergreifenden äussern Kräften sind im Allgemeinen unbekannt die

Stützenreactionen und die an den Verbindungsstellen der Trägerstücke wirkenden *Zwischenreactionen.* Von den Stützenreactionen mögen r_1 durch je ein Element, r_2 durch zwei und r_3 durch drei Elemente (Componenten und Momente) bestimmt sein, dann hängen sämmtliche Stützenreactionen von

$$r = r_1 + 2\, r_2 + 3\, r_3$$

Grössen ab. Wenn nun die Zwischenreactionen durch z unabhängige Grössen bestimmt sind, so haben wir zur Berechnung der äussern Kräfte aller Trägerstücke $r + z$ unbekannte *Reactionselemente* zu ermitteln und für statisch bestimmte Trägerarten muss sein

$$(1) \qquad 3\, t \geqq r + z.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so liefert uns die Statik zur Berechnung der äussern Kräfte aller Trägerstücke unabhängig von den innern Kräften nicht genug Gleichungen, wir müssen zur Elasticitätslehre oder andern ausserstatischen Hülfsmitteln greifen.

Die $3\, t$ Bedingungen fürs Gleichgewicht bestehen zwischen den äusseren Kräften und Grössen, welche von der relativen Lage der Trägerstücke und Stützen abhängen. Wenn nun die Anzahl der unbekannten Reactionselemente kleiner als die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist, so können wir Letzteren mit Ersteren allein nicht genügen, das System ist nur unter einer Anzahl die relative Lage der Trägerstücke und Stützen betreffenden Bedingungen im Gleichgewicht. Sind diese beim Anbringen der äussern Kräfte nicht erfüllt, so findet auch kein Gleichgewicht statt und es verschiebt sich das System so lange, bis Erfüllung eingetreten ist. Aendern wir dann etwas an den äussern Kräften, so werden sich mit dem neuen Systeme der Bedingungsgleichungen auch die dadurch mit bestimmten *Lageelemente* ändern, es tritt Verschiebung und eventuell ein neuer Gleichgewichtszustand ein, wir haben einen labilen Träger. Für stabile Trägerarten muss also sein

$$(2) \qquad 3\, t \leqq r + z.$$

Die Erfüllung der Bedingung 1) oder 2) genügt indessen nicht, eine Trägerart statisch bestimmt oder stabil zu machen, es kommt nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Vertheilung der constructiven Mittel an. So könnte die Trägerart Fig. 2 wegen $t = 3$, $r = 5$, $z = 4$ nach 1) statisch bestimmt sein. Es ist aber nicht der Fall und gelingt auf keine Art, die Stützenreactionen aus statischen Gesetzen allein zu berechnen. Probirt man es, so zeigt sich, dass wir mit den verfügbaren Gleichungen links zu viel, rechts zu wenig

haben, womit der Träger links labil, rechts statisch unbestimmt wird. Ebenso ist der Träger Fig. 3 trotz Erfüllung der Bedingungen 2) 3) statisch unbestimmt und labil, jede nicht verticale Kraft würde ihn über die Stützen wegschieben.

Zur statischen Bestimmtheit ist nöthig, dass wenigstens die $r + z$ unbekannten Reactionselemente aus den $3\,t$ Bedingungsgleichungen bestimmbar sind. Die Stabilität verlangt, dass mit den $r + z$ verfügbaren Reactionselementen mindestens den $3\,t$ statischen Bedingungsgleichungen genügt werden kann. Nun lässt sich jede unbekannte Reactionscomponente nur aus einer Gleichung bestimmen, in welcher sie vorkommt und mit einer verfügbaren Reactionscomponente nur einer Gleichung genügen helfen, welche jene enthält. Daher können wir folgende Sätze aussprechen.

a) *Eine Trägerart kann nur statisch bestimmt sein, wenn bei t Trägerstücken die Anzahl der wirksamen Reactionselemente $r + z \leqq 3\,t$ ist und dieselben sich den anliegenden Trägerstücken so zuweisen lassen, dass auf jedes Trägerstück höchstens drei nicht sämmtlich parallele Kräfte oder zwei Kräfte und ein Moment kommen. Im Grenzfalle $r + z = 3\,t$ ist statisch bestimmte Stabilität möglich, in allen andern Fällen haben wir labile Trägerarten.*

b) *Eine Trägerart kann nur dann stabil sein, wenn bei t Trägerstücken die Anzahl der wirksamen Reactionselemente $r + z \geqq 3\,t$ ist und dieselben sich den anliegenden Trägerstücken so zuweisen lassen, dass auf jedes Trägerstück mindestens drei nicht sämmtlich parallele Kräfte oder zwei Kräfte und ein Moment kommen. Im Grenzfalle $r + z = 3\,t$ ist statisch bestimmte Stabilität möglich, in allen andern Fällen haben wir statisch unbestimmte Trägerarten.*

Nach a) lassen sich statisch bestimmte Trägerarten durch Zufügen von $3\,t - r - z$ geeigneten Reactionselementen stabil machen, eine statisch bestimmte Trägerart ist im Allgemeinen $(3\,t - r - z)$-*fach stabil*, es müssen für's Gleichgewicht $3\,t - r - z$ von einander unabhängige Lagebedingungen erfüllt sein. Nach b) lassen sich stabile Trägerarten durch Wegnehmen von $r + z - 3\,t$ geeigneten Reactionselementen statisch bestimmt machen, ein stabiler Träger ist im Allgemeinen $(r + z - 3\,t)$-*fach statisch unbestimmt*, es müssen zur Berechnung aller Reactionen $r + z - 3\,t$ von einander unabhängige Gleichungen ausserhalb der Statik gesucht werden. Da durch $r + z$ Reactionselemente, welche durch ebensoviel Gleichungen bestimmt sind, diesen auch genügt wird, so folgt:

c) *Eine Trägerart, welche bei t Trägerstücken $r + z \doteq 3\,t$ wirk-*

same Reactionselemente besitzt, die sich aus statischen Bedingungen bestimmen lassen (d. h. auch eine Trägerart, für welche bei $r + z = 3t$ wirksamen Reactionselementen die Determinante des Coefficientensystems der $3t$ Bedingungsgleichungen nicht verschwindet*), — siehe z. B. *Hoppe*, Elemente der Determinantentheorie, Arch. für Math. u. Phys. 1880 S. 70, vergl. § 14) *ist statisch bestimmt und stabil.*

Die Stabilität verlangt, dass den statischen Bedingungsgleichungen durch die verfügbaren Kräfte ohne Zuhülfenahme von Lageelementen genügt werde. Da nun die am ganzen Träger wirkenden äussern Kräfte für sich im Gleichgewichte sein müssen (§ 1) und hierfür drei Bedingungsgleichungen bestehen, so müssen die Stützenreactionen eines stabilen Trägers von mindestens drei unabhängigen Elementen abhängen.

In den allermeisten Fällen besteht der Träger entweder aus einem Stücke oder es stossen an derselben Stelle nur zwei Trägerstücke zusammen, während, wie insbesondere bei Gelenken und Gleitungen, die Zwischenreactionen durch je zwei Elemente bestimmt sind. Alsdann haben wir in allen obigen Formeln

$$z = 2(t - 1), \qquad 3t - z = t + 2.$$

Im Anschlusse an das Gegebene soll nun eine Reihe von Trägerarten vorgeführt werden. Gleichzeitig werden wir die Zuweisung der Reactionselemente im Sinne der Sätze a) b) vornehmen. Wenn auch durch die Zuweisung allein der Grad der statischen Unbestimmtheit und Labilität nicht entschieden wird, so erleichtert sie doch die Beurtheilung und schützt vor unnützen Berechnungsversuchen.

Die Trägerart mit einem *festen* und einem in beliebiger Richtung frei *verschiebbaren Gelenkauflager* (Fig. 4) ist ohne sonstige constructive Mittel statisch bestimmt und stabil. Sind dagegen ausser dem festen Gelenkauflager mehrere in gleicher Richtung frei verschiebbare vorhanden (Fig. 5), so ist der Träger zwar stabil, aber ebenso vielfach statisch unbestimmt als Zwischenstützen vorhanden sind. Die Trägerarten Fig. 6, 7 sind stabil und einfach bezw. dreifach statisch unbestimmt. Wäre diesen Trägern bei einer Stütze freie Horizontalbewegung gestattet, so würde mit dem Wegfallen der Horizontalreactionen Fig. 6 statisch bestimmt und Fig. 7 zweifach statisch unbestimmt, ohne dass die Stabilität verloren ginge. Die Trägerarten Fig. 8—11 sind statisch bestimmt stabil, während Fig. 12 und 13 einfach labile statisch bestimmte Trägerarten darstellen

*) Wir machen übrigens in der Folge keinen Gebrauch von Determinanten.

Fig. 14 zeigt eine 5-fach und bei t Trägerstücken $(t-2)$-fach labile Trägerart. Für $t=2$ wird Letztere stabil, mit $t=1$ kommen wir auf Fig. 6. Wenn im Falle der Fig. 14 die Gelenke stetig aufeinander folgen, so hat man trotz unendlich-facher Labilität noch immer eine statisch bestimmte Trägerart (*Kette*). Von den Trägerarten Fig. 15—18 sind die beiden ersten statisch-bestimmt-stabil, die dritte stabil und einfach statisch unbestimmt, die letzte stabil und dreifach statisch unbestimmt. Bei n Zwischenstützen ist die Trägerart Fig. 18 $(n+1)$-fach statisch unbestimmt, gegenüber Fig. 5 kommt nur der Horizontalschub hinzu. Einige Beispiele des sehr seltenen Falles, dass mehr als zwei Trägerstücke an einer Stelle zusammentreffen, haben wir in Fig. 19—21 angedeutet. Alle drei Trägerarten sind stabil, dagegen ist Fig. 19 zweifach statisch unbestimmt, Fig. 20 einfach statisch unbestimmt, Fig. 21 statisch bestimmt.

Ein Träger*system* heisst statisch bestimmt oder statisch unbestimmt, je nachdem bei bekannt gedachten äussern Kräften der Trägerstücke (also statisch bestimmt gedachter Trägerart) die mit ihnen ins Gleichgewicht tretenden innern Kräfte durch statische Gesetze allein bestimmt sind oder nicht; es heisst stabil oder labil, je nachdem, abgesehen von elastischen Formänderungen, die Trägerstücke in sich unverschiebbar oder mit den äussern Kräften veränderlich sind. Demnach kann bei einem Träger die Art statisch bestimmt und stabil, das System aber statisch unbestimmt oder labil sein und umgekehrt. Fig. 4 beispielsweise zeigt eine statisch bestimmte Trägerart, während bei Herstellung mit voller Wand das Trägersystem statisch unbestimmt würde. *Damit ein Träger ohne Einschränkung statisch-bestimmt-stabil sei, muss sowohl seine Art wie sein System statisch bestimmt stabil sein, womit der ganze Träger nur durch elastische Formänderungen bedingte Verschiebungen zulässt und alle äussern und innern Kräfte durch die Gesetze der Statik allein bestimmt sind.* Solche Fälle haben wir in dieser Schrift besonders im Auge.

§ 3. Ueber die Belastung der Träger.

Die bei Trägern am meisten vorkommenden äussern Activkräfte sind *Lasten*. Man bezeichnet dieselben als *concentrirte Lasten* oder *stetig vertheilte Lasten*, je nachdem ihre Angriffspunkte durch messbare Strecken von einander getrennt sind oder eine stetige Folge bilden. Die Raddrücke der Locomotiven und andrer Fahrzeuge

beispielsweise pflegt man als concentrirte Lasten anzusehen, während das Figengewicht des Trägers stetig vertheilt ist.

Die stetig vertheilte Last heisst auf einer Strecke *gesetzmässig vertheilt*, wenn sich für alle Elemente der Strecke die Belastung pro Längeneinheit durch dieselbe Gleichung, das *Gesetz der Vertheilung*, ausdrückt; sie heisst im Besonderen *gleichmässig vertheilt*, wenn die Belastung pro Längeneinheit constant ist. So wird das Eigengewicht der Träger gewöhnlich auf die Länge einer Oeffnung l constant angenommen, entsprechend empirischen Gleichungen der Form

$$g = a + b\,l + c\,l^2 + \cdots \tag{1}$$

oder auch der folgenden

$$g = \frac{a + b\,l + c\,l^2 + \cdots}{\alpha + \beta\,l + \gamma\,l^2 + \cdots}, \tag{2}$$

worin $a, b, c, ..$ und $\alpha, \beta, \gamma ..$ irgendwelche positive oder negative Grössen bedeuten können, die meistens schon von c, γ an gleich Null gesetzt werden. Trägt man an jeder Stelle a einer Strecke $v\,w$ die Belastung p per Längeneinheit daselbst als Ordinate an, so ist in Fig. 22 eine stetig vertheilte Last dargestellt, in Fig 23 aber speziell eine gesetzmässig vertheilte Last und in Fig. 24 eine gleichmässig vertheilte Last.

Als *Verkehrslast* bezeichnet man diejenigen Lasten, welche der Träger neben seinem eigenen Gewichte auf die Stützen zu übertragen hat. *Eigengewicht* und Verkehrslast zusammen bilden die *Totalbelastung*. Da die Verkehrslast in vielen Fällen — bei Brückenträgern immer — ganz oder theilweise ihren Ort wechseln kann, so pflegt man auch von *fester Last* und *bewegter Last* zu sprechen, welche zusammen ebenfalls die Totalbelastung ausmachen. Wenn in der Folge von Eigengewicht und bewegter Last die Rede ist, werden wir uns immer alle festen Lasten im Eigengewicht eingerechnet denken.

Die Verkehrslast muss bei der statischen Berechnung eines Trägers bekannt sein, das Eigengewicht hängt von Dimensionen ab, welche theilweise erst durch die statische Berechnung ermittelt werden sollen. Um das zu erwartende Eigengewicht im Voraus näherungsweise angeben zu können, hat man entweder den Verhältnissen ausgeführter Träger entsprechende, rein empirische Formeln obiger Art aufgestellt oder ein theilweise theoretisches Verfahren angewandt. Letzteres ist dadurch ermöglicht, dass bei unbestimmt eingeführtem Eigengewichte die statische Berechnung in Verbindung mit den zulässigen Spannungen Ausdrücke für die fehlenden Dimensionen liefert,

aus welchen das theoretische Gewicht abgeleitet werden kann. Von hierher gehörigen Arbeiten seien erwähnt: *Lentz*, die Balkenbrücken aus Schmiedeeisen, Berlin 1865; *Engesser*, Zeitschr. f. Bauwesen 1877 und Zeitschr. f. Baukunde 1878, 1881, *Seefehlner*, Deutsche Bauzeitung 1878; *Winkler*, Vortr. über Brückenbau, Heft IV, Wien 1879 und Handb. d. Ingenieurwissenschaft II, Leipzig 1882; *am Ende*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers 1881 (grosse Spannweiten); *Lucas*, Civilingenieur 1882 (schmalspurige Bahnen); *Landsberg*, Zeitschr. f. Bauw. 1885 (Dachbinder). Bei mancherlei Abweichungen in der Durchführung ist überall derselbe Grundgedanke maassgebend: Den von der Spannweite l abhängigen Theil des *theoretischen Gewichts* als Funktion der für die statische Berechnung gegebenen Grössen auszudrücken, durch Multiplication mit einem empirischen *Constructionscoefficienten* den unvermeidlichen Abweichungen der Ausführung von jenem Gewichte gerecht zu werden und durch Addition des nach üblichen Anordnungen festgestellten, von l unabhängigen Restgewichts das wirkliche Eigengewicht annähernd zu erhalten. Die so entstehenden Gewichtsformeln sind selbst bei weitgehenden Vernachlässigungen verhältnissmässig complicirt. Um die Verwendung ihrer Resultate zu erleichtern, hat man entsprechende Zahlenwerthe in Tabellen zusammengestellt oder sie zur Aufstellung empirischer Gleichungen der obigen Formen benutzt. Neben den bereits genannten Schriften genüge es, bezüglich der gebräuchlichen Annahmen über Eigengewicht und Verkehrslast der Träger folgende zu erwähnen: *Heinzerling*, Die angreifenden und widerstehenden Kräfte der Brücken- und Hochbauconstr., Berlin 1876; *Laissle u. Schübler*, Bau d. Brückentr. I., Stuttgart 1876: *Stelzel*, Theorie einfacher statisch bestimmter Brückentr., Wien 1880. Man sehe auch § 12, c.

Von der *Belastungsart* eines Trägers sprechen wir im Hinblicke auf die Unterscheidung concentrirter, gleichmässig vertheilter und sonst stetig vertheilter Lasten, man fragt: *wie* wirken die Lasten; der Ausdruck *Belastungsfall* dagegen betrifft die Anordnung der bereits bekannten Lastarten am Träger, man fragt: *wo* wirken die Lasten. Bei Untersuchung der vorkommenden Belastungen kehren gewisse Aufgaben sehr häufig wieder, wesshalb dieselben in §§ 4—6 allgemein behandelt werden sollen.

§ 4. Concentrirte Lasten.

Zwischen den Abscissen 0 und x greifen bei $a_1, a_1, \ldots a_m$ die Lasten $P_1, P_2, \ldots P_m$ an. Es soll die Ausführung von Integralen und Derivirten der Formen

$$\int_0^x \sum_0^x P\varphi(x, a)\, dx, \qquad \frac{d\sum\limits_0^x P\varphi(x, a)}{dx}$$

gezeigt werden. In den Summenausdrücken bedeutet x die laufende Abscisse. Die Abscissenaxe ist horizontal.

Nehmen wir als einfachsten Fall zunächst die Bestimmung des Integrals

$$\int_{x=0}^{x=x} \sum_0^x P dx.$$

In der Gleichung

$$\int_0^x \sum_0^x Pdx = \int_0^{a_1} \sum_0^x Pdx + \int_{a_1}^{a_2} \sum_0^x Pdx + \int_{a_2}^{a_3} \sum_0^x Pdx + \cdots + \int_{a_m}^x \sum_0^x Pdx$$

ist für jedes Integral rechts $\sum\limits_0^x P$ constant (Fig. 25), nämlich

von 0 bis a_1, a_1 bis a_2, a_2 bis $a_3, \cdots$ a_m bis x:

$$\sum_0^x P = \quad 0 \quad, \qquad P_1 \quad, \qquad P_1 + P_2, \quad P_1 + P_2 + \cdots + P_m.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\int_0^x \sum_0^x Pdx &= P_1(a_2 - a_1) + (P_1 + P_2)(a_3 - a_2) + \cdots \\ &\quad + (P_1 + P_2 + \cdots + P_m)(x - a_m) \\ &= P_1(x - a_1) + P_2(x - a_2) + \cdots + P_m(x - a_m)\end{aligned}$$

$$(1) \qquad \int_0^x \sum_0^x P dx = \sum_0^x P(x - a).$$

Eine noch bequemere Ableitung möge gezeigt werden an

$$\int_0^x \sum_0^x P(x-a)^{n-1}\,dx\,,$$

worin n eine beliebige Constante bedeutet. Beachtet man, dass

$$\sum_0^x P(x-a)^{n-1} = P_1(x-a_1)^{n-1} + P_2(x-a_2)^{n-1} + \cdots + P_m(x-a_m)^{n-1},$$

so folgt unmittelbar

$$\int_0^x \sum_0^x P(x-a)^{n-1}\,dx = P_1\frac{(x-a_1)^n}{n} + P_2\frac{(x-a_2)^n}{n} + \cdots + P_m\frac{(x-a_m)^n}{n}\,,$$

wofür wir schreiben können

$$(2)\qquad \int_0^x \sum_0^x P(x-a)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\sum_0^x P(x-a)^n\,.$$

Damit ist auch

$$(3)\qquad \frac{d\sum\limits_0^x P(x-a)^n}{dx} = n\sum_0^x P(x-a)^{n-1}$$

und der Werth der n^{ten} Derivirten

$$(4)\qquad \frac{d^n \sum\limits_0^x P(x-a)^n}{dx^n} = n!\sum_0^x P\,.$$

Gleichung (2) führt mit $n=1$ auf (1).

Für die oben angeführte allgemeine Form des Integrals setzen wir entsprechend dem letzten Verfahren

$$\sum_0^x P\varphi(x,a) = P_1\varphi(x,a) + P_2\varphi(x,a_2) + \cdots + P_m\varphi(x,a_m)$$

und erhalten damit

$$(5)\qquad \int_0^x \sum_0^x P\varphi(x,a)\,dx = \sum_0^x P\int_a^x \varphi(x,a)\,dx\,,$$

$$(6)\qquad \frac{d\sum\limits_0^x P\varphi(x,a)}{dx} = \sum_0^x P\frac{d\varphi(x,a)}{dx}\,.$$

Es ergeben sich also Integrale der Amphitude $x - 0$ und Form (5), wenn man ohne Beachtung des Summenzeichens den allgemeinen Factor von P integrirt von a bis x. Bei Bildung von Differentialen der Form (6) hat man einfach hinter dem Summenzeichen den Factor von P zu differentiiren.

Aus der über (5) angeschriebenen Gleichung entnehmen wir noch für die Lasten P auf einer beliebigen Strecke von $x = v$ bis $x = w$

$$(7) \qquad \frac{d\sum_v^w P\varphi(x,a)}{dx} = \sum_v^w P\frac{d\varphi(x,a)}{dx},$$

während aus

$$\int_v^w \sum_0^x P\varphi(x,a)\,dx = \int_0^w \sum_0^x P\varphi(x,a)\,dx - \int_0^v \sum_0^x P\varphi(x,a)\,dx$$

mit Rücksicht auf (5)

$$(8) \qquad \int_v^w \sum_0^x P\varphi(x,a)\,dx = \sum_0^w P\int_a^w \varphi(x,a)\,dx - \sum_0^v P\int_a^v \varphi(x,a)\,dx$$

und beispielsweise

$$(9) \qquad \int_v^w \sum_0^x P(x-a)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\sum_0^w P(w-a)^n - \frac{1}{n}\sum_0^v P(v-a)^n.$$

Das vorstehende einfache Integrationsverfahren wurde vom Verfasser gegeben (Zeitschr. f. Math. u. Physik 1873 und 1874 oder Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873), um für beliebige Belastungen gültige Theorien zahlreicher Constructionen des Ingenieurs zu ermöglichen. Die zugehörige Behandlung stetig vertheilter und bewegter Lasten findet sich in den beiden folgenden Paragraphen. — (Aufgabe 1).

§ 5. Stetig vertheilte Lasten.

Die stetig vertheilten Lasten können als spezielle Fälle concentrirter Lasten angesehen werden. Denn haben wir irgendwelche Beziehungen für concentrirte Lasten $P_1, P_2, \ldots$ in Entfernungen $a_1, a_2, \ldots$ von einem bestimmten Punkte aus aufgestellt, so hindert uns nichts, die P und Differenzen unmittelbar auf einander folgender

a auch unendlich klein werden zu lassen. Es sollen nun die Werthe von Summenausdrücken der im vorigen Paragraphen behandelten Formen für den Fall von stetig ertheilten Lasten ermittelt werden.

Hätte man zwischen 0 und x eine gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit, so würde an jeder Stelle a dieser Strecke auf die Länge da kommen (Fig. 26)

$$P = p\,da,$$

womit wir erhalten

$$\sum_0^x P = \int_{a=0}^{a=x} p\,da = px. \tag{1}$$

Ebenso entsteht

$$\sum_0^x P(x-a)^{n-1} = p\int_0^x (x-a)^{n-1}da$$

$$= -p\int_0^x (x-a)^{n-1}d(x-a) = -p\left[\frac{(x-a)^n}{n}\right]_{a=0}^{a=x}$$

$$\sum_0^x P(x-a)^{n-1} = \frac{px^n}{n}. \tag{2}$$

Oder befänden sich zwischen 0 und x per Längeneinheit constante Lasten

$$p \text{ von } a = 0 \text{ bis } a = z$$
$$p' \;\text{„}\; a = z \;\text{„}\; a = x,$$

so würden in gleich einfacher Weise folgen

$$\sum_0^x P = p\int_0^z da + p'\int_z^x da = pz + p'(x-z) = px + (p'-p)(x-z), \tag{3}$$

$$\sum_0^x P(x-a)^{n-1} = p\int_0^z (x-a)^{n-1}\,da + p'\int_z^x (x-a)^{n-1}da$$

$$= -p\left[\frac{(x-a)^n}{n}\right]_0^z - p'\left[\frac{(x-a)^n}{n}\right]_z^x,$$

$$(4)\qquad \sum_0^x P(x-a)^{n-1} = \frac{px^n}{n} + \frac{(p'-p)(x-\varepsilon)^n}{n}.$$

Nehmen wir nun an, es sei ganz allgemein $\varphi(x, a)$ eine beliebige Function von a und soll bestimmt werden

$$\sum_0^x P\varphi(x, a)$$

für eine stetig vertheilte Last, welche per Längeneinheit nach irgend einem Gesetze

$$p = f(a)$$

variirt. Dann wirkt bei a auf die Länge da (Fig. 26)

$$P = p\,da = f(a)\,da,$$

womit sich ergibt

$$(5)\qquad \sum_0^x P\varphi(x, a) = \int_0^x \varphi(x, a)\,p\,da = \int_0^x \varphi(x, a) f(a) da,$$

$$(6)\qquad \sum_v^w P\varphi(x, a) = \int_v^w \varphi(x, a)\,p\,da = \int_v^w \varphi(x, a) f(a) da.$$

Stellt man für irgend einen Fall allgemeine, beliebigen P auf gerader Strecke entsprechende Formeln auf, so ändern sich je nach der Belastungsart nur diejenigen Glieder, welche die Lasten enthalten, nämlich die Σ. Die Specialisirung dieser Summen für stetig vertheilte Lasten beliebiger Gesetze kann in der angeführten Weise erfolgen. Die allgemeinen Formeln sind indessen oft einfacher als die für stetig vertheilte Lasten gültigen und jedenfalls durchsichtiger als diese, indem sie den mit dem Angriffspunkte a wechselnden Einfluss jeder Last und jedes Lastelements klar hervortreten lassen, während dieser Einfluss bei speciellen Formeln in Ausdrücken wie px, $\frac{px^n}{n}$ u. s. w. vollständig verschwunden ist. — (Aufgabe 2).

§ 6. **Bewegte Lasten.**

Ein System von Lasten $P_1, P_2, \cdots P_m$ in festen Entfernungen bewege sich zwischen den Abscissen 0 und x oder auf einer beliebigen Strecke von v bis w derart, dass keine Last über die Streckengrenzen hinauskommt. Es sollen die mit einer unendlich kleinen

Verschiebung da des Systems eintretenden Aenderungen der im § 4 behandelten Summen bestimmt werden.

Es handle sich zunächst um die Strecke von 0 bis x. Durch die angenommene Verschiebung ändert sich an $\sum_0^x P$ nichts, sodass

$$\frac{d\sum_0^x P}{da} = 0. \tag{1}$$

Dagegen ist der Werth von $\sum_0^x P(x-a)$ nach der Verschiebung

$$\sum_0^x P(x-a-da) = P_1(x-a_1-da) + P_2(x-a_2-da) + \cdots + P_m(x-a_m-da).$$

Weil nun vor derselben war

$$\sum_0^x P(x-a) = P_1(x-a_1) + P_2(x-a_2) + \cdots + P_m(x-a_m),$$

so folgt durch Subtraction

$$d\sum_0^x P(x-a) = -(P_1+P_2+\cdots+P_m)da,$$

wofür wir auch schreiben können

$$\frac{d\sum_0^x P(x-a)}{da} = -\sum_0^x P. \tag{2}$$

In ganz analoger Weise erhält man mit Hülfe des Binomischen Lehrsatzes

$$d\sum_0^x P(x-a)^n$$
$$= \sum_0^x P\left[(x-a)^n - n(x-a)^{n-1}da + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(x-a)^{n-2}da^2 - \cdots\right] - \sum_0^x P(x-a)^n,$$

woraus bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen

$$\frac{d\sum_0^x (x-n)^n}{da} = -n\sum_0^x P(x-a)^{n-1}. \tag{3}$$

Diese Gleichung führt mit $n = 1$ und 0 auf (2) und (1). Noch allgemeiner ergibt sich bei Anwendung der Taylor'schen Reihe, deren Voraussetzungen in allen hier eintretenden Fällen erfüllt sind,

$$d \sum_0^x P\varphi(x,a)$$

$$= \sum_0^x P\left[\varphi(x,a) + \varphi'(x,a)\frac{da}{1} + \varphi''(x,a)\frac{da^2}{1\cdot 2} + \cdots\right] - \sum_0^x P\varphi(x,a),$$

worin die Derivirten φ', φ'', $\cdot\cdot$ einem variabeln a entsprechen,

$$\frac{d\sum_0^x P\varphi(x,a)}{da} = \sum_0^x P\frac{d\varphi(x,a)}{da} \tag{4}$$

Da vorstehende Ableitung bei ganz beliebigen Streckengrenzen v, w zulässig ist, so folgt auch

$$\frac{d\sum_v^w P\varphi(x,a)}{da} = \sum_v^w P\frac{d\varphi(x,a)}{da} \tag{5}$$

und beispielsweise

$$\frac{d\sum_v^w P(x-a)^n}{da} = -n\sum_v^w P(x-a)^{n-1}. \tag{6}$$

Die behandelte Aufgabe tritt in der Ingenieurmechanik sehr häufig auf, indem Locomotiven, Eisenbahnzüge, Fuhrwerke u. s. w. bewegte Lastsysteme der betrachteten Art bilden. Obige Differentiationen finden Verwendung bei Ermittelung derjenigen Stellungen des Lastsystems, für welche Maxima und Minima von Momenten, Beanspruchungen, Einsenkungen etc. entstehen. — (Aufgabe 3.)

§ 7. Schnittkräfte. Schnittmomente.

Wir betrachten einen ebenen Träger im Gleichgewicht. Durch denselben werde ein beliebig geformter Schnitt s so gelegt, dass der Träger in zwei Theile I und II zerlegt erscheint (Fig. 27, 28). Die Kräfte, mit welchen beide Theile im Schnitte s auf einander wirken, sind gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet. Wir fassen als Schnittkräfte diejenigen Kräfte ins Auge, welche vom Trägertheil I her auf Theil II wirken. Für dieselben mögen H_s die resultirende Horizontalcomponente, V_s die resultirende Verticalcomponente und M_s das resultirende Moment hinsichtlich eines beliebigen Punktes

in der Trägerebene bezeichnen. Denkt man sich für den Trägertheil I die Gleichgewichtsbedingungen für alle äussern und innern Kräfte angeschrieben, so fallen die letzteren wegen doppelten Auftretens in entgegengesetzten Richtungen aus, die äussern Kräfte müssen für sich im Gleichgewichte sein. Diese äussern Kräfte des Trägertheils I sind die an Letzterem wirkenden äussern Kräfte des Trägers und die im Schnitte s vom Trägertheil II her wirkenden Kräfte (welche für den Träger im Ganzen innere Kräfte bilden, § 1). Da aber die Letzteren auch mit H_s, V_s, M_s im Gleichgewichte stehen, so ist H_s gleich der Summe aller äussern Horizontalkräfte, V_s gleich der Summe aller äussern Verticalkräfte und M_s gleich der Summe der Momente (hinsichtlich des gewählten Drehpunkts) aller äussern Kräfte des Trägers am Trägertheil I.

Es werde nun links von Schnitt s ein beliebig geformter Schnitt 0 so durch den Träger gelegt (Fig. 28), dass zwischen 0 und s kein Auflager fällt nnd in diesem Schnitte 0 ein beliebiger Punkt 0 als Ursprung der Coordinaten angenommen. Positive Richtungen der horizontalen Abscissenaxe und verticalen Ordinatenaxe nach rechts und oben, also positiver Drehungssinn der Winkel links herum (entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers), wenn der feste Schenkel die Richtung der wachsenden Abscissen hat. Die positiven Richtungen von H_s, V_s sollen mit denjenigen der Abscissenaxe und Ordinatenaxe übereinstimmen und ein Moment M_s als positiv gelten, wenn es (entsprechend der Bewegung des Uhrzeigers) rechts um den gewählten Drehpunkt wirkt, dessen Abscisse und Ordinate durch u und w bezeichnet sein mögen.

Wir drücken hier H_s, V_s, M_s für den Fall aus, dass der Träger nur verticale Activkräfte aufzunehmen hat, welche *Lasten* heissen und als positiv gelten sollen, wenn sie von oben nach unten wirken. Zwischen den Schnitten 0 und s mögen bei den Abscissen e_1, e_2, .. die Lasten K_1, K_2, .. auf den Träger kommen. Wenn nun die dem Schnitte 0 entsprechenden Werthe von H_s, V_s, M_s durch H, V bezeichnet werden und M der Werth von M_0 für $u = 0$, $w = 0$ ist, dann hat man für unsern beliebigen Schnitt s

$$H_s = H, \tag{1}$$

$$V_s = V - \sum_0^s K, \tag{2}$$

$$M_s = M + Vu - Hw - \sum_0^s K(u - e). \tag{3}$$

Die Grenzen 0, s, l der $\sum$ bedeuten Schnitte, nicht Abscissen, was nur bei Verticalschnitten auf eins herauskommt. Gleichung 1) sagt uns: *Hat ein Träger nur Lasten aufzunehmen, dann ist die resultirende Horizontalkraft H_s für alle beliebig geformten Schnitte durch den Träger vom selben Werthe und gleich dem „Horizontalschube" H.*

Es sei R_s die als Absolutwerth aufgefasste resultirende Kraft im Schnitte s und ψ der Winkel, welchen deren Richtung mit der Abscissenaxe bildet. Dann hat man (Fig. 29) für die Componente von R_s in beliebiger Richtung, welche den Winkel φ mit der Abscissenaxe einschliesst,

$$(4) \qquad N_s = V_s \sin\varphi + H\cos\varphi = R_s \cos(\psi - \varphi)\,,$$

und wenn sie einen Winkel $\varphi + 90^0$ mit der Abscissenaxe oder φ mit der Ordinatenaxe bildet, d. h. für eine Componente senkrecht zu N^s

$$(5) \qquad T_s = V_s \cos\varphi - H\sin\varphi = R_s \sin(\psi - \varphi)\,.$$

Für den Winkel ψ gilt ferner

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{V_s}{H}\,,$$

und für die resultirende Schnittkraft

$$(7) \qquad R_s = \frac{H}{\cos\psi} = \frac{V_s}{\sin\psi} = \sqrt{H^2 + V_s^2} = \sqrt{N_s^2 + T_s^2}\,.$$

Man nehme nun rechts von Schnitt s irgend einen Punkt der Coordinaten l, k an und lege durch denselben einen beliebig geformten Schnitt l so, dass zwischen den Schnitten s und l kein Auflager fällt. Wird dann für den Schnitt l bezüglich des Drehpunktes l, k das Moment M_s durch M' bezeichnet, so liefert 3)

$$M' = M + Vl - Hk - \sum_0^l K(l - e)\,,$$

woraus die resultirende Verticalkraft im Schnitte 0

$$(8) \qquad V_0 = V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk + \sum_0^l K(l - e)\right].$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in 2) folgt mit $s = l$ die resultirende Verticalkraft im Schnitte l

$$(9) \qquad V_l = -V' = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hk - \sum_0^l Ke\right]$$

V' ist die Kraft, welche von rechts des Schnittes l her der Schnitt-

kraft V_l das Gleichgewicht hält. Die Subtraction der letzten Gleichung von der vorletzten ergibt

$$(10)\qquad V_0 - V_l = V + V' = \sum_0^l K$$

und diese Formel drückt aus, dass die Summe der Verticalreactionen gegen einen Trägertheil gleich der Belastung desselben ist.

Substituirt man V nach 8) in 2) 3) und berücksichtigt, dass allgemein $\sum_0^l = \sum_0^s + \sum_s^l$, so folgen mit den Bezeichnungen

$$(11)\qquad S = \sum_0^s Ke, \qquad S' = \sum_s^l K(l-e)$$

als weitere Ausdrücke für die Verticalkraft und das Moment in einem beliebig geformten Schnitte s durch den Träger

$$(12)\qquad V_s = \frac{1}{l}(M' + S' - M - S + Hk),$$

$$(13)\qquad M_s = \frac{l-u}{l}(M + S) + \frac{u}{l}(M' + S') - H\left(w - \frac{k}{l}u\right),$$

worin nach 11) S das statische Moment der Lasten, welche zwischen den Schnitten 0 und s am Träger angreifen, in Hinsicht des Punktes 0 und S' das statische Moment der Lasten, welche zwischen den Schnitten s und l auf den Träger kommen, in Hinsicht des Punktes l. — (Aufgabe 4.)

§ 8. Balkenträger und Bogenträger.

Diejenigen Träger, bei welchen an keiner Stelle mehr als zwei Trägerstücke (§ 2) zusammentreffen, werden in *Balkenträger* und *Bogenträger* oder kurz in *Balken* und *Bogen* unterschieden. Erstere Bezeichnung umfasst alle Träger, bei welchen durch verticale Activkräfte (Lasten) nur verticale Stützenreactionen entstehen, bei den Bogenträgern kommen im gleichen Falle auch Horizontalreactionen der Stützen hinzu. *Einfache Balken* und *einfache Bogen* haben nur eine Oeffnung, *continuirliche Balken* und *continuirliche Bogen* erstrecken sich über mehrere Oeffnungen. Die Endauflager eines Bogens heissen *Kämpfer* und ihre Reactionen *Kämpferreactionen.* Jenachdem die Horizontalcomponenten der Letzteren bei vertical abwärts gerichteten Activkräften nach innen oder aussen wirken, jenachdem sie die Trägerenden zu nähern oder zu entfernen suchen, wird der Bogen ein *Sprengbogen* oder *Hängebogen* genannt. Einen Balkenträger hat man

insbesondere immer dann, wenn horizontaler Verschiebung des Trägers nur bei einer Stütze widerstanden wird. Denn für diesen Fall ergibt die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf den ganzen Träger, dass auch bei der letzten Stütze keine Horizontalreaction auftritt, und dieselbe Bedingung in Anwendung auf jeden Trägertheil, welcher durch einen beliebigen Schnitt s durch den Träger abgegrenzt ist,

$$(1) \qquad H_s = H = 0\,.$$

Wird bei mehr als einer Stütze horizontaler Verschiebung widerstanden, so können Balkenträger durch Anordnung von Gleitungen innerhalb der Träger erzeugt werden (Fig. 219, 221, 223, 225). Mit 1) liefern die Formeln des vorigen Paragraphen für beliebige Balkenträger das Moment und die Verticalkraft in einem beliebigen Schnitte s

$$(2) \quad M_s = M + Vu - \sum_0^s K(u-e) = \frac{l-u}{l}(M+S) + \frac{u}{l}(M'+S'),$$

$$(3) \qquad V_s = V - \sum_0^s K = \frac{1}{l}(M' + S' - M - S)$$

die Componenten der resultirenden Schnittkraft R_s (welche gleich dem Absolutwerthe von V_s ist) in Richtungen, welche den Winkel φ mit der Abscissenaxe und Ordinatenaxe einschliessen,

$$(4) \qquad N_s = V_s \sin\varphi\,, \qquad T_s = V_s \cos\varphi\,,$$

die in den Schnitten 0 und l auftretenden Reactionen gegen den Trägertheil zwischen diesen Schnitten

$$(5) \qquad \begin{cases} V = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum_0^l K(l-e)\right] = V_0, \\ V' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum_0^l Ke\right] = -\,V_l\,. \end{cases}$$

Der Vergleich von 2) 3) mit § 7, 12) 13) zeigt, dass M_s und V_s für beliebige Träger aus je zwei Theilen bestehen, von welchen der erste sich ausdrückt wie bei Balkenträgern, während der zweite bei bestimmtem H für alle V_s gleich gross und für die M_s nur mit der Lage des Drehpunkts u, w veränderlich ist.

Gewöhnlichste Fälle. Es handle sich beispielsweise um einen Balkenträger mit einem festen und einem horizontal frei verschiebbaren *Gelenkauflager* (Fig. 30). Wir legen die Schnitte 0 und l so durch die Gelenkpunkte 0 und l, dass von äussern Kräften

links von Schnitt 0 und rechts von Schnitt l nur die Stützenreactionen bleiben. Da der Träger um die Punkte 0 und l frei drehbar ist, so sind die Momente M, M' gleich Null und es folgen aus obigen Formeln die spezielleren:

$$(6)\qquad M_s = Vu - \sum_0^s K(u-e) = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S',$$

$$(7)\qquad V_s = V - \sum_0^s K = \frac{1}{l}(S' - S),$$

$$(8)\qquad V = \frac{1}{l}\sum_0^l K(l-e), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Ke,$$

V, V' sind die Stützenreactionen.

Nehmen wir ferner einen Träger mit einem festgespannten und einem frei schwebenden Ende an (Fig. 31). Die Schnitte 0 und l werden durch die Einspannungsstelle und das freie Ende so gelegt, dass alle Lasten zwischen dieselben fallen. Ursprung der Coordinaten in irgend einem Punkte des Schnittes 0. Da nun $M' = 0$, $V' = 0$, so folgt aus der zweiten Gleichung 5)

$$(9)\qquad M = -\sum_0^l Ke$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks in die erste

$$(10)\qquad V = \sum_0^l K.$$

Die Einführung der beiden letzten Werthe in 2) 3) aber gibt

$$(11)\qquad M_s = \sum_s^l K(u-e),$$

$$(12)\qquad V_s = \sum_s^l K.$$

Schliesslich werde ein Bogenträger mit zwei unverschiebbaren Gelenkauflagern ins Auge gefasst (Fig. 32). Schnitte 0 und l durch die Gelenkpunkte 0 und l so, dass von äusseren Kräften nur die Stützenreactionen links von Schnitt 0 und rechts von Schnitt l bleiben. Wie im ersten Falle haben wir $M = M' = 0$ und damit nach den Formeln des § 7

(13) $$M_s = Vu - Hw - \sum_0^s K(u-e) = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H,$$

(14) $$V_s = V - \sum_0^s K = \frac{1}{l}(S' - S + kH),$$

(15) $$V = \frac{1}{l} \sum_0^l K(l-e) + \frac{k}{l} H, \qquad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Ke - \frac{k}{l} H.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn sich innerhalb des Trägers weitere Gelenke befinden (Fig. 8, 11). Bei gleichhohen *Kämpfergelenken* sind wegen $k = 0$ die Verticalkraft V_s und Verticalreactionen V, V' ganz wie beim Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern ausgedrückt. — (Aufgabe 5.)

§ 9. Curven der Schnittkräfte und Schnittmomente. †

Wir denken uns die Schnitte s stetig aufeinander folgen und jeden derselben derart durch einen seiner Punkte charakterisirt, dass diese Punkte eine zusammenhängende Linie bilden, welche im Allgemeinen *charakteristische Linie* heissen mag, während x, y ihre Coordinaten bezeichnen. Trägt man dann bei jeder Abscisse x den Werth von M_s oder V_s oder einer anderen Kraft im zugehörigen Schnitte s als Ordinate an, so entsteht in der Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten eine *Curve der Momente* oder der Verticalkräfte oder der sonst in Betracht gezogenen Schnittkräfte.

Da die Verticalkraft nach § 7, 2) ihren Werth zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lasten K nicht ändert, so bildet die Curve der V_s einen treppenförmigen Linienzug, welcher zwischen zwei Punkten x, in deren Schnitten s benachbarte K auf den Träger kommen, horizontal verläuft, an jenen Stellen selbst um den Werth der betreffenden K steigt oder fällt und bei den Stützen diejenigen Ordinaten $V_0 = V$, $V_l = -V'$ aufweist, zwischen welchen alle andern innerhalb l auftretenden Werthe V_s liegen. Die numerisch grösste Verticalkraft von θ bis l entspricht also stets einem der Schnitte 0 und l. Ist die Belastung auf einer Strecke stetig vertheilt, so werden die Treppenabsätze daselbst unendlich klein.

Denken wir uns weiter die Drehpunkte der Momente M_s in diejenigen Punkte der Schnitte s gelegt, durch welche die Letzteren charakterisirt wurden, so folgt aus § 7, 3) 13) mit $u = x$, $w = y$

$$(1)\qquad \begin{cases} M_s = M + Vx - Hy - \sum_0^s K(x-e) \\ \quad = \frac{l-x}{l}(M+S) + \frac{x}{l}(M'+S') - H\left(y - \frac{k}{l}x\right). \end{cases}$$

Bei Verticalschnitten ist es gleichgültig, ob man von den Lasten zwischen den Schnitten 0 und s oder von den Lasten zwischen den Punkten 0 und x spricht. Auch in andern Fällen kann es gestattet sein, als Grenzen 0, s in 1) die entsprechenden Abscissen 0, x anzunehmen, womit bei Beachtung von § 4, 1)

$$(2)\qquad \frac{dM_s}{dx} = V - H\frac{dy}{dx} - \sum_0^s K = V_s - H\operatorname{tg}\varphi,$$

unter φ den Neigungswinkel der charakteristischen Linie bei x verstanden (Fig. 33). Das Längendifferential dieser Linie ist $ds = dx : \cos\varphi$ und mit Rücksicht hierauf folgt aus 2)

$$(3)\qquad \frac{dM_s}{ds} = V_s\cos\varphi - H\sin\varphi = T_s.$$

T_s ist nach § 7, 5) die Schnittkraft senkrecht zur charakteristischen Linie, die *Transversalkraft.* Wir können aussprechen: *Der Differentialquotient des Moments nach s ist gleich der Transversalkraft.* Gleichung 2) drückt auch die Tangente des Neigungswinkels der Momentencurve bei x aus.

Speziell für beliebige Balkenträger hat man nach 2) 3) mit $H = 0$

$$(4)\qquad \frac{dM_s}{dx} = V_s, \qquad \frac{dM_s}{ds} = T_s = V_s\cos\varphi,$$

der Differentialquotient des Moments nach x ist gleich der Verticalkraft. Das Moment nimmt mit wachsendem x solange zu, als V_s positiv ist, es erreicht bei

$$(5)\qquad x = m, \quad \text{wo} \quad V_s = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_0^s K = V \text{ ist},$$

sein Maximum und ändert sich dann in negativem Sinne, sodass das numerisch grösste Moment innerhalb l als M, M_m oder M' auftritt. Nach 4) verläuft die Momentencurve (Fig. 34) zwischen je zwei Punkten x, in deren Schnitten s benachbarte K auf den Träger kommen, geradlinig und bei jedem dieser x befindet sich eine Curvenecke. Für stetig vertheilte Lasten werden die geraden Strecken unendlich klein.

Als charakteristische Linie wird bei stabförmigen Trägern gewöhnlich die Längsschwerlinie oder *Stabaxe* angenommen, nach deren

Abscissen x man dann auch die *Querschnitte* s zu bezeichnen pflegt. In manchen Fällen wählt man diejenige Linie, welche die Angriffspunkte der resultirenden Schnittkräfte R_s bilden; sie wird *Stützlinie* genannt, und da hinsichtlich derselben keine Momente der R_s entstehen, so folgt aus 1) als allgemeinste Gleichung der Stützlinie

$$(6)\quad y=\frac{1}{H}\Big[M+Vx-\sum_0^s K(x-e)\Big]=\frac{l-x}{l}\frac{M+S}{H}+\frac{x}{l}\frac{M'+S'}{H}+\frac{x}{l}k$$

und wenn auch die Punkte 0 und l (§ 7) in der Stützlinie angenommen werden

$$(7)\qquad y=\frac{1}{H}\Big[Vx-\sum_0^s K(x-e)\Big]=\frac{l-x}{l}\frac{S}{H}+\frac{x}{l}\Big(\frac{S'}{H}+k\Big).$$

Bei stabförmigen Bogen mit stetig aufeinanderfolgenden Gelenken in der Axe (Ketten), wie überhaupt bei Trägern nach der Anordnung Fig. 14, wenn die Lasten nur in Axgelenken angreifen, stimmen Axe und Stützlinie überein. Der Stützlinie von Balkenträgern entspricht $y=\infty$.

Kommen in den einzelnen Schnitten verschiedene Momente, Verticalkräfte u. s. w. vor, wie insbesondere im Falle bewegter Lasten, so lassen sich je nach den bei den Abscissen x als Ordinaten aufgetragenen Grössen auch *Curven der Maxima und Minima der Momente* oder Verticalkräfte oder sonst in Betracht gezogenen Schnittkräfte herstellen. — (Beispiel 1.)

§ 10. **Einfluss der Zwischenträger.**

Bei Brücken wird die Verkehrslast gewöhnlich zunächst durch ein System von *Zwischenträgern* aufgenommen und erst durch diese in ganz bestimmten Punkten, sogenannten *Knotenpunkten*, auf die *Hauptträger* übertragen (Fig. 35). Es fragt sich, welchen Einfluss eine solche Anordnung auf die Berechnung der Hauptträger hat. Bei Beantwortung dieser Frage werden wir sowohl die den Hauptträgern parallelen *Fahrbahnträger* wie auch die dazu senkrechten *Querträger* als um die Enden frei drehbar und horizontal frei verschiebbar ansehen, sie als Balkenträger mit einem verschiebbaren und einem unverschiebbaren Gelenkauflager behandeln (§ 8). Im Folgenden mögen die Lasten P solche Verkehrslasten bedeuten, welche entweder auf zwei durch Querträger verbundene und zusammen berechnete Hauptträger kommen oder auf einen für sich betrachteten Hauptträger zu rechnen sind.

Wirkt die Last P auf einen Fahrbahnträger (Fig. 36), so vertheilt sie sich mit

$$A = \frac{l-a}{l} P, \qquad B = \frac{a}{l} P$$

derart auf die benachbarten Knotenpunkte, dass $A + B = P$ und das Moment von A und B in Bezug auf jeden Punkt in der Trägerebene gleich dem Momente von P in Hinsicht desselben ist. Daraus folgt: *Wird die zunächst von Zwischenträgern aufgenommene Verkehrslast nur in bestimmten Knotenpunkten auf die Hauptträger übertragen, so darf man in allen die Hauptträger betreffenden Gleichungen an Stelle der Knotenpunktslasten K und ihrer statischen Momente die wirklichen Verkehrslasten P und deren statische Momente einführen, wenn nur alle Componenten der P in den K enthalten sind.*

Angenommen beispielsweise, wir haben einen Balkenträger mit einem verschiebbaren und einem unverschiebbaren Gelenkauflager (Fig. 37), für welchen die bei Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ zunächst auf Zwischenträger kommenden Verkehrslasten $P_1, P_2, \ldots$ in den Knotenpunkten $0, e_1, e_2, \ldots$ resultirende Belastungen $K_0, K_1, K_2, \ldots$ erzeugen. Dann bestehen für sämmtliche äussern Kräfte am Träger die Momentengleichungen hinsichtlich der Gelenkpunkte l und 0

$$Vl - \sum_0^l K(l-e) = 0 = Vl - \sum_0^l P(l-a)$$

$$V'l - \sum_0^l Ke \qquad = 0 = V'l - \sum_0^l Pa$$

und es folgen hieraus die Stützenreactionen

$$V = \frac{1}{l}\sum_0^l K(l-e) = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a)$$

$$V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Ke \qquad = \frac{1}{l}\sum_0^l Pa.$$

Dagegen würde es nicht gestattet sein, in

$$V_s = V - \sum_0^s K$$

$\sum_0^s P$ an Stelle von $\sum_0^s K$ zu setzen, weil letztere Summe diejenige Componente von P_4 (Fig. 37) nicht enthält, welche auf e_3 kommt. Da sich jede nicht in einem Knotenpunkte angreifende Last P auf

zwei Knotenpunkte vertheilt, so folgt: Ein plötzlicher Uebergang von total belasteten Knotenpunkten zu nur mit Eigengewicht belasteten kann nicht eintreten, wenn zur Totalbelastung des letzten total belasteten Knotenpunktes auch Verkehrslast zwischen diesem und dem ersten nicht total belasteten Knotenpunkte anzunehmen ist.

Befindet sich eine Last P auf dem Fahrbahnträger, durch welchen Schnitt s geführt ist, so tritt ein Theil von P in $\sum_0^s K$, ein anderer in $\sum_s^l K$ auf. Sind a, c, v die Abscissen der Last P und der Auflagerpunkte des Fahrbahnträgers (Fig. 38), dann erhalten die Knotenpunkte c und v durch P die Belastungen

$$\frac{v-a}{v-c}P, \qquad \frac{a-c}{v-c}P$$

und damit ergeben sich in den Gleichungen der §§ 7, 8 die Summenwerthe, soweit sie von der Verkehrslast (oder auch Fahrbahnlast überhaupt) herrühren,

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_0^s K = \sum_0^c P + \frac{1}{v-c}\sum_c^v P(v-a), \\ \sum_0^s K(u-e) = \sum_0^c P(u-a) + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P(v-a), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} S = \sum_0^s Ke = \sum_0^c Pa + \frac{c}{v-c}\sum_c^v P(v-a), \\ S' = \sum_s^l K(l-e) = \sum_v^l P(l-a) + \frac{l-v}{v-c}\sum_c^v P(a-c), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_0^l Ke = \sum_0^l Pa, \\ \sum_0^l K(l-e) = \sum_0^i P(l-a). \end{cases}$$

Dabei ist angenommen, dass sämmtliche Componenten der P zwischen den Schnitten 0 und l (Summengrenzen) *auf den Träger übertragen werden.* Mit 1) — 3) geben nun die Gleichungen der §§ 7, 8 ohne Weiteres auch die Beiträge einer zunächst auf Zwischenträger wirkenden Belastung zu den berechneten Grössen. Speziell für eine

zwischen den Punkten 0 und l gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit, welche in Knotenpunkten zwischen den Schnitten 0 und l auf den Träger kommt, folgen aus 1) — 3) mit $P = pda$.

$$(4)\qquad \sum_0^s K = (c+v)\frac{p}{2}, \qquad \sum_0^s K(u-e) = (uc+uv-cv)\frac{p}{2},$$

$$(5)\qquad S = cv\frac{p}{2}, \qquad S' = (l-c)(l-v)\frac{p}{2},$$

$$(6)\qquad \sum_0^l Ke = \frac{pl^2}{2}, \qquad \sum_0^l K(l-e) = \frac{pl^2}{2}.$$

Was oben für Kräfte und statische Momente sich ergab, gilt selbstverständlich nicht ebenso für höhere Momente und ist z. B. keineswegs allgemein $\sum_0^l Ke^2$ gleich $\sum_0^l Pa^2$. Jedoch kommen bei statisch bestimmten Trägern höhere als statische Momente nicht vor. — (Beispiel 2, Aufgabe 7.)

§ 11. Influenzlinien.

Lässt man eine Last 1 auf einem Träger nach einander alle Abscissen a annehmen und trägt bei jedem a den für diese Lage enstehenden Beitrag der Last 1 zu irgend einer Wirkung (Moment, Verticalkraft, Spannung, Einsenkung u. s. w.) *auf eine bestimmte Stelle als Ordinate an, so entsteht als Verbindungslinie der Ordinatenendpunkte eine Influenzlinie der fraglichen Wirkung für die betreffende Stelle.* Eine bei a liegende Last P trägt zu jener Wirkung Pb bei, wenn b die Ordinate der Influenzlinie bei a bezeichnet und als Beitrag einer Lastenfolge von v bis w hat man

$$(1)\qquad B = \sum_v^w Pb.$$

Ist die Belastung von v bis w mit p pro Längeneinheit gleichmässig vertheilt und bedeutet F die *Influenzfläche* zwischen den Ordinaten bei v und w (Fig. 39), so liefert 1) mit $P = pda$

$$(2)\qquad B = p\int_v^w b\,da = pF.$$

Der Beitrag einer Last und die Influenzfläche bei a sind positiv oder negativ, je nachdem die Influenzlinie daselbst auf der positiven oder negativen Seite der Abscissenaxe liegt. Die Durchschnittspunkte

der Influenzlinie mit der Abscissenaxe bilden die *Grenzpunkte der positiven und negativen Beitragsstrecken.* Auf jeder Beitragsstrecke einerlei Sinns heisst derjenige Punkt i, bei welchem die Ordinate b und damit der Beitrag einer Last P gröfser als an allen andern Orten jener Strecke ist, der *Influenzpunkt* für die betreffende Strecke.

Wird ein Theil der Belastung nur in bestimmten Knotenpunkten auf die betrachteten Träger übertragen (§ 10), *so verläuft die entsprechende Influenzlinie zwischen je zwei aufeinanderfolgenden belasteten Knotenpunkten c und v geradlinig.* Denn von P greifen bei c und v an bezw.

$$\frac{v-a}{v-c}P, \qquad \frac{a-c}{v-c}P.$$

Ist nun m der Beitrag einer Last $P=1$ bei c und n der Beitrag einer solchen bei v, so folgt für eine an beliebiger Stelle a zwischen c und v wirkende Last $P=1$

$$b=\frac{v-a}{v-c}\,m+\frac{a-c}{v-c}\,n$$

und dies ist bei variabelm a die Gleichung einer geraden Linie (*Melan*, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1880 S. 220). Natürlich sind auch hier die Zwischenträger als frei drehbar um die Enden und horizontal frei verschiebbar angenommen.

Aus dem Gesagten folgt schon, dass die Influenzlinie für gleiche Abscissen a je nach der Uebertragungsart der in Frage kommenden Lasten verschieden ausfallen kann. Für den Träger Fig. 40 beispielsweise verläuft die Influenzlinie des Moments M_x im Verticalschnitt x bezüglich des Punktes x wie ausgezogen, wenn die Lasten direct auf den Träger kommen, während die punktirte Abweichung eintritt, wenn die Lasten nur bei den angedeuteten Querträgern übertragen werden. Es kann also insbesondere die Influenzlinie der Fahrbahnbelastung von derjenigen des Eigengewichts der Hauptträger abweichen und selbst verschiedenen Theilen dieses Eigengewichts können verschiedene Influenzlinien entsprechen (Gurtungsstäbe und Füllungsglieder bei Fachwerken). Uns interessirt jedoch nur die Influenzlinie der bewegten Last, welche in der Folge allein in Betracht gezogen wird.

Ist der allgemeine Ausdruck einer Grösse B für beliebige Lagen a der direct oder indirect wirkenden Lasten P gegeben, so entsteht die Influenzlinie von B, wenn bei jeder Abscisse a die Ordinate b gleich dem Factor gemacht wird, mit welchem P für diese Stelle a im Ausdrucke für B multiplicirt erscheint. Dies folgt aus der oben gegebenen Definition der Influenzlinie.

Nach *Winkler* (Vorträge über Brückenbau, I. Heft 1886, S. 28)

sind die Influenzlinien zuerst von ihm bei der Untersuchung von Bogenbrücken verwendet worden (Zeitschr. des böhm. Arch.- u. Ing.-Vereins 1868), was dem Verfasser, als er diese Linien zur Bestimmung der Grenzbeanspruchungen wählte und ihnen den Namen Influenzlinien (Einflusslinien) beilegte (Allg. Theorie u. Berechn. d. continuirlichen u. einf. Träger, Leipzig 1873, Zeitschr. des Hannöv. Arch.- u. Ing.-Vereins 1875) unbekannt war. — (Beispiel 3 und Aufgaben 6 u. 8.)

§ 12. Grenzwerthe bei veränderlicher Belastung.

Die Beziehungen der §§ 7—10 gelten für jede bestimmte Belastung. Wenn nun ein Theil der Belastung veränderlich ist, so werden nach jenen Gleichungen mit der Belastung auch die Beanspruchungen sich ändern und mit diesen die davon herrührenden Deformationen. Als Grenzwerthe einer Wirkung B (Moment, Verticalkraft, Stabkraft, Spannung, Einsenkung u. s. w.) bezeichnet man diejenigen zwei Werthe von B, zwischen welchen alle sonst vorkommenden eingeschlossen sind. Diese Grenzenwerthe sind gewöhnlich von besonderem Interesse. Zur Querschnittsvermittelung eines axial beanspruchten Stabes beispielsweise genügt es, je nach der gewählten Dimensionirungsmethode, entweder nur die numerisch gröfste Grenzbeanspruchung zu kennen oder beide Grenzbeanspruchungen oder diese und die Beanspruchung durch die feste Last allein. Wir werden überall Bedacht auf die Feststellung dieser drei ausgezeichneten Beanspruchungen nehmen.

In der folgenden Darstellung wird angenommen, dass die Werthe B von der Belastung allein herrühren oder doch von immer gleich bleibenden Einflüssen andrer Art (§ 76), deren Beitrag dann mit demjenigen der festen Last zusammen gefasst werden kann. Kommen unabhängig von der Belastung wirkende, variable Einflüsse in Betracht (wie bei statisch unbestimmten Trägern diejenigen von Temperaturänderungen und Stützenbewegungen), so sind deren Grenzbeiträge mit den hier besprochenen Grenzwerthen so zu combiniren, dass möglichst ungünstige Grenzwerthe im Ganzen entstehen. In diesem Buche treten solche Fälle nicht auf, doch werden wir in der zugehörigen Beispielsammlung den Einfluss des Winddrucks auf Dachbinder in der angeführten Weise zu berücksichtigen haben. (Beispiele 21, 22, 39, 58, 85.)

Für den der festen Last allein entsprechenden Werth von B hat man die für jede bestimmte Belastung gültigen Formeln, welche

je nach Umständen vereinfacht werden können. Um die Grenzwerthe von B zu erhalten, kann man je nach den vorausgesetzten Belastungen und etwaigen vereinfachenden Annahmen verschiedene Methoden anwenden, welche nun in allgemeiner Weise besprochen werden sollen. Die Zulässigkeit erwähnter Annahmen ist natürlich von der Annäherung abhängig, mit welcher die dadurch bedingten Grenzwerthe den wirklich auftretenden entsprechen, doch sollen die Resultate, wenn es sich um Dimensionenberechnungen handelt, eher zu ungünstig als zu günstig ausfallen. Häufig erzeugt die feste Last für sich einen Grenzwerth, nämlich immer dann, wenn alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu B beitragen, vorausgesetzt natürlich, dass die bewegte Last ganz entfernt werden kann.

a) **Berechnung für einen bestimmten Radlastzug.** Als *Radlastzug* oder auch *Lastzug* bezeichnen wir eine Folge von Lasten P in festen Entfernungen. Bewegt sich ein solches Lastsystem auf dem Träger, so ändern sich mit jeder unendlich kleinen Verrückung die Abscissen aller P um das gleiche da, der Werth von B ändert sich um dB und für diejenigen Stellungen des Systems, für welche mathematische Maxima und Minima von B entstehen, muss sein

$$\frac{dB}{da} = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung pflegt nach Ausführen der Differentiation die Form anzunehmen

$$\sum_v^w P\varphi(a, \cdot\cdot) + \cdot\cdot = \sum_\alpha^\beta P\psi(a, \cdot\cdot), \tag{2}$$

worin v, w, α, β die Abscissen irgendwelcher Streckengrenzen bezeichnen und $+\cdot\cdot$ links andeutet, dass mehrere Summen $\sum$ mit verschiedenen $v, w, \varphi(a, ..)$ aufeinander folgen können. Gleichung 2) lässt sich wie folgt aussprechen: *Für jedes System gleichzeitig auf dem Träger Platz findender Lasten in festen Entfernungen tritt ein Maximum oder Minimum von B bei denjenigen Lasstellungen ein, für welche in* 2) *der Ausdruck links den Werth rechts durchschreitet.* Wir sagen „durchschreitet", weil bei der fraglichen Laststellung der Ausdruck links auch noch andere Werthe als den verlangten annehmen kann. Bleibt 1) oder 2) während einer Verrückung des Lastzugs erfüllt, so behält B das entsprechende Maximum oder Minimum ebenso lange bei.

Gleichung 1) liefert die Stellungen, für alle mit dem angenommenen Lastsystem möglichen mathematischen Maxima und Minima

von B, wonach sich die entsprechenden B und gesuchten Grenzwerthe nach den für jede bestimmte Belastung gültigen Formeln ergeben. Dabei ist zu beachten, ob das Lastsystem auch in entgegengesetzter Richtung auf den Träger kommen kann. Sind für eine aus 1) folgende Laststellung nicht mehr alle P auf dem Träger, so tritt für das angenommene Lastsystem kein mathematisches Maximum oder Minimum ein. In diesem Falle und wenn 1) überhaupt keine mathematische Maxima und Minima von B liefert, muss auf die Laststellungen für die Grenzwerthe aus dem allgemeinen Ausdrucke von B oder dB geschlossen werden. So drückt sich für den Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern (§§ 8, 10) die von einem beliebigen Radlastzug P_1, P_2, .. und beliebiger fester Last erzeugte Stützenreaction bei 0 aus

$$V = \mathfrak{B} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a),$$

worin $\mathfrak{B}$ constant und wonach für jede Verrückung da

$$dV = -\frac{1}{l}\sum_0^l Pda.$$

Für mathematische Maxima und Minima müsste nun sein

$$\frac{dV}{da} = -\frac{1}{l}\sum_0^l P = 0,$$

was für wirkliche Lasten P unmöglich ist. Dagegen lässt der Ausdruck für V sofort erkennen, dass alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu V beitragen und zwar umsomehr, je kleiner die a werden, wonach für die in Fig. 41 angedeutete Zusammensetzung und Richtung des Lastsystems der grösste Werth von V eintritt, wenn P_1 bei 0 anlangt, der kleinste, wenn P_5 bei l steht oder, wenn das Lastsystem entfernt werden kann, für Eigengewicht allein. Alles dies hätten wir auch aus der Formel für dV schliessen können, da dieselbe für negative da immer positive dV liefert.

b) **Berechnung bei verschiedenen möglichen Radlastzügen.** Bei Brücken lassen sich mit Rücksicht auf die in Aussicht stehende Belastung durch Locomotiven und sonstige Fahrzeuge verschiedene auf den Trägern mögliche Lastsysteme zusammen stellen. Es fragt sich, durch welche Systeme, und bei welchen Richtungen und Stellungen derselben wir in einem gegebenen Falle Grenzwerthe von B erhalten. Bei Beantwortung dieser Frage, wie beim Ansatze der Formeln für die fraglichen Grenzwerthe, können die Influenzlinien

gute Dienste leisten, auch ohne ihre Verzeichnung zu praktischen Berechnungen.

Die Lasten liefern im Allgemeinen auf gewissen Strecken positive, auf andern negative Beiträge zu B; wir nannten erstere *positive Beitragsstrecken*, letztere *negative Beitragsstrecken*. Natürlich können die einen oder andern auch wegfallen. Derjenige Punkt i einer Strecke, in welchem angreifend eine Last P einen numerisch grösseren Beitrag zu B als in allen andern Punkten jener Strecke liefert, wurde Influenzpunkt der letzteren genannt (Fig. 42). Ihm hat man in praktischen Fällen die Last von den Streckengrenzen aus zu nähern, wenn ihr Beitrag zu B wachsen soll. Es müssen also bei Berechnung eines Grenzwerthes von B die Lastsysteme um so ungünstiger wirken, jemehr mit denselben möglichst grosse Lasten auf die zugehörigen Beitragsstrecken und möglichst dicht um deren Influenzpunkte gelangen, während die Beitragsstrecken entgegengesetzten Sinnes von Lasten möglichst frei bleiben. Demnach werden je nach der Lage des Influenzpunktes auf seiner Strecke und den verfügbaren Fahrzeugen besonders zwei verschiedenartige Lastsysteme in Frage kommen:

1) *Ein Zug I mit möglichst grossen Lasten von beiden Seiten möglichst dicht um ein Rad 0, aus Locomotiven beispielsweise so gebildet, dass alle 0 nicht enthaltenden Locomotiven mit den Schloten gegen dieses Rad stehen* (Fig. 44);

2) *ein Zug II mit möglichst grossen Lasten möglichst dicht beim Vorderrade 0, aus Locomotiven beispielsweise so zusammengestellt, dass alle Locomotiven mit den Schloten nach der gleichen Richtung 0 weisen* (Fig. 45).

Kommen verschiedene Fahrzeuge vor, so hat man die Züge aus den denkbar ungünstigsten zu bilden. In zweifelhaften Fällen ist zu probiren, was z. B. sehr leicht mit Hülfe der Influenzlinien geschehen kann.

Der Zug I mit Rad O überm Influenzpunkt i wird gewöhnlich am ungünstigsten wirken, wenn die Beitragsstrecke zu beiden Seiten von i liegt (Fig. 46), der Zug II mit Vorderrad O über i, wenn die Beitragsstrecke nur auf einer Seite ihres Influenzpunktes liegt (Fig. 47). Im letzteren Falle kann über die Richtung des Zugs kein Zweifel bestehen, da er mit O über i nur auf eine Art die fragliche Beitragsstrecke belastet; im ersteren wird im Allgemeinen eine Last P bei gleicher Entfernung von i auf der einen Seite dieses Punktes einen grösseren Beitrag liefern wie auf der andern (Fig. 46), und kommen weiter die Streckenlängen und Zusammensetzung des Lastzugs in Be-

tracht, sodass für möglichst genaue Berechnungen wenn nöthig beide Zugrichtungen zu probiren wären.

In vielen Fällen lassen schon die allgemeinen Formeln für B auf die Grenzen und Influenzpunkte der Beitragsstrecken sowie auf die ungünstigsten Zusammensetzungen und Richtungen der Lastsysteme schliessen. Nach der oben angeschriebenen Formel für V beispielsweise erhält man den grössten Werth von $B = V$, wenn Zug II von l nach 0 fahrend mit dem Vorderrade O bei 0 anlangt, den kleinsten für Eigengewicht allein.

Liegt die Beitragsstrecke zwar nicht vollständig aber doch zum weitaus gröfsten Theile auf einer Seite ihres Influenzpunktes i (Fig. 48), so kommt es sehr oft vor, dass Zug II mit Rad O über i ungünstiger wirkt als Zug I, weil eben auch mit letzterem keine Räder auf die kleinere Theilstrecke gelangen oder doch nur an Stellen, wo der Beitrag gering ausfällt, während mit Zug II die grössere Theilstrecke ungünstiger belastet werden kann. Dies lässt sich in speziellen Fällen immer leicht beurtheilen.

Das Lastsystem für eine Beitragsstrecke ist natürlich möglichst so zu begrenzen, dass nicht Lasten auf angrenzende Beitragsstrecken entgegengesetzten Sinnes gelangen, doch kann es mitunter ungünstiger sein, eine Last auf einer Beitragsstrecke entgegengesetzten Sinnes zu lassen, als eine andernfalls nöthige weitgreifende Aenderung des Lastsystems vorzunehmen (Fig. 49). Man rechnet in immer zulässiger Weise noch etwas ungünstiger als der Wirklichkeit entspricht, wenn man die auf Beitragsstrecken entgegengesetzten Sinnes gerathenen Lasten bei der Berechnung von B einfach unberücksichtigt lässt. Sind Beitragsstrecken gleichen Sinnes durch solche entgegengesetzten Sinnes getrennt, so ist bei der Berechnung des den Ersteren entsprechenden Grenzwerthes auf jeder derselben ein besonderes Lastsystem anzunehmen und für sich zu placiren.

Hat man ein Lastsystem nach den besprochenen Gesichtspunkten gewählt und vorläufig placirt, so läfst sich noch das unter a) erwähnte Verfahren darauf anwenden. Dabei zeigt sich jedoch in fast allen Fällen, dass die angenommene Stellung wirklich die ungünstigste war. Sollte aber auch a) eine etwas abweichende Stellung ergeben, so wird mit dieser nur selten eine wesentliche Aenderung von B eintreten. Man wird also gewöhnlich auf die nachträgliche Anwendung von a) verzichten oder nur probeweise Gebrauch davon machen. —

c) **Berechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.** Wird

die bewegte Last als gleichmässig vertheilt angesehen, so entstehen die Grenzwerthe von B, wenn man das einemal nur die positiven, das anderemal nur die negativen Beitragsstrecken durch jene belastet annimmt. Die Formeln für die Grenzwerthe folgen aus dem allgemeinen Ausdrucke für B, wenn für die bewegten Lasten auf den ergriffenen Strecken $P = p\,da$ gesetzt wird (§ 5), unter p die Belastung pro Längeneinheit verstanden. Dabei lassen sich auch verschiedene p der einzelnen Beitragsstrecken berücksichtigen.

Ist der Verlauf der Influenzlinie für B bekannt, so kann dies die Herleitung der Grenzwerthe wesentlich erleichtern. Es seien F_1, F_2 die algebraischen Summen der Influenzflächen des einen und anderen Sinnes, $\mathfrak{B}$ der Beitrag der festen Last allein, dann hat man die Grenzwerthe von B

$$(3)\qquad B_1 = \mathfrak{B} + pF_1, \qquad B_2 = \mathfrak{B} + pF_2.$$

Soll p nicht anf allen Strecken einerlei Sinns als gleich gross gelten, so treten an Stelle dieser Gleichungen

$$(4)\qquad B_1 = \mathfrak{B} + \sum_1 pF, \qquad B_2 = \mathfrak{B} + \sum_2 pF,$$

worin die Summen $\sum$ alle Strecken des einen und andern Sinnes umfassen. Wird p für beide Grenzwerthe und alle belasteten Beitragsstrecken als gleich angenommen, die gesammte Influenzfläche $F_1 + F_2 = F$ gesetzt und der durch die Verkehrsbelastung des ganzen Trägers allein bedingte Werth von B mit B_p bezeichnet, dann folgt durch Addition der zwei ersten Ausdrücke

$$(5)\qquad B_1 + B_2 = 2\,\mathfrak{B} + pF = 2\,\mathfrak{B} + B_p$$

und abgesehen vom Beitrage der festen Last

$$B_1' + B_2 = pF = B_p.$$

Liegt die ganze Influenzfläche auf einer Seite der Abscissenaxe, so hat man

$$(6)\qquad B_1 = \mathfrak{B} + pF, \qquad B_2 = \mathfrak{B}.$$

Dies gilt also immer, wenn alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu B beitragen.

Wird unter den Voraussetzungen der Gleichung 5) $\mathfrak{B}$ lediglich durch ein auf die ganze Trägerlänge (oder doch alle beitragenden Strecken) gleichmässig vertheiltes Eigengewicht von g pro Längeneinheit erzeugt und soll Letzteres nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift (womit das

Eigengewicht ganz wie eine auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last wirkt), dann hat man nach § 11, 2) $\mathfrak{B} = \frac{g}{p} B_p$, womit aus 5)

$$B_1 + B_2 = 2\,\mathfrak{B} + \frac{p}{g}\,\mathfrak{B} = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{B} \tag{7}$$

und speziell wenn ein Grenzwerth für Eigengewicht allein eintritt, mit $B_2 = \mathfrak{B}$

$$B_1 = \frac{q}{g}\,\mathfrak{B} \tag{8}$$

unter $q = g + p$ die Totalbelastung per Längeneinheit verstanden. Diese Gleichungen können eventuell dazu dienen, einen Grenzwerth aus dem andern und dem Werthe für Eigengewicht allein zu berechnen oder Proben vorzunehmen. Gleichung 7) zeigt, dass für $\mathfrak{B} = 0$ die beiden Grenzwerthe numerisch gleich und von verschiedenen Vorzeichen sind.

In manchen Fällen lassen sich die Formeln für gleichmässig vertheilte bewegte Last durch Näherungen vereinfachen, insbesondere dann, wenn die Influenzlinie für B innerhalb des Trägers die Abscissenaxe durchschneidet. Geschieht dies bei z zwischen den beliebigen benachbarten Knotenpunkten c und v, bei welchen die Influenzlinie die Ordinaten cc_1 und vv_1 hat, so erhält man etwas zu ungünstige Grenzwerthe, wenn das einemal die Gerade vc_1 anstatt zc_1 oder v für z, das andremal die Gerade cv_1 an Stelle von zv_1 oder c für z verwendet wird. Angenommen beispielsweise, die Influenzlinie verlaufe wie in Fig. 50; dann sind die genauen Grenzwerthe

$$B_1 = \mathfrak{B} + p \cdot \overline{cc_1}\,\frac{z}{2}, \qquad B_2 = \mathfrak{B} + p \cdot \overline{vv_1}\,\frac{l-z}{2}.$$

Setzen wir nun im ersten Falle etwas zu gross $z = v$, im zweiten etwas zu klein $z = c$, so folgen als etwas zu ungünstige Näherungswerthe

$$B_1 = \mathfrak{B} + p \cdot \overline{cc_1}\,\frac{v}{2}, \qquad B_2 = \mathfrak{B} + p \cdot \overline{vv_1}\,\frac{l-c}{2}.$$

Dies Vorgehen kann sich besonders dann empfehlen, wenn der Ausdruck von z complicirte Ausdrücke der B bedingt.

Eine annähernd gleichmässig vertheilte Verkehrslast stellt bei Dachbindern der Schneedruck, bei Strassenbrücken die Belastung durch *Menschengedränge* dar, welche je nach der vorausgesetzten Dichtigkeit des Gedränges von 300 bis 500 kg pro qm angenommen wird. Soll die Berechnung der Grenzwerthe von B auch in Fällen für gleichmässig vertheilte bewegte Last durchgeführt werden, wenn die

Letztere in Wirklichkeit concentrirte Lasten enthält, dann sind die Belastungen p per Längeneinheit so zu wählen, dass damit gleiche oder eher ungünstigere B als mit den wirklichen Lasten entstehen. Diese *Lastaequivalente* p können auch bei einem bestimmten Träger sowohl für verschiedene B als für die zwei Grenzwerthe desselben B wesentlich verschieden sein. (Siehe u. A. die Beispiele 7, 8, 26, 29, 88, 105). Trotzdem findet man immer noch häufig bei bestimmter Spannweite für alle Trägerarten, Trägersysteme und Grössen B ein und dasselbe p verwendet, zum Theil wohl deshalb, weil zuverlässige Angaben über die p nur wenig vorliegen. (Man sehe darüber: *Winkler*, Centralbl. d. Bauverwalt. 1884; *Engesser*, Deutsche Bauz. 1879; *Schäffer*, Deutsche Bauz. 1876; *Laissle* u. *Schübler*, Bau d. Brückenträger I, Stuttgart 1876; *Fränkel*, Civilingenieur 1875; *Heinzerling*, Zeitschr. f. Bauw. 1875). Dann sollte man aber mit den wirklichen Lasten rechnen. Der Einwand, dass Radlasten, Radstand u. s. w. wechsele, während die p Vergleiche zulassen, trifft nur in beschränktem Masse zu, weil eben dasselbe p in gewissen Fällen ungünstig, in andern viel zu günstig sein kann. Auch lassen sich anstatt normaler p normale Lastzüge verwenden. Der Verfasser ist der Ansicht, dass der Hauptgrund für die Bevorzugung der Rechnung mit gleichmässig vertheilter Verkehrslast gegenüber derjenigen mit Radlastzügen in der grösseren Schwierigkeit der Letzteren liegt, welche er deshalb in diesem Werke möglichst zu heben sucht. Will man trotzdem bei Eisenbahnbrücken mit Lastaequivalenten rechnen, so reichen die bisher hierfür vorgeschlagenen Methoden nicht aus und sind besondere Formeln abzuleiten, was in der Beispielsammlung geschehen soll. (Siehe die Aufgaben 29, 30, 32, 35, 36, 48 und die am Schlusse der Aufgabe 29 erwähnten 24 Beispiele).

d) **Berechnung bei vorausbestimmten Knotenpunktslasten.** Dies Verfahren wurde für die Stabkräfte von Fachwerken durch *A. Ritter* eingeführt (Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstr., I. Aufl. Hannover 1868), es ist aber seine Verwendung auch in andern Fällen nicht ausgeschlossen. Man denkt sich alle Lasten in den Knotenpunkten concentrirt und die vom Eigengewicht allein sowie von der Verkehrslast herrührenden Knotenpunktslasten von vornherein festgestellt. Sollen nun die Grenzwerthe von B ermittelt werden, so denkt man sich zunächst den ganzen Träger total belastet, leitet den entsprechenden Ausdruck für B allgemein oder numerisch ab und ordnet ihn so, dass der Einfluss der Verkehrslast für jeden Knotenpunkt durch ein Glied von leicht erkennbarem

Vorzeichen dargestellt ist. Man erhält dann das grösste positive B (oder kleinste negative B), wenn man alle Verkehrslasten von negativem Einflusse weglässt, das grösste negative B (oder kleinste positive B), wenn man alle Verkehrslasten von positivem Einflusse weglässt und den Werth von B für Eigengewicht allein, wenn keine Verkehrslast berücksichtigt wird. In den Ausdrücken für die Grenzwerthe müssen also alle von der Verkehrskraft herrührenden Beiträge je von gleichem Vorzeichen sein.

Das Verfahren lässt sich an einem einfachen Beispiele klar machen. Für den in Fig. 51 angedeuteten Balkenträger mögen die G vom Eigengewicht, die K von der Verkehrslast herrühren. Dann hat man für die am Trägerstücke links vom Schnitt s wirkenden äusseren Kräfte die Momentengleichung in Hinsicht des Punktes d

$$-Vv + (G_0 + K_0)\, v + (G_1 + K_1)\left(v + \frac{l}{4}\right) + Yy = 0,$$

woraus wegen

$$V = (G_0 + K_0) + \frac{3}{4}(G_1 + K_1) + \frac{1}{2}(G_2 + K_2) + \frac{1}{4}(G_3 + K_3)$$

die Stabkraft Y:

$$Y = \frac{1}{y}\left[-\frac{l+v}{4} G_1 + \frac{v}{2} G_2 + \frac{v}{4} G_3 - \frac{l+v}{4} K_1 + \frac{v}{2} K_2 + \frac{v}{4} K_3\right].$$

Hiernach erhält man den Beitrag des Eigengewichts allein

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{y}\left(-\frac{l+v}{4} G_1 + \frac{v}{2} G_2 + \frac{v}{4} G_3\right)$$

und die Grenzwerthe

$$Y = \mathfrak{Y} + \frac{1}{y}\left(\frac{v}{2} K_2 + \frac{v}{4} K_3\right), \qquad Y = \mathfrak{Y} - \frac{1}{y}\,\frac{l+v}{4} K_1.$$

Die Längen v, y können abgegriffen oder berechnet werden.

Für den in § 8 betrachteten Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern hat man die Verticalkraft und das Moment in einem beliebigen Schnitte s

$$V_s = \mathfrak{V}_s - \frac{1}{l}\sum_0^s Ke + \frac{1}{l}\sum_s^l K(l-e),$$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^s Ke + \frac{u}{l}\sum_s^l K(l-e),$$

worin $\mathfrak{V}_s$, $\mathfrak{M}_s$ die Beiträge der festen Last und u die Abscisse des

Drehpunkts für das Moment bedeuten. Aus der ersten Gleichung folgen die Grenzwerthe von V_s

$$V_s = \mathfrak{V}_s + \frac{1}{l}\sum_s^l K(l-e), \qquad V_s = \mathfrak{V}_s - \frac{1}{l}\sum_0^s Ke.$$

Die Grenzwerthe von $\mathfrak{M}_s$ hängen von der Lage des Drehpunkts ab, sie treten für $0 < u < l$ bei Totalbelastung und Eigengewicht allein ein und sind für $u < 0$ oder $u > l$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_s^l K(l-e), \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^s Ke.$$

Man pflegt bei Berechnung mittelst voraus bestimmter Knotenpunktslasten die Letzteren auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten zu bestimmen, d. h. zu setzen

$$G = g\lambda, \qquad K = p\lambda,$$

unter g, p die Belastungen per Längeneinheit, unter λ die mittlere Entfernung des fraglichen Knotenpunkts von den nach links und rechts zunächst folgenden Knotenpunkten (mit Belastung) verstanden. Hierbei können natürlich im Falle concentrirter Lasten die Lastaequivalente p ebenso verschieden sein wie im Falle c), wenn auch bei den bisherigen Anwendungen des Verfahrens immer constante p verwendet wurden. Ganz vereinzelt finden sich die K auch auf Grund concentrirter Lasten P bestimmt (*Quietmeyer*, Zeitschr. d. Hannöv. Arch.- u. Ing.-Vereins 1877), was im Allgemeinen ein Umweg ist, da man mit den P direct rechnen kann.

Tragen alle Verkehrslasten P auf dem Träger in gleichem Sinne zu B bei, so müssen mittelst des betrachteten Verfahrens für statisch bestimmte B die gleichen Grenzwerthe resultiren wie mit denjenigen Lasten, auf Grund deren die Knotenpunktslasten K abgeleitet wurden. Denn da alsdann sämmtliche K oder keine in den Gleichungen für die Grenzwerthe vorkommen, so können wir nach § 10 an Stelle der K und ihrer statischen Momente sofort wieder die P und ihre statischen Momente setzen. Höhere als statische Momente kommen aber in den aus der Statik allein folgenden Gleichungen nicht vor.

Liefern die Lasten P auf dem Träger Beiträge verschiedenen Sinnes zu B, so nimmt die Berechnung mittelst voraus bestimmter Knotenpunktslasten einen plötzlichen Uebergang von total belasteten zu nur mit Eigengewicht belasteten Knotenpunkten an, wie er nach § 10 im Allgemeinen nicht eintreten kann. Die hieraus entstehenden Abweichungen gegen die genaueren Werthe nehmen bei bestimmter

Spannweite l im Allgemeinen zu mit den Werthen der λ, sie sind jedoch insofern zulässig, als sie etwas zu ungünstige Grenzwerthe bedingen. Angenommen der Schnitt der Influenzlinie mit der Abscissenaxe liege zwischen den Knotenpunkten c und v. Ist dann m der Beitrag einer Last $P = 1$ bei c und n der Beitrag einer solchen bei v, so haben wir nach § 10 für eine an beliebiger Stelle a liegende Last $P = 1$ den Beitrag

$$b = \frac{v-a}{v-c} m + \frac{a-c}{v-c} n.$$

Dies ist die Gleichung der Influenzlinie $c_1 v_1$ zwischen c und v. Wird nun ein plötzlicher Uebergang von total belasteten zu nur mit Eigengewicht belasteten Knotenpunkten angenommen, so entspricht dies bei der Berechnung des Grenzwerthes B vom Vorzeichen von m der Annahme

$$b = \frac{v-a}{c-c} m$$

und bei der Berechnung des Grenzwerthes B vom Vorzeichen von n der Annahme

$$b = \frac{a-c}{v-c} n.$$

Dies sind die Gleichungen der Geraden vc_1 und cv_1, welche jetzt an Stelle von zc_1 und zv_1 treten (siehe z. B. Fig. 50). Wir müssen also bei der Berechnung mittelst voraus bestimmter Knotenpunktslasten $K = p\lambda$ genau dieselben Grenzwerthe erhalten, welche sich nach dem unter c) angeführten Näherungsverfahren mit denjenigen p ergeben, auf Grund deren die K berechnet wurden. Voraussetzung ist, dass die K den allgemeinen Längen λ entsprechend gewählt werden, was nicht immer zutrifft (§ 29).

e) **Berechnung mit Anwendung von Influenzlinien.** Wir haben unter b) c) gesehen, wie die Influenzlinien bei Ableitung der Grenzwerthe beliebiger Grössen B zweckmässige Verwendung finden können. Dabei kam in erster Linie die Ableitung von Formeln in Frage, mittelst welcher dann die Zahlenrechnungen ohne Kenntniss jener Linien ausführbar sind. Es steht jedoch natürlich nichts im Wege, die Influenzlinien auch bei numerischen Berechnungen zu verwerthen, da nach § 11 für irgendwelche Lasten P an beliebigen Stellen a, wenn b die Ordinaten der Influenzlinie daselbst bedeuten,

$$B = \sum Pb$$

und für eine auf eine Strecke gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit

$$B = pF$$

unter F die positive oder negative Influenzfläche auf dieser Strecke verstanden. Die Influenzlinie braucht für solche Zwecke nur durch numerische Berechnung weniger Punkte festgelegt zu werden. Die unter b) c) und in § 11 angeführten allgemeinen Gesichtspunkte bleiben geltend. Das Verfahren kann besonders dann in Frage kommen, wenn die Ableitung von Formeln für die Grenzwerthe zu umständlich oder der eventuellen seltenen Verwendung wegen nicht angebracht erscheint, die fraglichen Grenzwerthe aber doch möglichst genau berechnet werden sollen.

f) **Berechnung für vorausgewählte Belastungsfälle.** Auch diese Methode kann in Ermangelung geeigneter Formeln für die Grenzwerthe berechtigt sein, wenn die Belastungsfälle so gewählt werden, dass die wirklich vorkommenden nicht wesentlich ungünstigere B als die angenommenen erzeugen können. Als Grenzwerthe von B sind diejenigen berechneten B anzusehen, zwischen welchen alle für die übrigen Belastungsfälle gefundenen liegen. Die Berechnung ist für bewegte Radlastzüge, gleichmässig vertheilte bewegte Last und vorausbestimmte Knotenpunktslasten durchführbar. Je nach der Anzahl und Auswahl berücksichtigter Belastungsfälle lässt sich jede gewünschte Genauigkeit erreichen. Zu beachten ist, dass die Voraussetzungen der Theorie ohnehin nie vollständig erfüllt sind.

Für den in Fig. 52 verzeichneten statisch unbestimmten Bogenträger beispielsweise, welcher einer Eisenbahnbrücke angehören mag, könnte man die Grenzwerthe aller verlangten B mit fast immer genügender Genauigkeit erhalten, wenn ein möglichst schwerer Lastzug II zunächst mit dem Vorderrad O bei 0 über den ganzen Träger gestellt und dann je um eine Feldlänge nach l hin zurückgerückt würde. Man erhielte damit bei Einrechnung der Belastung durch Eigengewicht allein 9 verschiedene Belastungsfälle, welche 17 verschiedene Werthe der B liefern, wovon je 9 aus der Symetrie folgen. Eventuell könnten noch Belastungsfälle berücksichtigt werden, bei welchen der mittlere Theil des Trägers oder zwei äussere Strecken belastet wären. Da der angedeutete Träger sehr häufig vorkommt, so würden freilich direct verwendbare Formeln für die Grenzwerthe vorzuziehen sein.

Bei Berechnung der älteren Coblenzer Brücke (*Hartwich*, Zeitschr. f. Bauw. 1864) theilte man die ganze Spannweite $l = 98{,}0775$ m der Bogenträger mit Endgelenken in 20 gleiche Theile, liess die gleichmässig vertheilt gedachte bewegte Last je um einen solchen Theil

vorrücken und trug für jeden der entstehenden 21 Belastungsfälle die Curven der Gurtungsbeanspruchungen und Transversalkräfte auf. Die Grenzwerthe dieser Grössen wurden aus den entsprechenden Umhüllungscurven entnommen, welche als Curven der Maxima und Minima dienten (§ 9). Für die Fachwerkbogen von 160 m Spannweite mit Endgelenken der Dourobrücke in Portugal (*Seyrig*, Mém. de la soc. des ingénieurs civils 1878; vergl. *Weyrauch*, Zeitschr. f. Bauk. 1879) wurden nur 4 Belastungsfälle in Betracht gezogen: Eigengewicht allein, Totalbelastung der ganzen Brücke, einseitige Belastung bis zur Trägermitte und Belastung der mittleren Strecken von 80 m Länge. Die beiden genannten Brücken dienen Eisenbahnen. Bei den Bogenfachwerken von 36,75 m Spannweite ohne Gelenke der Neue-Mainzerstrassenbrücke zu Frankfurt a. M. (*Schmick*, Zeitschr. f. Bauk. 1879), beschränkte man die Berechnung auf 2 Belastungsfälle, Totalbelastung und einseitige Belastung bis zur Trägermitte, indem man dem Umstande Rechnung trug, dass bei grösseren Strassenbrücken des bedeutenden Eigengewichts wegen die Verkehrslast verhältnissmässig geringe Aenderungen der Beanspruchungen bedingt (womit nebenbei bemerkt auch die Vermeidung von Gelenken zur Fixirung der Stützlinie begründet wurde). Für die Frankfurter Brücke war $g:p = 3{,}25$.

Selbstverständlich können auch bei dem hier betrachteten Verfahren die Influenzlinien gute Dienste leisten, da man nach Auftragen derselben die entsprechende Grösse B für beliebige Belastungsfälle schnell entnehmen kann. Die Verwendung der Influenzlinien wäre also um so eher angezeigt, je mehr Belastungsfälle man berücksichtigen will und je umständlicher die sonst nöthige Berechnung der B ist. — (Beispiele 4—12, Aufgaben 9—15).

II. Abschnitt.

Ebene Fachwerke beliebiger Art.

Den im ersten Abschnitte vorgeführten Begriffen, Beziehungen und Methoden für beliebige ebene Träger sollen hier diejenigen beigefügt werden, welche die im vorliegenden Werke besonders interessirenden Trägersysteme betreffen. Wir gehen dabei soweit, als die Festsetzungen unabhängig von der Trägerart sind, während in späteren Abschnitten besondere Trägerarten zu betrachten sein werden.

§ 13. Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Als Träger wurde in § 2 ein materielles System bezeichnet, welches zur Aufnahme und Uebertragung von Lasten oder andern äussern Activkräften auf ausserhalb desselben gelegene Stützen dient. Besteht der Träger aus lauter Stäben mit geraden Axen (Schwerlinien), welche nur an den Enden mit einander verbunden sind, dann soll derselbe *Fachwerkträger* oder kurz *Fachwerk* heissen. Die Verbindungsstellen der Stäbe werden *Knoten* genannt. Für die Theorie der Fachwerke pflegt man folgende Voraussetzungen zu machen: a) die Stabaxen, welche bei einem Knoten zusammentreffen, schneiden sich in einem Punkte, dem *Knotenpunkte* daselbst; b) alle äusseren Kräfte (mit Einschluss des Eigengewichts) greifen in Knotenpunkten an oder wirken in Stabaxen; c) die Knoten sind als reibungslose Gelenke um die Knotenpunkte aufzufassen.

Unter diesen Voraussetzungen können alle Stäbe nur axialen Zug oder Druck erleiden; denn jede excentrische Beanspruchung eines Stabes würde mindestens bezüglich eines der begrenzenden Knotenpunkte ein Moment und damit eine Drehung des Stabes um den Knotenpunkt bewirken, während das Gleichgewicht allein untersucht wird. Da sich axiale *Stabkräfte* gleichmässig auf den Querschnitt vertheilen, so wird die Beanspruchung pro Quadrateinheit, die *Stabspannung*, für alle Elemente eines Querschnitts gleich gross und bei

prismatischen Stäben mit nur an den Enden angreifenden äusseren Kräften auch für alle Elemente beliebiger Querschnitte, es ist bei geeigneter Wahl dieser Stabspannungen die theoretisch beste Ausnutzung des Materials wenigstens für eine bestimmte Belastung ermöglicht.

Die Theorie der Fachwerke wird selbstverständlich um so zuverlässigere Resultate für die Praxis liefern, je mehr die Wirklichkeit den erwähnten Voraussetzungen entspricht. Vollständig wird dies nie der Fall sein, schon deshalb nicht, weil wir keine reibungslosen Gelenke herstellen können und das Eigengewicht nicht allein in den Knotenpunkten angreift. Bei reibenden Gelenken oder Nietverbindungen bilden die Stabkräfte im Allgemeinen Momente um die Knotenpunkte, die Stäbe sind nicht mehr in allen Elementen eines Querschnitts gleich stark beansprucht, wir erhalten neben den bei reibungslosen Gelenken vorhandenen *Primärspannungen* noch gewisse, durch Biegungen bedingte *Secundärspannungen*. Dieselben lassen sich nach einem Verfahren von *Manderla* ermitteln (*Manderla*, Allgem. Bauzeit. 1880; *Winkler*, Theorie d. Brücken II, Wien 1881; *Weyrauch*, Aufgaben z. Theorie elast. Körper, Leipzig 1885; *Landsberg*, Hannöv. Zeitschr. 1885 u. 1886; *Müller-Breslau*, Hannöv. Zeitschr. 1886), doch bis jetzt nicht mit solcher Einfachheit, dass bei Berechnungen der Praxis Gebrauch davon gemacht worden wäre. In diesem Werke, welches nur statisch bestimmte Träger behandelt, bleiben die statisch unbestimmten Secundärspannungen unberücksichtigt.

Wir betrachten nur *ebene Fachwerke*, für welche alle Stabaxen und äusseren Kräfte in der gleichen Ebene liegen, die also bei Berücksichtigung des Eigengewichts nur Verticalebene sein kann. Bilden die Axen der Stäbe, welche einen solchen Träger nach oben und nach unten begrenzen, zusammenhängende Linienzüge, so werden die betreffenden Stabfolgen *obere Gurtung* und *untere Gurtung* genannt. Das Stabsystem zwischen beiden Gurtungen heisst *Füllung*. Je nach dem Verlaufe der Gurtungen unterscheidet man verschiedene *Fachwerkformen*, je nach der Gliederung der Füllung verschiedene *Fachwerksysteme* (§ 2). Balkenträger und Bogenträger (§ 8), welche als Fachwerke angeordnet sind, sollen *Balkenfachwerke* und *Bogenfachwerke* heissen.

Stehen *Füllungsglieder* vertical, so pflegt man dieselben als *Verticalen* zu bezeichnen, während die zwischen zwei Verticalen liegenden *Diagonalen* genannt werden. Es kommt häufig vor, dass gewisse Füllungsglieder nur für eine Art Beanspruchung (Zug oder Druck)

widerstandsfähig gemacht werden. Will man z. B. die Diagonalen aus Seilen, Ketten oder Flacheisen herstellen, so nützen sie nichts oder der Zerknickungsgefahr wegen nur wenig in Belastungsfällen, in welchen Druck auf sie käme. Es lässt sich dann dadurch helfen, dass man jeder Diagonale, welche Druck erleiden könnte, eine zweite von anderer Stellung beigibt, welche in Wirksamkeit tritt, wenn jene zu wirken aufhört, in diesem Falle aber Zug empfängt. Von den zwei zusammengehörigen Diagonalen heisst diejenige, welche bei Belastung durch das Eigengewicht allein wirkt, *Hauptdiagonale*, die andere *Gegendiagonale*. Beiderlei Diagonalen nennt man *Zugdiagonalen*, wenn sie nur Zug aufnehmen können, *Druckdiagonalen*, wenn sie nur Druck aufnehmen können. Letztere kommen bei Eisenconstructionen nicht vor.

Man hat es mit einem *Fachwerk einfachen Systems* zu thun, wenn Kreuzungen zwischen gleichzeitig in Wirksamkeit befindlichen Füllungsgliedern nicht vorkommen, mit einem *Fachwerke n-fachen Systems*, wenn die Füllungsglieder oder doch eins über das andere solcher, welche einen zusammenhängenden Linienzug bilden, durch andere, gleichzeitig in Wirksamkeit befindliche Füllungsglieder in n Abschnitte getheilt werden. Die Entwicklungen der Fachwerkstheorie sind an die Voraussetzung geknüpft, dass Verbindungen in den Kreuzungspunkten der Füllungsglieder nicht hergestellt werden. Denken wir uns jedoch derartige Verbindungen hinzu, um so die Füllung als Ganzes wirken zu lassen, dann soll der entstehende Träger ein *Gitterträger* heissen. Wird das *Gitter* durch eine Blechwand ersetzt, dann erhalten wir einen *Blechträger*. — Manche Autoren verstehen unter Gitterträgern alle Fachwerkträger und beschränken letzteren Namen auf solche Fachwerke, bei welchen Verticalen und Diagonalen alterniren. In diesem Falle besteht hinsichtlich der Wirkungsweise kein Unterschied zwischen Fachwerkträgern und Gitterträgern.

Der Fachwerkträger ist aus dem vollen Balken und Bogen dadurch hervorgegangen, dass man das Material den örtlich verschiedenen Beanspruchungen anzupassen suchte. So entstanden zunächst Blechträger, Kastenträger und Gitterträger. Mit fortschreitender Erkenntniss der wirkenden Kräfte wurden die Querschnitte der einzelnen Füllungsglieder selbstständiger ausgebildet und besondere Formen für Zug und Druck gewählt. Dabei ergab sich das Bedürfniss, die Theorie schärfer durchzuführen, was zu immer weiterer Auflösung der Füllung und schliesslich zu den statisch bestimmten Systemen führte.

Auch statisch unbestimmte *Trägerarten* suchte man durch constructive Mittel in statisch bestimmte zu verwandeln (Bogen mit drei Gelenken, continuirliche Gelenkträger etc.), da man den Einfluss der Temperaturänderungen und kleiner Stützenbewegungen auf die Beanspruchungen erkannt hatte und möglichste Zuverlässigkeit der Berechnungen erstrebte. Hand in Hand mit der Ausbildung des Trägersystems ging eine Vervielfältigung der Trägerformen, wobei statische, constructive und ökonomische Gesichtspunkte massgebend waren. Neben die ursprünglichen Formen mit parallelen Gurtungen, bei welchen diese wie die Füllungsglieder sehr verschieden beansprucht werden, traten Formen gleicher Gurtungsbeanspruchungen (Laves'sche Träger, Pauli-sche Träger), und mit Rücksicht auf die als zweckmässig erkannte Querschnittsbildung, Annäherungen an die Grenzform gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen (Schwedlerträger, Ellipsenträger etc.). Auch in andern Fällen suchte man grössere Steifigkeit der Construction und geringere Längen gedrückter Glieder durch Zusammenführen der Gurtungen an den Auflagern zu erreichen. Der Materialverbrauch für die verschiedenen Träger wurde auf Grund theoretischer Gewichtsformeln (§ 3) und praktischer Ausführungen verglichen. Die hierbei gewonnenen Zahlen gestatten eine Beurtheilung vom ökonomischen Standpunkte bei gleichzeitiger Rücksicht auf die Verhältnisse der Herstellung, Aufstellung und späteren Unterhaltung. In neuester Zeit treten auch ästhetische Rücksichten mehr in den Vordergrund, während das weitere Streben dahin geht, bei möglichster Vervollkommnung der Theorie, sowie gründlicher Prüfung des Materials und ausgeführter Constructionen die Verhältnisse der Letzteren mit den Voraussetzungen der Ersteren möglichst in Einklang zu bringen.

§ 14. Statisch bestimmte und statisch unbestimmte, stabile und labile Fachwerke.

Ein Fachwerk von k Knotenpunkten und s wirksamen Stäben sei nach beliebigen Bewegungen zum Gleichgewichte gelangt. Bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystems in fester Lage gegen die anfängliche Gruppirung der Knotenpunkte möge ein Knotenpunkt m vom Orte x_m, y_m nach $x_m + \xi_m$, $y_m + \eta_m$ (Fig. 53) und der mit ihm durch den Stab der anfänglichen Länge l verbundene Knotenpunkt n von x_n, y_m nach $x_n + \xi_n$, $y_n + \eta_n$ gerathen sein. Bezeichnen dann X_m, Y_m die resultirenden Componenten der in m angreifenden äussern Kräfte in den Richtungen x, y und S, λ die Beanspruchung

und Längenänderung des Stabes mn, wobei ziehende S als positiv gelten mögen, so lauten die Bedingungen für's Gleichgewicht an m

$$(1) \quad \begin{cases} X_m + \sum_m S \dfrac{x_n + \xi_n - x_m - \xi_m}{l + \lambda} = 0 \\ Y_m + \sum_m S \dfrac{y_n + \eta_n - y_m - \eta_m}{l + \lambda} = 0, \end{cases}$$

worin die Summen $\sum$ sich auf alle in m eintreffenden Stäbe beziehen. Für λ hat man

$$(2) \quad (l + \lambda)^2 = (x_n + \xi_n - x_m - \xi_m)^2 + (y_n + \eta_n - y_m - \eta_m)^2.$$

Bei k Knotenpunkten liefert uns die Statik $2k$ Gleichungen der Formen 1), welche durch die darin vorkommenden Grössen erfüllt sein müssen und zur Bestimmung von Unbekannten dienen können.

Ein Fachwerk heisst *statisch bestimmt* oder *statisch unbestimmt*, je nachdem bei bekannten äussern Activkräften und Gleichgewichtslagen der Knotenpunkte die Stützenreactionen und Stabkräfte durch die Statik allein bestimmt sind oder nicht; es heisst *stabil* oder *labil*, je nachdem, abgesehen von verschwindend kleinen elastischen Formänderungen, die relative Lage der Knotenpunkte zu einander und zu den Stützen eine feste oder mit den äussern Kräften veränderliche ist.

Von den Stützenreactionen mögen v durch je eine Componente, u durch je zwei Componenten bestimmt sein, dann ist die Anzahl der unabhängigen Reactionscomponenten überhaupt

$$r = v + 2u.$$

Denkt man sich nun die äussern Activkräfte und Knotenpunktslagen gegeben und damit nach 2) auch die Längenänderungen λ bestimmt, so bleiben in den $2k$ Gleichungen 1) nur die r Reactionscomponenten und s Stabkräfte unbekannt. Für statisch bestimmte Fachwerke muss also sein

$$(3) \quad 2k \geq r + s.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so liefert uns die Statik zur Berechnung aller Stabkräfte und Stützenreactionen nicht genug Gleichungen, der Träger kann nur mit Zuhilfenahme ausserstatischer Beziehungen berechnet werden, welche uns die Elasticitätstheorie liefert.

Setzen wir die Knotenpunktslagen nicht als bekannt voraus, so bestehen die Gleichungen 1) zwischen Stabkräften, Stützenreactionen und Grössen ξ, η, welche die Lagen der Knotenpunkte bestimmen. Soll jedoch der Träger stabil sein, also nur elastische Formänderungen

zulassen, so verschwinden die ξ, η, λ gegen die Grössen x, y, l, womit aus 1) die folgenden Gleichungen entstehen

$$(4)\quad \begin{cases} X_m + \sum_m S \dfrac{x_n - x_m}{l} = 0 \\ Y_m + \sum_m S \dfrac{y_n - y_m}{l} = 0\,, \end{cases}$$

während aus 2) wegen $l^2 = (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2$ bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung gegen solche erster Ordnung wird

$$(5)\qquad l\lambda = (x_n - x_m)(\xi_n - \xi_m) + (y_n - y_m)(\eta_n - \eta_m).$$

Da nun aber den $2k$ Gleichungen 4) mit den allein noch als Unbekannten darin vorkommenden r Reactionscomponenten und s Stabkräften genügt werden muss, so folgt für stabile Fachwerke die Bedingung

$$(6)\qquad 2k \leq r + s.$$

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann reicht die Anzahl der verfügbaren Stabkräfte und Reactionscomponenten zur Befriedigung der $2k$ Gleichungen 4) nicht aus, wir müssen auf die allgemeineren Bedingungen 1) zurückgreifen und ist Gleichgewicht nur beim Zutreffen der durch die ξ, η vertretenen Lagebedingungen möglich. Aendern wir dann etwas an den äussern Kräften, so werden sich mit dem neuen Systeme der Bedingungsgleichungen 1) auch die dadurch mitbestimmten Stablagen ändern, es tritt Verschiebung und eventuell ein neuer Gleichgewichtszustand ein, wir haben ein labiles Fachwerk.

Die Erfüllung der Bedingung 3) oder 6) genügt indessen nicht, ein Fachwerk statisch bestimmt oder stabil zu machen, es kommt nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Anordnung der Stäbe und Reactionscomponenten an. So könnte das Balkenfachwerk Fig. 54 bei lauter gleichzeitig widerstandsfähigen Stäben wegen $k = 18$, $r = 3$, $s = 33$ nach 3) statisch bestimmt sein. Es ist aber nicht der Fall und gelingt auf keine Art, sämmtliche Stabkräfte und Stützenreactionen aus statischen Gesetzen allein zu bestimmen. Probirt man es, so zeigt sich, dass wir mit den verfügbaren Gleichungen links zu viel, rechts zu wenig haben, womit der Träger links labil, rechts statisch unbestimmt wird.

Zur statischen Bestimmtheit ist nöthig, dass wenigstens die $r + s$ Reactionscomponenten und Stabkräfte aus den $2k$ statischen Bedingungsgleichungen bestimmbar sind, die Stabilität verlangt, dass

mindestens diesen Gleichungen mit den $r + s$ verfügbaren Kräften genügt werden kann. Nun lässt sich jede unbekannte Kraft nur aus einer Gleichung bestimmen, in welcher sie vorkommt, und mit einer verfügbaren Kraft nur einer Gleichung genügen helfen, welche die Kraft enthält. Daher können wir aussprechen:

a) *Ein Fachwerk kann nur statisch bestimmt sein, wenn bei k Knotenpunkten die Anzahl der wirksamen Stäbe und unabhängigen Reactionscomponenten* $s + r \leq 2k$ *ist und dieselben sich den anliegenden Knotenpunkten so zuweisen lassen, dass auf jeden Knotenpunkt höchstens zwei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtung kommen. Im Grenzfalle* $s + r = 2k$ *ist statisch bestimmte Stabilität möglich, in allen andern Fällen haben wir labile Fachwerke.*

b) *Ein Fachwerk kann nur stabil sein, wenn bei k Knotenpunkten die Anzahl der wirksamen Stäbe und unabhängigen Reactionscomponenten* $s + r \geq 2k$ *ist und dieselben sich den anliegenden Knotenpunkten so zuweisen lassen, dass auf jeden Knotenpunkt mindestens zwei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtung kommen. Im Grenzfalle* $s + r = 2k$ *ist statisch bestimmte Stabilität möglich, in allen andern Fällen haben wir statisch unbestimmte Fachwerke.*

Nach a) lassen sich statisch bestimmte Fachwerke durch Zufügen von $2k - s - r$ geeigneten Stäben oder Reactionscomponenten stabil machen, ein statisch bestimmtes Fachwerk ist im Allgemeinen $(2k - r - s)$-*fach labil*, fürs Gleichgewicht desselben müssen $2k - r - s$ von einander unabhängige Lagebedingungen erfüllt sein. Nach b) lassen sich stabile Fachwerke durch Wegnahme von $s + r - 2k$ geeigneten Stäben oder Reactionscomponenten statisch bestimmt machen; ein stabiles Fachwerk ist im Allgemeinen $(s + r - 2k)$-*fach statisch unbestimmt*, zur Berechnung desselben müssen $r + s - 2k$ von einander unabhängige Gleichungen ausserhalb der Statik gewählt werden.

Da durch $s + r$ Stabkräfte und Reactionscomponenten, welche durch ebensoviel Gleichungen bestimmt sind, letzteren auch genügt wird, so folgt: c) *Ein Fachwerk, welches bei k Knotenpunkten* $s + r = 2k$ *Stabkräfte und unabhängige Reactionscomponenten besitzt, die sich aus statischen Bedingungsgleichungen bestimmen lassen* (d. h. auch ein Fachwerk, für welches bei $s + r = 2k$ wirksamen Stäben und Reactionscomponenten die Determinante des Coefficientensystems der $2k$ Gleichungen 4) nicht verschwindet, — siehe *Foeppl*, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880. S. 10; vergl. S. 8) *ist statisch bestimmt und stabil.*

Zum Nachweise der statisch bestimmten Stabilität wird man hiernach zunächst feststellen, ob $s + r = 2k$ ist. Trifft dies nicht zu, oder lassen sich die wirksamen Stäbe und unabhängigen Reactionscomponenten den anliegenden Knotenpunkten nicht so zuweisen, dass auf jeden Knotenpunkt gerade zwei Stäbe und Reactionscomponenten verschiedener Richtung kommen, dann kann das Fachwerk nicht statisch-bestimmt-stabil sein. Andernfalls hat man sich noch durch den Ansatz der Gleichungen für die $s + r$ Grössen oder auf sonstige Weise (Kräfteplan) von der Möglichkeit ihrer Berechnung aus statischen Bedingungen zu überzeugen. Hierbei dürfen, wenn jene Grössen nicht nebenbei allgemein ermittelt werden sollen, sämmtliche äussern Activkräfte (Knotenpunktslasten) beliebig gewählt oder gleich Null gesetzt werden, da dieselben als bestimmte Grössen an der Möglichkeit der Berechnung nichts ändern.

Wir wissen nach § 3, dass die Stützenreactionen eines Fachwerks von mindestens drei nicht sämmtlich parallelen Componenten abhängen müssen, wenn der Träger hinsichtlich der Stützen eine feste Lage haben soll. Ist gerade $r = 3$, so entsteht ein Balkenfachwerk mit zwei Gelenkauflagern, welches demnach im Falle statisch bestimmter Stabilität

$$s = 2k - 3$$

wirksame Stäbe enthält. Dies lässt sich noch auf andre Weise klar machen. Drei Knotenpunkte können durch ebenso viel Stäbe in feste Lagen zu einander gebracht werden. Kommt ein vierter Knotenpunkt hinzu, so sind zwei weitere Stäbe nöthig, um das System der vier Punkte in sich unverschiebbar zu machen. Für jeden folgenden Knotenpunkt erfordert die feste Verbindung mit dem Systeme zwei neue Stäbe, während ebenso viel neue Stäbe möglich werden, als bereits Stäbe vorhanden sind. Wir erhalten so folgendes Schema:

Knotenpunkte	Nöthige Stäbe	Mögliche Stäbe
1	0	0
2	1	1
3	3	3
4	5	6
5	7	10
6	9	15
:	:	:
k	$2k - 3$	$k\frac{k-1}{2}$.

Durch $2k - 3$ Stäbe lassen sich k Knotenpunkte ohne Hülfe von Reactionen in feste Verbindung zu einander bringen, während drei Reactionscomponenten nöthig sind, um dem System eine feste Lage gegen die Stützen zu geben.

Da bei statisch-bestimmt-stabilen Fachwerken allgemein $r + s = 2k$ ist, so muss für jede über $r = 3$ vorhandene Reactionscomponente ein Stab an $s = 2k - 3$ wegbleiben, wenn das Fachwerk nicht statisch unbestimmt werden soll und für jeden an $s = 2k - 3$ fehlenden Stab eine Reactionscomponente über $r = 3$ hinzutreten, wenn das Fachwerk nicht labil werden soll.

Den Fall $s = 2k - 3$ haben wir beispielsweise, wenn die Stäbe nach Art von Fig. 55 zu lauter neben einander liegenden, sich nicht überdeckenden Dreiecken angeordnet werden. Das Fachwerk ist dann bei drei nicht sämmtlich parallelen Reactionscomponenten immer statisch bestimmt stabil. Bringen wir eine weitere Reactionscomponente hinzu (Fig. 52, 56, 57), so wird der Träger einfach statisch unbestimmt, wenn nicht durch Weglassen eines Stabes (beispielsweise des durchstrichenen) die statisch bestimmte Stabilität wieder hergestellt wird. In Fig. 55, wie in andern Fällen, ist die den Sätzen a) b) entsprechende Zuweisung derart vorgenommen, dass die Knotenpunkte mit lateinischen, die zugewiesenen Stäbe mit den entsprechenden arabischen Ziffern bezeichnet sind. Neben der Stabgruppirung nach Fig. 55 sind für $r = 3$ auch andere Anordnungen mit statisch bestimmter Stabilität verträglich, wovon Fig. 58, 59, 60 Beispiele liefern. Haben wir ein Fachwerk mit m Verticalen und n Feldern zwischen denselben, so ist die Anzahl der Knotenpunkte, gleichgültig ob sich über den Stützen Knotenpunkte befinden oder nicht, $k = m + n + 1$, die Anzahl der Verticalen und Gurtungsstäbe $m + 2n$. Es kann also ein solcher Träger für $r = 3$ durch

$$2k - 3 - (m + 2n) = m - 1$$

weitere gleichzeitig widerstandsfähige Stäbe statisch-bestimmt-stabil gemacht werden und das ist in Fig. 60, 61 durch ebensoviele Diagonalen geschehen (vergl. die Beispiele 13 u. 14).

Neben dem Falle $r = 3$ kommt besonders der Fall $r = 4$ häufig vor; zur statisch bestimmten Stabilität sind dann

$$s = 2k - 4$$

wirksame Stäbe erforderlich. Beispiele statisch-bestimmt-stabiler Träger dieser Art bieten Fig. 62, 63, und nach Fortfall der durchstrichenen Stäbe auch 52, 56, 57, 64. Dagegen stellen die letzteren

Figuren mit sämmtlichen Stäben und Fig. 65 einfach statisch unbestimmte Fachwerke und Fig. 66 mit s Stäben ein $2k-4-s=(s-2)$-fach labiles Stabsystem dar. Für $s=2$ führt Fig. 66 auf den statisch-bestimmt-stabilen Träger Fig. 62, für $s=1$ auf den statisch-unbestimmt-stabilen Träger Fig. 65. Bei m Verticalen und n Feldern haben wir, wie oben, die Anzahl der Knotenpunkte $k=m+n+1$, die Anzahl der Verticalen und Gurtungsstäbe $m+2n$, wonach das Fachwerk für $r=4$ durch

$$2k-4-(m+2n)=m-2$$

weitere Stäbe statisch-bestimmt-stabil gemacht werden kann, was in Fig. 52 durch Weglassen irgend einer Diagonale erreicht würde. Man zieht jedoch bei Bogenfachwerken Anordnungen wie in Fig. 63 vor. Die Stäbe 10 und 11 können auch wegbleiben, womit s um 4, k um 2 abnimmt, also die Bedingung für die Stabzahl nicht verletzt wird.

Da ein Fachwerk der Stabanordnung Fig. 55 so vielfach statisch unbestimmt wird als Reactionscomponenten über $r=3$ Verwendung finden, so ist ein continuirliches Balkenfachwerk (Fig. 5, 64) dieser Anordnung ebenso vielfach statisch unbestimmt als Zwischenstützen vorhanden sind. — In Fig. 67 haben wir ein Bogenfachwerk skizzirt, welches bei $r=6$ Reactionscomponenten dreifach statisch unbestimmt ist, da die Stabanordnung wieder der Fig. 55 entspricht. Eine dreifache Unbestimmtheit bleibt auch bestehen, wenn die oberen Stützen als feste Gelenkauflager hergestellt werden, die durchstrichenen Stäbe aber wegfallen, womit an Stelle zweier Stabkräfte zwei weitere Reactionscomponenten treten. Auch die Trägerart bleibt im letzteren Falle trotz der acht unabhängigen Reactionscomponenten dreifach statisch unbestimmt, weil die beiden äussersten Stäbe des Obergurts nun Trägerstücke im Sinne des § 2 bilden, durch deren Anordnung die hinzukommenden zwei Reactionscomponenten bestimmt werden. — (Aufgaben 16—19, Beispiele 13—16.)

§ 15. Stabkräfte stabiler Fachwerke.

Wir fassen von nun an nur stabile Fachwerke ins Auge. An den Knotenpunkten eines solchen mögen in der Trägerebene beliebige äussere Kräfte wirken. Wir denken uns an irgend einer Stelle einen beliebig geformten Schnitt s so durch den Träger gelegt, dass Letzterer in zwei Theile I und II getrennt erscheint. Für diejenigen äussern Kräfte des Trägers, welche am Trägertheil I wirken, seien

H_s die resultirende Horizontalcomponente, V_s die resultirende Verticalcomponente und M_s das resultirende Moment in Hinsicht eines beliebigen Drehpunkts in der Trägerebene. Mit H_s, V_s, M_s müssen diejenigen Kräfte im Gleichgewichte sein, welche vom Trägertheil II her auf I als Stabkräfte wirken (§ 7). Wir fassen dieselben als positiv oder negativ auf, jenachdem sie Zug oder Druck bedeuten und sind dann allgemein eingeführte Stabkräfte wie Zugkräfte vom Schnitte s weggerichtet zu denken (Fig. 68).

Es werde nun ein Coordinatensystem in der Trägerebene angenommen, für welches die positiven Richtungen der Abscissenaxe und Ordinatenaxe mit den positiven Richtungen von H_s und V_s übereinstimmen. Das Moment M_s soll als positiv gelten, wenn es (entsprechend der Bewegung des Uhrzeigers) rechts um den gewählten Drehpunkt der Coordinaten u, w wirkt. Bezeichnen dann für die von Schnitt s getroffenen Stäbe X, Y, Z,.. die Stabkräfte, ξ, η, ζ,.. deren Winkel mit der positiven Richtung der Abscissenaxe und x, y, z,.. ihre Hebelarme in Hinsicht des Punktes u, w, dann lauten die Bedingungen fürs Gleichgewicht am Trägertheil I (Fig. 68):

$$(1) \qquad H_s + X\cos\xi + Y\cos\eta + Z\cos\zeta + \cdots,$$

$$(2) \qquad V_s + X\sin\xi + Y\sin\eta + Z\sin\eta + \cdots,$$

$$(3) \qquad M_s \pm Xx \pm Yy \pm Zz \pm \cdots .$$

Die Momente Xx, Yy, Zz,.. sind mit positivem oder negativem Vorzeichen einzuführen, jenachdem die ziehend gedachten Kräfte X, Y, Z,.. auf Drehung rechts oder links um u, w wirken. Aus den Gleichungen 1)—3) können bei sonst bekannten Grössen im Allgemeinen drei unbekannte Stabkräfte oder Reactionscomponenten ermittelt werden.

Vorstehende Beziehungen gelten für beliebige Schnitte s, welche einen Träger in zwei Theile I und II zerlegen. Denken wir uns Schnitt s so gelegt, dass der Trägertheil I nur einen Knotenpunkt enthält (Fig. 53) und wählen diesen als Drehpunkt der Momente, dann fällt Gleichung 3) weg, die Gleichungen 1) 2) werden mit § 14, 4) identisch, die Berechnung statisch bestimmter Fachwerke auf Grund von Knotenpunktsgleichungen erweist sich als specieller Fall der Berechnung auf Grund obiger Schnittgleichungen.

Im Allgemeinen erfordert die Bestimmung einer Stabkraft aus 1)—3) die Auflösung dreier Gleichungen. Dies ist häufig unbequem, insbesondere dann, wenn für einen gegebenen Belastungsfall nur eine Stabkraft interessirt. Zur Berechnung dieser würde auch eine Glei-

chung genügen, vorausgesetzt dass dieselbe von unbekannten Kräften nur die gesuchte enthält. Dies ist bei bestimmtem M_s stets erreichbar, wenn die übrigen von Schnitt s getroffenen unbekannten Stabkräfte sich in einem Punkte schneiden, also beispielsweise wenn s nur drei Stäbe mit unbekannten Beanspruchungen trifft. Da nämlich die Wahl des Momentendrehpunkts u, w frei steht, so legt man denselben nach dem Vorgange von *A. Ritter* (Elementare Theorie u. Berechnung eis. Dach- und Brückenconstr. I. Aufl. Hannover 1868) in den Durchschnitt der nicht gesuchten unbekannten Stabkräfte. Es folgt dann aus 3), wenn der Drehpunkt in den Durchschnitt von $Y, Z, \ldots$ gelegt wird

$$M_s \pm Xx + S_b = 0, \tag{4}$$

wenn der Drehpunkt in den Durchschnitt von $X, Z, \ldots$ gelegt wird

$$M_s \pm Yy + S_b = 0, \tag{5}$$

wenn der Drehpunkt in den Durchschnitt von $X, Y, \ldots$ gelegt wird

$$M_s \pm Zz + S_b = 0 \tag{6}$$

u. s. w. In diesen Gleichungen bezeichnet S_b das Moment der etwa von Schnitt s getroffenen bekannten Stabkräfte für den fraglichen Drehpunkt. Trifft s nur zwei unbekannte Stabkräfte, so kann man bei Bestimmung der einen den Drehpunkt beliebig in die Richtungslinie der andern legen.

Die vorgeführten Berechnungsmethoden statisch-bestimmt-stabiler Fachwerke gelten für jede bestimmte Belastung, bei veränderlicher Belastung sind die Grenzwerthe der Stabkräfte nach Anleitung von § 12 zu ermitteln, was in der Folge für die wichtigsten Fälle geschehen soll. — (Beispiele 17—22, Aufgaben 20—23.)

§ 16. Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen. Grundgleichungen.

Wir setzen nun das am häufigsten vorkommende Fachwerksystem voraus. Der Träger sei zwischen zwei auf einander folgenden Stützpunkten durch Verticalen in n *Felder* von gleichen Längen λ getheilt. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale. Die l begrenzenden Stützpunkte können gleich oder verschieden hoch liegen.

Bei Aufstellung der Ausdrücke für die Schnittkräfte und Schnittmomente nach Anleitung von § 7 denken wir uns die Schnitte 0 und l senkrecht um unendlich wenig rechts und links der l begrenzenden Stützpunkte geführt und den Ursprung der Coordinaten in

den Stützpunkt links gelegt. Für den Stützpunkt rechts sind die Coordinaten l, k.

Die Diagonalen können nach dem Stützpunkt 0 hin ansteigen oder abfallen. Diejenige Gurtung, welche man der Diagonale m nach der Seite von 0 hin folgend trifft, heisse *X-Gurtung*, die andere *Z-Gurtung*. Weiter werden die aus Fig. 69 und 70 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt, sodass x_m, z_m, d_m, h_m die Längen derjenigen Stäbe bedeuten, welche durch X_m, Z_m, D_m, V_m beansprucht sind. Die Ordinaten der *Knotenpunkte* m (das heisst der Knotenpunkte bei Abscisse $m\lambda$) in X-Gurtung und Z-Gurtung nennen wir $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$. Alsdann gelten in allen folgenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren bei unten liegender X-Gurtung.

Der Schnitt s zur Bestimmung von X_m, Z_m, D_m werde so durch *Feld* m gelegt, dass er nur die durch jene Kräfte beanspruchten Stäbe trifft. Wie in § 7 bezeichnen u, w die Coordinaten des Drehpunkts für das Moment M_s der äussern Kräfte links von s. Nach Anleitung von § 15 haben wir zur Bestimmung von X_m

$$u = m\lambda, \qquad w = \mathfrak{z}_m, \qquad M_s \pm X_m h_m \cos \xi_m = 0;$$

zur Bestimmung von Z_m

$$u = (m-1)\lambda, \qquad w = \mathfrak{x}_{m-1}, \qquad M_s \mp Z_m h_{m-1} \cos \zeta_m = 0.$$

Bei Ableitung von D_m setzen wir

$$\varepsilon\lambda = m\lambda - u, \qquad u = (m-\varepsilon)\lambda,$$

womit $\varepsilon\lambda$ die Differenz der Abscissen von Verticale m und Momentendrehpunkt oder Durchschnitt der Richtungslinien x_m, z_m bedeutet. Für die Ordinate des Letzteren hat man (Fig. 71)

$$w = \mathfrak{x}_m - \varepsilon\lambda \operatorname{tg} \xi_m = \mathfrak{z}_m - \varepsilon\lambda \operatorname{tg} \zeta_m,$$

oder wegen

$$\operatorname{tg} \xi_m = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}}{\lambda}, \qquad \operatorname{tg} \zeta_m = \frac{\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}}{\lambda},$$

auch

$$w = \mathfrak{x}_m - \varepsilon(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \varepsilon(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}).$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m) - (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m-1})},$$

das heisst

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}.$$

Der Hebelarm zur Bestimmung von D_m ist $\frac{\varepsilon\lambda}{\cos\zeta_m}\sin\alpha_m$, sodass die Bedingungsgleichung für D_m lautet

$$M_s \pm D_m \varepsilon\lambda \frac{\sin\alpha_m}{\cos\zeta_m} = 0.$$

Während bei der Ableitung von X_m, Z_m, D_m der gleiche Schnitt s massgebend war, ist der Schnitt s zur Bestimmung von V_m so zu legen, dass er die durch X_m, V_m, Z_{m+1} beanspruchten Stäbe trifft. Wir setzen hier

$$\nu\lambda = m\lambda - u, \qquad u = (m-\nu)\lambda,$$

sodass $\nu\lambda$ die Differenz der Abscissen von Verticale m und Momentendrehpunkt oder Durchschnitt der Richtungslinien x_m, z_{m+1} bedeutet. Die Ordinate des Letzteren drückt sich aus (Fig. 71)

$$w = \mathfrak{x}_m - \nu\lambda\,\mathrm{tg}\,\xi_m = \mathfrak{z}_m - \nu\lambda\,\mathrm{tg}\,\zeta_{m+1},$$

oder mit Rücksicht auf die schon angeschriebenen Werthe von $\mathrm{tg}\,\xi_m$ und $\mathrm{tg}\,\zeta_m$

$$w = \mathfrak{x}_m - \nu(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \nu(\mathfrak{z}_{m+1} - \mathfrak{z}_m).$$

Hieraus folgt

$$\nu = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}}. \tag{2}$$

Die Bedingungsgleichung für V_m lautet

$$M_s \mp V_m \nu\lambda = 0.$$

Aus Fig. 71 entnimmt man

$$\cos\xi_m = \frac{\lambda}{x_m}, \qquad \cos\zeta_m = \frac{\lambda}{z_m}.$$

$$\sin\alpha_m = \frac{h_{m-1}}{d_m}\sin(90-\zeta_m) = \frac{h_{m-1}}{d_m}\cos\zeta_m.$$

Bei Beachtung dieser Beziehungen und wegen $l = n\lambda$ lassen sich die aufgestellten Grundgleichungen der Stabkräfte für Knotenpunktskräfte beliebiger Grösse und Richtung in der Trägerebene wie folgt schreiben:

$$X_m = \mp M_s \frac{x_m}{\lambda h_m} \quad \text{mit } u = m\lambda, \qquad w = \mathfrak{z}_m, \tag{3}$$

$$Z_m = \pm M_s \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}} \quad \text{mit } u = (m-1)\lambda, \quad w = \mathfrak{x}_{m-1}, \tag{4}$$

$$(5) \qquad D_m = \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} \text{ mit } u = (m-\varepsilon)\lambda,$$

$$w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \varepsilon(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}),$$

$$(6) \qquad V_m = \pm M_s \frac{1}{\nu \lambda} \text{ mit } u = (m-\nu)\lambda,$$

$$w_v = \mathfrak{x}_m - \nu(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \nu(\mathfrak{z}_{m-1} - \mathfrak{z}_m).$$

In diesen Gleichungen sind ε, ν durch 1) 2) bestimmt. M_s bezieht sich in 3) — 5) auf die äussern Kräfte links eines Schnittes durch x_m, d_m, z_m, in 6) auf die äussern Kräfte links eines Schnitts durch x_m, h_m, z_{m+1}. Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in ihrer Anwendung auf die Trägertheile links dieser Schnitte ergiebt

$$(7) \qquad \frac{H_s}{\lambda} + \frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_m}{z_m} + \frac{D_m}{d_m} = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{H_s}{\lambda} + \frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_{m+1}}{z_{m+1}} = 0.$$

Die Formeln für X_m, Z_m, D_m gelten auch wenn die *Stellung der Diagonalen* wechselt, also die X-Gurtung bald oben, bald unten liegt. Zur Gültigkeit der Formeln 6) 8) jedoch ist nöthig, dass sich zu beiden Seiten der *Verticale* m Felder gleicher Länge λ desselben Trägerstücks (S. 4) mit *Diagonalen gleicher Stellung* befinden, wobei jedoch die Diagonale mit einem Gurtungsstabe zusammenfallen kann (Endfelder, Fig. 72 u. 73).

Für die Längen der *Gurtungsstäbe* m hat man allgemein

$$(9) \qquad x_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1})^2}, \qquad z_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})^2}$$

und für die Längen der *Diagonale* m

$$(10) \qquad d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_m)^2},$$

während h_m gleich dem Absolutwerthe von $\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m$ ist.

Fachwerke mit horizontaler X-Gurtung (Fig. 74 u. 75). Für beliebige Fachwerke mit horizontaler X-Gurtung, gleichgültig ob dieselbe oben oder unten liegt, haben wir

$$(11) \qquad x_m = \lambda, \quad z_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}; \quad d_m = \sqrt{\lambda^2 + h_m^2}$$

und wegen constantem $\mathfrak{x}_m = \mathfrak{x}$ nach 2)

$$\nu = \frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_m}{(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_{m+1}) - (\mathfrak{x} - \mathfrak{z}_m)}$$

das heisst

(12) $$v = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}.$$

Aus 5) 6) folgt für Diagonalen und Verticalen

(13) $$w_d = w_v = \mathfrak{x}.$$

Bei Brückenträgern mit horizontaler X-Gurtung pflegt die Fahrbahn in Höhe der Letzteren zu liegen und die Fahrbahnbelastung in den Knotenpunkten der X-Gurtung anzugreifen.

Fachwerke mit horizontaler Z-Gurtung (Fig. 76 u. 77). Für solche hat man bei oben oder unten liegender X-Gurtung

(14) $$z_m = \lambda, \quad x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}, \quad d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}}$$

und wegen constantem $\mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}$ nach 2)

(15) $$v = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}}{(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}) - (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z})},$$

das heisst auch

(15) $$v = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \varepsilon.$$

Aus 5) 6) folgt für Diagonalen und Verticalen

(16) $$w_d = w_v = \mathfrak{z}.$$

Bei Brückenträgern mit horizontalem Z-Gurt pflegt die Fahrbahn in der Höhe des Letzteren zu liegen und die Fahrbahnbelastung auf die Knotenpunkte des Z-Gurts zu wirken.

Fachwerke mit symmetrischen Gurtungen (Fig. 78 u. 79). Liegen die X-Gurtung und Z-Gurtung zu einer beliebigen Horizontale symmetrisch, dann ergeben sich

(17) $$x_m = z_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}, \quad d_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2}.$$

Da ferner jetzt

$$\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1} = \mathfrak{z}_{m-1} - \mathfrak{z}_m, \quad \mathfrak{x}_{m+1} - \mathfrak{x}_m = \mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m+1},$$

so folgt

$$\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m = \frac{\mathfrak{x}_{m-1} + \mathfrak{z}_{m-1}}{2} + \frac{\mathfrak{x}_{m+1} + \mathfrak{z}_{m+1}}{2}$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks in 2)

$$v = \frac{2(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m)}{(\mathfrak{x}_{m+1} - \mathfrak{z}_{m+1}) - (\mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m-1})},$$

das heisst also

(18) $$v = \frac{2h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}}.$$

Als Ordinate des Durchschnitts von x_m, z_m hat man bei beliebigem m constant

$$(19) \qquad w_d = \frac{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m}{2}.$$

Die Fahrbahn kommt im vorliegenden Falle sowohl oberhalb als unterhalb als auch zwischen beiden Gurtungen vor. Für den Träger mit horizontalen Gurtungen sind wegen lauter gleicher Verticalenlängen $\varepsilon = \nu = \pm \infty$.

Die oben eingeführten Grössen ε, ν ermöglichen eine allgemeine und einfache Thorie des betrachteten wichtigsten Fachwerksystems, durch Einführung der X-Gurtung und Z-Gurtung, welche auch bei andern Systemen Verwendung finden sollen (§§ 27—30), werden die nöthigen Ableitungen fast auf die Hälfte reduzirt, der Ersatz aller trigonometrischen Funktionen durch Stablängen lässt jede Unsicherheit bezüglich der Vorzeichen irgendwelcher in den Formeln auftretender Grössen schwinden. Nach Ansicht des Verfassers sind jene Grössen und Begriffe geradezu unentbehrlich, wenn die Theorie nicht unvollständig oder viel zu umständlich werden soll.

Schliesslich sei bemerkt, dass sämmtliche abgeleitete Gleichungen und damit auch die daraus folgenden der §§ 18—22 auch bestehen bleiben, wenn wir die Schnitte 0 und l nicht wie oben durch die begrenzenden Stützpunkte einer Oeffnung legen, sondern durch irgend zwei Verticalen, zwischen welchen sich kein Stützpunkt befindet und deren horizontale Entfernung $l = n\lambda$ gesetzt wird. Die Punkte 0 und l können dann beliebige Knotenpunkte in den Schnitten 0 und l sein (§ 7).

§ 17. Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen. Verschiedene Trägerformen.

In § 16 wurde keinerlei Voraussetzung bezüglich der Veränderlichkeit der Verticalenlängen gemacht. Das Gesetz dieser Veränderlichkeit ist vielfach durch statische oder geometrische Bedingungen bestimmt. Die Realisirung statischer Bedingungen hängt von der Trägerart und den wirkenden Activkräften ab, die am häufigsten vorkommenden geometrischen Bedingungen mögen schon hier erwähnt werden. Bei Verzeichnung entsprechender Fachwerke bleiben die eventuell angewandten Gegendiagonalen (§§ 13, 22) unberücksichtigt.

Parallelträger. Die Gurtungen sind parallel. Man hat am ganzen Träger constant

(1) $$h_m = h$$

und nach § 16, 1) 2) wegen $\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1} = \mathfrak{z}_{m+1} - \mathfrak{z}_m$

(2) $$\varepsilon = \nu = \infty.$$

Der Parallelträger wird nur als einfacher oder continuirlicher Balkenträger verwendet. Gewöhnliche Anordnungen einfacher Balkenträger sind in Fig. 80, 81 angedeutet. Liegen Auflager und Fahrbahn im Falle von Fig. 80 oben oder im Falle von Fig. 81 unten, so können die durchstrichenen Stäbe wegbleiben, da sie, abgesehen von ihrem eigenen Gewichte, keine Beanspruchung erleiden (wie die Bedingungen fürs Gleichgewicht am zwischen liegenden Knotenpunkte ergeben). Im Falle von Fig. 80 werden bei unten liegenden Auflagern die Trägerenden vielfach nach Fig. 82 abgeändert, einestheils um den Obergurt bis zu den Auflagern durchführen zu können und so eine steifere Construction zu erzielen, anderntheils um einige Stäbe zu ersparen. Analog könnten natürlich im Falle von Fig. 81 bei oben liegenden Auflagern die Trägerenden nach Fig. 83 abgeändert werden.

Dreieckstrāger. Die Gurtungen einer Oeffnung sind vollständig geradlinig und treffen sich an einem Ende, oder sie bilden von einer Verticale ausgehend gerade Strecken und treffen sich an beiden Enden. Da im letzteren Falle immer Symmetrie zur Verticalen durch die Trägermitte besteht, so genügt es, Beziehungen unter Annahme von Gurtungsschnitten bei 0 aufzustellen. Wir haben dann mit constantem c

(3) $$h_m = mc,$$

sowie für die Diagonale m

(4) $$u = (m - \varepsilon)\lambda = 0, \qquad \varepsilon = m$$

und für die Verticale m

(5) $$u = (m - \nu)\lambda = 0, \qquad \nu = m.$$

Ist h die gewünschte grösste Trägerhöhe, so liefert 3) bei vollständig geraden Gurtungen

(6) $$h = h_n = nc \qquad c = \frac{h}{n}$$

und bei symmetrisch zur mittleren Verticale liegenden Gurtungen mit $n = 2\sigma$

(7) $$h = h_\sigma = \sigma c \qquad c = \frac{h}{\sigma}.$$

Dreieckstrāger könnten als Balkenträger und Bogenträger Verwendung finden, sie kommen besonders häufig als Dachbinder vor.

Neben constructiver Einfachheit haben sie als **Balkenträger** den Vorzug, dass kein Stab Wechsel von Zug und Druck erleidet (§ 38). In Fig. 84—91 sind einige Fälle angedeutet. Unterscheidende Bezeichnungen: *Dreiecksbalkenfachwerk* und *Dreiecksbogenfachwerk.*

Trapezträger. Die Gurtungen einer Oeffnung sind vollständig geradlinig oder bilden von einer Verticale ausgehend gerade Strecken, treffen sich aber nicht an den Enden. Da im zweiterwähnten Falle immer Symmetrie zur Verticalen durch die Trägermitte besteht, so genügt es, Beziehungen unter Annahme gerader Gurtungen von Verticale 0 aus aufzustellen. Die Verticalenlängen können nach 0 hin abnehmen oder zunehmen.

Verticalenlängen nach 0 hin abnehmend. Es sei $-\mu\lambda$ die Abscisse des Durchschnitts der Gurtungsaxen, dann hat man mit constantem c

$$(8) \qquad h_m = (\mu + m)c,$$

sowie für die Diagonale m

$$(9) \qquad u = (m - \varepsilon)\lambda = -\mu\lambda, \qquad \varepsilon = \mu + m$$

und für die Verticale m

$$(10) \qquad u = (m - \nu)\lambda = -\mu\lambda, \qquad \nu = \mu + m.$$

Bezeichnen h, h_0 die verlangte grösste und kleinste Trägerhöhe, so hat man bei vollständig geraden Gurtungen

$$(11) \qquad \begin{aligned} &h_0 = \mu c, & &h = h_n = h_0 + nc, \\ &\mu = \frac{h_0}{c}, \quad c = \frac{h - h_0}{n}, & &h_m = h_0 + mc \end{aligned}$$

und bei symmetrisch zur mittleren Verticale liegenden Gurtungen mit $n = 2\sigma$

$$(12) \qquad \begin{aligned} &h_0 = \mu c, & &h = h_\sigma = h_0 + \sigma c, \\ &\mu = \frac{h^0}{c}, \quad c = \frac{h - h_0}{\sigma}, & &h_m = h_0 + mc. \end{aligned}$$

Mit $\mu = 0$ entstehen aus 8)—12) die oben für Dreiecksträger gegebenen Formeln.

Verticalenlängen nach 0 hin zunehmend. Es bezeichne $\mu\lambda$ die Abscisse des Durchschnitts der Gurtungsaxen, dann wird mit constantem c

$$(13) \qquad h_m = (\mu - m)c.$$

Für die Diagonale m hat man

$$(14) \qquad u = (m - \varepsilon)\lambda = \mu\lambda, \qquad \varepsilon = m - \mu$$

und für die Verticale m

$$(15)\qquad u = (m - v)\lambda = \mu\lambda, \qquad v = m - \mu.$$

Bezeichnen h, h_0 die verlangte kleinste und grösste Trägerhöhe, so folgen bei vollständig geraden Gurtungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} h_0 &= \mu c, & & h = h_n = h_0 - nc, \\ \mu &= \frac{h_0}{c}, \quad c = \frac{h_0 - h}{n}, & & h_m = h_0 - mc \end{aligned}$$

und bei symmetrisch zur mittleren Verticale liegenden Gurtungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} h_0 &= \mu c, & & h = h_\sigma = h_0 - \sigma c, \\ \mu &= \frac{h_0}{c}, \quad c = \frac{h_0 - h}{\sigma}, & & h_m = h_0 - mc. \end{aligned}$$

Mit $\mu = n$ entstehen aus 13) — 16) Formeln, welche auch für Dreieckträger gelten.

Der Trapezträger kann als Balkenträger und Bogenträger bei Brücken und Dächern Verwendung finden. Im Allgemeinen würden die Verticalenlängen für Balkenbrücken nach beiden Enden hin abnehmen, bei Bogenbrücken zunehmen. Doch könnten bei Brücken mitunter (z. B. bei Bergbahnen) auch unsymmetrische Trapezträger mit einer horizontalen Gurtung zur Verwendung kommen. Einige Fälle von Trapezträgern sind in Fig. 92—101 angedeutet. Unterscheidende Bezeichnungen: *Trapezbalkenfachwerk* und *Trapezbogenfachwerk*.

Parabelträger. Die Gurtungen einer Oeffnung sind Parabeln mit verticaler Axe eingeschrieben und treffen sich an beiden Enden. Wir setzen symmetrisch zur Verticalen durch die Trägermitte liegende Gurtungen voraus. Für einen Parabelbogen mit verticaler Axe, welcher bei 0 und l die Abscissenaxe schneidet und dessen Parameter und Scheitelordinate durch p, f bezeichnet sind, hat man (Fig. 102)

$$\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = 2p(f - y),$$

woraus für $x = 0$

$$\frac{l^2}{4} = 2pf.$$

Die Verbindung beider Gleichungen ergiebt

$$(18)\qquad y = x(l - x)\frac{4f}{l^2}.$$

Es bezeichne f_x die Scheitelordinate des Bogens der X-Gurtung und f_z diejenige des Bogens der Z-Gurtung, dann folgen mit $x = m\lambda$, $l = n\lambda$ die Ordinaten der Knotenpunkte m beider Gurtungen

$$(19)\qquad \mathfrak{x}_m = m(n - m)\frac{4f_x}{n^2}, \qquad \mathfrak{z}_m = m(n - m)\frac{4f_z}{n^2},$$

woraus, wenn f den Absolutwerth der Differenz der Scheitelordinaten f_x, f_z bedeutet, wegen $f_x - f_z = \pm f$, $\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m = \pm h_m$

$$h_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2}. \tag{20}$$

Da hiernach

$$h_{m-1} = (m-1)(n-m+1)\frac{4f}{n^2},$$

so folgt für die Diagonale m

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m)}{n-2m+1}, \tag{21}$$

und analog mit Rücksicht auf 19) für die Vertikale m

$$\nu = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1} + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m+1}} = \frac{m(n-m)}{n-2m+\omega}, \tag{22}$$

wobei zur Abkürzung

$$\omega = \frac{f_x + f_z}{f_x - f_z} \tag{23}$$

gesetzt wurde. Für horizontale X-Gurtung, horizontale Z-Gurtung und zu einer Horizontalen symmetrische Gurtungen sind in § 16 spezielle Ausdrücke von ν gegeben. Neben ihnen gilt bei Parabelträgern 22) bezw. mit $\omega = -1$, $\omega = 1$, $\omega = 0$ entsprechend

$$f_x = 0, \quad f_z = 0, \quad f_x + f_z = 0.$$

Im Falle ungerader Felderzahl $n = 2\sigma + 1$ ist die grösste Trägerhöhe nach 20)

$$h = h_\sigma = \frac{n-1}{2}\left(n - \frac{n-1}{2}\right)\frac{4f}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2}f,$$

sodass

$$\begin{cases} \text{bei ungeradem } n & f = \dfrac{n^2}{n^2-1}h, \\ \quad\text{"}\quad \text{geradem } n & f = h. \end{cases} \tag{24}$$

Bezeichnen $\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{z}_\sigma$ die Ordinaten der zunächst der Trägermitte gelegenen Knotenpunkte in X-Gurtung und Z-Gurtung, so hat man analog 24)

$$\begin{cases} \text{bei ungeradem } n & f_x = \dfrac{n^2}{n^2-1}\mathfrak{x}_\sigma, & f_z = \dfrac{n^2}{n^2-1}\mathfrak{z}_\sigma, \\ \quad\text{"}\quad \text{geradem } n & f_x = \mathfrak{x}_\sigma, & f_z = \mathfrak{z}_\sigma. \end{cases} \tag{25}$$

Es können hiernach in 23) auch $\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{z}_\sigma$ an Stelle von f_x, f_z gesetzt werden.

Parabelträger kommen als Balkenträger und Bogenträger bei Brücken und Dächern vor. Als Balkenträger findet man *Segmentträger* (eine der Gurtungen gerade, Zusammentreffen beider an den

Enden), *Linsenträger* (Gurtungen symmetrisch zu einer Horizontalen gekrümmt und an den Enden zusammentreffend) und *Sichelträger* (beide Gurtungen nach der gleichen Seite gekrümmt und an den Enden zusammentreffend). Die Sichelform kommt in neuerer Zeit auch bei Bogenbrücken vor. In Fig. 103—112 sind einige Parabelträger angedeutet. Unterscheidende Bezeichnungen: *Parabelbalkenfachwerk* und *Parabelbogenfachwerk.*

Halbparabelträger. Die Gurtungen einer Oeffnung sind Parabeln von verticaler Axe eingeschrieben, treffen sich aber nicht an den Enden. Wir setzen symmetrisch zu einer Horizontalen liegende, sich nicht durchschneidende Gurtungen voraus. Die Verticalenlängen können nach den Trägerenden hin zunehmen oder abnehmen. Es mögen bezeichnen f_x, f_z die Bogenpfeile der Parabeln, welche die Form der X-Gurtung und Z-Gurtung bestimmen (positiv oder negativ, jenachdem von der Bogensehne aus in positiver oder negativer Ordinatenrichtung liegend), f den Absolutwerth der Pfeildifferenz, h die Trägerhöhe bei der Oeffnungsmitte und $\mathfrak{x}_\sigma$, $\mathfrak{z}_\sigma$ die Ordinaten der zunächst der Letzteren gelegenen Knotenpunkte in X-Gurtung und Z-Gurtung. Dann hat man mit Rücksicht auf 19) die Ordinaten der Knotenpunkte m beider Gurtungen:

$$(26)\qquad \mathfrak{x}_m = \mathfrak{x}_0 + m(n-m)\,\frac{4f_x}{n^2}, \qquad \mathfrak{z}_m = \mathfrak{z}_0 + m(n-m)\,\frac{4f_z}{n^2}$$

und da für ungerade Felderzahl $n = 2\sigma + 1$:

$$\mathfrak{x}_\sigma = \mathfrak{x}_0 + \sigma(n-\sigma)\,\frac{4f_x}{n^2}, \qquad \mathfrak{z}_\sigma = \mathfrak{z}_0 + \sigma(n-\sigma)\,\frac{4f_z}{n^2},$$

so sind die Bogenpfeile:

$$(27)\quad \begin{cases} \text{bei ungeradem } n \quad f_x = \dfrac{n^2}{n^2-1}(\mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_0), & f_z = \dfrac{n^2}{n^2-1}(\mathfrak{z}_\sigma - \mathfrak{z}_0), \\ \text{„ \quad geradem } n \quad f_x = \mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_0, & f_z = \mathfrak{z}_\sigma - \mathfrak{z}_0. \end{cases}$$

Wegen $\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m = \pm h_m$ folgt aus 26):

$$h_m = h_0 \pm m(n-m)\,\frac{4f}{n^2},$$

worin das positive oder negative Vorzeichen massgebend sein kann.

Verticalenlängen nach den Enden hin abnehmend. Für diesen Fall haben wir:

$$(28)\qquad h_m = h_0 + m(n-m)\,\frac{4f}{n^2}.$$

Hiermit folgt für die Diagonale m:

$$(29)\qquad \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m) + \dfrac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + 1},$$

während mit 26) für die Verticale m:

$$(30)\qquad v = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1} + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m+1}} = \frac{m(n-m) + \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + \omega}.$$

Da für ungerade Felderzahl $n = 2\sigma + 1$ nach 28):

$$h = h_\sigma = h_0 + \sigma(n-\sigma)\frac{4f}{n^2} = h_0 + \frac{n^2-1}{n} f,$$

so hat man:

$$(31)\qquad \begin{cases} \text{bei ungeradem } n & f = \frac{n^2}{n^2-1}(h - h_0), \\ \text{„ geradem } n & f = \qquad h - h_0 . \end{cases}$$

Verticalenlängen nach den Enden hin zunehmend. In diesem Falle liefert obige Gleichung für h_m:

$$(32)\qquad h_m = h_0 - m(n-m)\frac{4f}{n^2}.$$

und damit für die Diagonale m:

$$(33)\qquad \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m) - \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + 1},$$

während mit 26) für die Verticale m:

$$(34)\qquad v = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1} + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m+1}} = \frac{m(n-m) - \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + \omega}.$$

Da für ungerade Felderzahhl $n = 2\sigma + 1$ nach 32):

$$h = h_\sigma = h_0 - \sigma(n-\sigma)\frac{4f}{n^2} = h_0 - \frac{n^2-1}{n^2} f,$$

so hat man:

$$(35)\qquad \begin{cases} \text{bei ungeradem } n & f = \frac{n^2}{n^2-1}(h_0 - h), \\ \text{„ geradem } n & f = \qquad h_0 - h . \end{cases}$$

In 30) und 34) ist ω allgemein durch 23) bestimmt. Für horizontale X-Gurtung, horizontale Z-Gurtung und zu einer Horizontalen symmetrische Gurtungen gilt neben den in § 16 gegebenen Ausdrücken von v Gleichung 30) oder 34) bezw. mit $\omega = -1$, $\omega = 1$ und $\omega = 0$. Alle für den Halbparabelträger mit nach den Enden hin zunehmenden Verticalen gegebenen Gleichungen gehen für $h_0 = 0$, $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{z}_0 = 0$ in die dem Parabelträger entsprechenden Gleichungen über.

Der Halbparabelträger kommt als Balkenträger und Bogenträger vor. Den Balkenträger mit nach den Enden hin abnehmenden

Verticalenlängen hat man besonders angewandt, um im Gegensatze zu Segmentträgern eine obere Querverbindung der Hauptträger bis zu den Trägerenden zu ermöglichen, dabei aber ein besseres Aussehen und grössere Steifigkeit zu erreichen als beim Parallelträger von gleicher Höhe. Der ästhetische Gesichtspunkt macht sich z. B. geltend, wenn bei einer Brücke Träger verschiedener Höhe auf einander folgen (Fig. 113). Der Träger mit nach den Enden hin zunehmenden Verticalenlängen tritt bei Bogenbrücken sehr häufig auf, hat aber mehrfach auch bei Balkenbrücken Verwendung gefunden, und zwar wesentlich aus ästhetischen Rücksichten, obwohl sich im Falle continuirlicher Balken die grössten Trägerhöhen bei den Zwischenstützen durch die grössten Momente daselbst auch statisch rechtfertigen lassen. In Fig. 114 — 123 sind einige Halbparabelträger angedeutet. Unterscheidende Bezeichnungen: *Halbparabelbalkenfachwerk* und *Halbparabelbogenfachwerk.*

Weitere Gurtungsformen. Neben den bereits besprochenen Gurtungsformen und solchen ohne einheitliches Curvengesetz kommen besonders auch kreisförmige und elliptische Gurtungen (Kreisbogen und Ellipsenbogen eingeschrieben) vor. Wir wollen deshalb noch die Gleichungen symmetrisch zu einer Verticallinie liegender Kreisbogen und Ellipsenbogen der Spannweite l und des Pfeiles f für ein Coordinatensystem aufstellen, dessen Ursprung sich an einem Bogenende befindet, während die Abscissenaxe horizontal ist. Die Bogen sollen über den Halbkreis oder die Halbellipse nicht hinausgehen.

Für den Kreisbogen vom Durchmesser d gibt eine bekannte Beziehung der Kreislehre (Fig. 124):

$$f-y:\frac{l}{2}-x=\frac{l}{2}-x:d-(f-y),$$

oder auch:

$$(f-y)\,d-(f-y)^2=\left(\frac{l}{2}-x\right)^2.$$

Diese Gleichung liefert für $x=0$:

$$d=f+\frac{l^2}{4f}, \tag{36}$$

und nach Elimination von d allgemein:

$$y=-\left(\frac{l^2}{8f}-\frac{f}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{l^2}{8f}-\frac{f}{2}\right)^2+x\,(l-x)}, \tag{37}$$

also beispielsweise für den Halbkreis mit $2f=l$:

$$y=\sqrt{x\,(l-x)}\,. \tag{38}$$

Für den Ellipsenbogen gibt die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, wenn a, b die horizontale und verticale Halbaxe bedeuten (Fig. 125):

$$b^2\left(\frac{l}{2}-x\right)^2+a^2(b-f+y)^2=a^2b^2.$$

Mit $x=0$ folgt aus dieser Formel:

$$a^2=\frac{b^2}{2b-f}\,\frac{l^2}{4f}, \tag{39}$$

und nach Einsetzen letzteren Ausdrucks:

$$y=-(b-f)+\sqrt{(b-f)^2+x(l-x)(2b-f)\frac{4f}{l^2}}, \tag{40}$$

also beispielsweise für die Halbellipse mit $b=f$:

$$y=\frac{2f}{l}\sqrt{x(l-x)}, \tag{41}$$

woraus für den Halbkreis wieder 38) folgt. Gleichung 40) liefert um so flachere Bogen, je grösser $b:f$ gewählt wird.

Betrachten wir schliesslich noch den Fall, dass die Form eines Trägergurts durch einen Parabelbogen von verticaler Axe bestimmt ist, dessen Enden nicht in gleicher Höhe liegen, während neben seiner Horizontalprojection l nur der Pfeil f und für $x=l$ die Ordinate $y=k$ gegeben sind (Fig. 126). Bezeichnet dann L die Abscisse des Punktes, in welchem der ergänzt gedachte Bogen die Abscissenaxe schneidet, so hat man nach 18):

$$y=x(L-x)\frac{4f}{L^2}, \tag{42}$$

woraus für $x=l$:

$$k=l(L-l)\frac{4f}{L^2}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$L=\frac{2l}{k}\left(f-\sqrt{f^2-fk}\right), \tag{43}$$

mit welchem Werthe nun Gleichung 42) gilt. Für $k=0$ ist natürlich $L=l$, während für den ebenfalls vorkommenden Fall $k=f$

$$\text{mit } L=2l, \qquad y=x(2l-x)\frac{f}{l^2}$$

wird. — (Aufgaben 24 u. 25)

§ 18. Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen. Umformung der Grundgleichungen.

Die Beziehungen der §§ 16, 17 gelten für beliebige Richtungen der Knotenpunktskräfte in der Trägerebene. Wir setzen nun voraus, dass lediglich verticale Activkräfte, die wir Lasten nannten, am Träger wirken. Dann hat man nach § 7, 13) das Moment der äussern Kräfte links eines Schnittes s bezüglich jedes Drehpunkts der Coordinaten u, w in der Trägerebene

$$(1) \qquad M_s = \frac{l-u}{l}(M+S) + \frac{u}{l}(M'+S') + \left(u\frac{k}{l} - w\right)H,$$

worin M, M' die Momente M_s für die Schnitte 0, l bezüglich der Stützpunkte 0, l und H den für alle Schnitte s gleichen Horizontalschub bedeuten. Durch Substitution von 1) in § 16, 3)—6) ergeben sich folgende Ausdrücke für die Stabkräfte:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} X_m &= \mp[(n-m(M+S)+m(M'+S'+kH)-n\mathfrak{z}_m H]\frac{x_m}{lh_m}, \\ Z_m &= \pm[(n-m+1)(M+S)+(m-1)(M'+S'+kH) \\ &\qquad\qquad -n\mathfrak{z}_{m-1}H]\frac{z_m}{lh_{m-1}}, \\ D_m &= \mp[(n-m+\varepsilon)(M+S)+(m-\varepsilon)(M'+S'+kH) \\ &\qquad\qquad -n w_d H]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \\ V_m &= \pm[(n-m+\nu)(M+S)+(m-\nu)(M'+S'+kH) \\ &\qquad\qquad -n w_v H]\frac{1}{\nu l}. \end{aligned} \right.$$

Die w_d, w_v hierin sind durch § 16, 5) 6) bestimmt. Nach § 16, 7) 8) hat man wegen $H_s = H$:

$$(3) \qquad \frac{H}{\lambda} + \frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_m}{z_m} + \frac{D_m}{d_m} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{H}{\lambda} + \frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_{m+1}}{z_{m+1}} = 0,$$

woraus durch Subtraction:

$$(5) \qquad \frac{Z_{m+1}}{z_{m+1}} = \frac{Z_m}{z_m} + \frac{D_m}{d_m}.$$

Alle diese Gleichungen gelten bei beliebiger Belastung, speziell für Balkenträger ist darin $H = 0$.

In 1) 2) sind:

(6) $$S = \sum_0^s Ke, \qquad S' = \sum_s^l K(l-e)$$

die statischen Momente der zwischen den Schnitten 0 und s bezw s und l auf den Träger übertragenen Lasten in Hinsicht der Punkte 0 und l. Da der Schnitt s zur Berechnung von X_m, Z_m, D_m nur die Stäbe x_m, z_m, d_m trifft (Fig. 69—71), so ist die Höhenlage der Fahrbahn auf die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen ohne Einfluss, der Beitrag der Fahrbahnbelastung wird durch beliebige Verlegung ihrer Angriffspunkte in den Verticalen nicht geändert. Bei Berechnung von V_m jedoch tritt der in Verticale m angreifende Theil der Fahrbahnlast in S oder S' auf, jenachdem derselbe im Knotenpunkte m der Z-Gurtung oder X-Gurtung wirkt. Kommt die Fahrbahnlast in Verticale m zwischen beiden Gurtungen auf den Träger (Fig. 127, 128), so verhalten sich die Verticalenstücke zwischen Fahrbahn und X-Gurtung gerade so, als ob die Fahrbahnlast in der Z-Gurtung angriffe und die Verticalenstücke zwischen Fahrbahn und Z-Gurtung ebenso als wenn die Fahrbahnlast in der X-Gurtung angriffe, wir können aussprechen: *Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so rechne man dieselbe* (Eigengewicht und Verkehrslast) *bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurt zur Belastung des Knotenpunkts m der Z-Gurtung und bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurt zur Belastung des Knotenpunkts m der X-Gurtung.* Man braucht hiernach nur Formeln für in den Knotenpunkten angreifende Fahrbahnlasten abzuleiten. Bedeuten V_m, V'_m die Beanspruchungen der Verticale m oberhalb und unterhalb der Fahrbahn, K_f die in m angreifende Fahrbahnlast, so ergibt die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den Angriffspunkt von K_f:

(7) $$V'_m = V_m - K_f.$$

Wird die Resultante der in Verticale m angreifenden Lasten durch r_m bezeichnet, so liefert 6) zur Berechnung von X_m, Z_m, D_m:

(8) $$\begin{cases} S = [r_1 + 2r_2 + \cdots + (m-1)\, r_{m-1}]\, \lambda \\ S' = [r_{n-1} + 2r_{n-2} + \cdots + (n-m)\, r_m]\, \lambda\, ' \end{cases}$$

und zur Berechnung von V_m, wenn K_z die auf den Knotenpunkt m der Z-Gurtung zu rechnende Last vertritt,

(9) $$\begin{cases} S = [r_1 + 2r_2 + \cdots + (m-1)\; r_{m-1} + mK_z]\, \lambda, \\ S' = [r_{n-1} + 2r_{n-2} + \cdots + (n-m)\, (r_m - mK_z)]\, \lambda. \end{cases}$$

Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Spannweite l gelten und bedeuten g_x, g_z die auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnenden Theile von g, so hat man nach 8) 9) mit

$$r_m = g\lambda = (g_x + g_z)\lambda, \qquad K_z = g_z\lambda$$

zur Berechnung von X_m, Z_m, D_m:

$$S = m(m-1)\frac{g\lambda^2}{2}, \qquad S' = (n-m)(n-m+1)\frac{g\lambda^2}{2}$$

und zur Berechnung von V_m:

$$S = m(m-1)\frac{g\lambda^2}{2} + m g_z \lambda^2,$$

$$S' = (n-m)(n-m+1)\frac{g\lambda^2}{2} - (n-m) g_z \lambda^2.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in 2) ergeben sich die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte, welche wir wie die entsprechenden M, M', H durch deutsche Buchstaben bezeichnen und kurz *Eigengewichtsbeanspruchungen* nennen,

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp\left[m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\mathfrak{M} + m(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H}) - n\mathfrak{z}_m\mathfrak{H}\right]\frac{x_m}{l h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm\left[(m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n}\right. \\ \qquad \left. + (n-m+1)\mathfrak{M} + (m-1)(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H}) - n\mathfrak{x}_{m-1}\mathfrak{H}\right]\frac{z_m}{l h_{m-1}}, \\ \mathfrak{D}_m = \mp\left[\varepsilon\left(m\frac{n-m}{\varepsilon} - n + 2m - 1\right)\frac{gl^2}{2n}\right. \\ \qquad \left. + (n-m+\varepsilon)\mathfrak{M} + (m-\varepsilon)(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H}) - n w_d \mathfrak{H}\right]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \\ \mathfrak{V}_m = \pm\left[\nu\left(m\frac{n-m}{\nu} - n + 2m - \frac{g_x - g_z}{g}\right)\frac{gl^2}{2n}\right. \\ \qquad \left. + (n-m+\nu)\mathfrak{M} + (m-\nu)(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H}) - n w_v \mathfrak{H}\right]\frac{1}{\nu l}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnbelastung zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, so ist das Eigengewicht g_f der Fahrbahn einzuschliessen bei Berechuung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_z, bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x. Ferner hat man dann nach 7):

$$(11)\qquad \mathfrak{V}'_m = \mathfrak{V}_m - g_f\lambda.$$

Es handle sich nun um diejenigen Theile der Stabkräfte, welche von einer beliebigen Fahrbahnbelastung herrühren, haben wir dann innerhalb l die Fahrbahnlasten P_1, P_2, .. bei den Abscissen a_1, a_2, ..

und bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so liefert § 10, 2):

$$S = \sum_0^c Pa + \frac{c}{\lambda}\sum_c^v P(v-a),$$

$$S' = \sum_v^l P(l-a) + \frac{l-v}{\lambda}\sum_c^v P(a-c),$$

womit die Gleichungen 2) gelten. Ueberspannen die Fahrbahnträger, wie gewöhnlich, je ein Feld, dann hat man (Fig. 69, 70)

(12) für X_m, Z_m, D_m, $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

für V_m, wenn die Fahrbahnlast angreift

a) in den Knotenpunkten der X-Gurtung:

(13) $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

b) in den Knotenpunkten der Z-Gurtung:

(14) $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$.

Mit Rücksicht auf diese Werthe ergibt die Substitution der darüber stehenden S, S' in 2) folgende Stabbeanspruchungen:

$$(15)\quad X_m = \mp\Big[(n-m)\Big(M + \sum_0^m Pa\Big) + m\Big(M' + \sum_m^n P(l-a) + kH\Big) - n\mathfrak{z}_m H\Big]\frac{x_m}{lh_m},$$

$$(16)\quad Z_m = \pm\Big[(n-m+1)\Big(M + \sum_0^{m-1} Pa\Big) + (m-1)\Big(M' + \sum_{m-1}^n P(l-a) + kH\Big) - n\mathfrak{x}_{m-1}H\Big]\frac{z_m}{lh_{m-1}},$$

$$(17)\quad D_m = \mp\Big[(n-m+\varepsilon)\Big(M + \sum_0^{m-1} Pa\Big) + \sum_{m-1}^m P((m-1)\varepsilon l + (n-m+\varepsilon-\varepsilon n)a) + (m-\varepsilon)\Big(M' + \sum_m^n P(l-a) + kH\Big) - nw_d H\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Diese Ausdrücke gelten allgemein. Ferner hat man:

a) wenn die Fahrbahnlast in Knotenpunkte m der X-Gurtung eingreift:

$$(18)\quad V_m = \pm\Big[(n-m+\nu)\Big(M+\sum_0^{m-1} P a\Big) + \sum_{m-1}^{m} P\big((m-1)\nu l + (n-m+\nu-\nu n) a\big) + (m-\nu)\Big(M' + \sum_m^n P(l-a) + k H\Big) - n w_\nu H\Big]\frac{1}{\nu l},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung eingreift:

$$(19)\quad V_m = \pm\Big[(n-m+\nu)\Big(M+\sum_0^{m} P a\Big) + \sum_{m}^{m+1} P\big((\nu+1) m l + (\nu-\nu n-m) a\big) + (m-\nu)\Big(M' + \sum_{m+1}^n P(l-a) + k H\Big) - n w_\nu H\Big]\frac{1}{\nu l}.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 18), diejenige des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 19) bestimmt. In 15)—19) bedeuten die Grenzen der $\sum$ Verticalennummern, die M, M', H rühren von den in Betracht gezogenen Fahrbahnlasten allein her.

Das im Anschlusse an § 16, 8) bezüglich der Gültigkeit der Formeln Gesagte bleibt auch für die in diesem § erhaltenen Gleichungen bestehen. Die abgeleiteten Gleichungen wie die daraus folgenden der §§ 19—22 gelten natürlich auch für die im vorliegenden Werke nicht besonders behandelten statisch unbestimmten Träger des angenommenen Systems. Hat man für solche, gleichgültig auf welche Art, M, M', H bestimmt, so können daraus die Stabkräfte und mittelst der Methode § 12 f oder § 12 e auch die Grenzwerthe der Stabkräfte berechnet werden. — (Aufgaben 26—28.)

§ 19. Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen. Berechnung einer Grenzbeanspruchung aus der andern bei gleichmässig vertheilten Lasten.

Wenn ein Träger für gleichmässig vertheilte feste Last (Eigengewicht) und gleichmässig vertheilte bewegte Last (Verkehrslast) berechnet wird, so kann es angezeigt sein, das Eigengewiaht per Längeneinheit für verschiedene Oeffnungen und die Verkehrslast per Längeneinheit für die beiden Grenzwerthe einer Stabkraft oder sonstigen statischen Einwirkung verschieden anzunehmen. Wir wollen nun aber den häufig vorkommenden Fall voraussetzen, dass das Eigengewicht für die ganze Länge eines Trägers beliebiger Art und Form als gleichmässig vertheilt gilt und die beiden Grenzbeanspruchungen eines bestimmten Stabes des oben genannten Systems mit derselben gleichmässig vertheilten Verkehrslast zu berechnen sind. Unter diesen Umständen sollen Formeln gegeben werden, mittelst welcher nach Kenntniss einer Grenzbeanspruchung und der Beanspruchung durch Eigengewicht allein die andre Grenzbeanspruchung mit grösster Leichtigkeit berechnet werden kann.

Bezeichnen B_1, B_2 die beiden Grenzwerthe einer Stabkraft B, $\mathfrak{B}$ deren Werth für Eigengewicht allein und B_p den Werth von B, welchen die Verkehrslast bei Ausdehnung auf den ganzen Träger für sich bewirken würde, so hat man nach § 12, 5) unter obigen Voraussetzungen:

$$(1) \qquad B_1 + B_2 = 2\,\mathfrak{B} + B_p.$$

Für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte bestehen nach § 18, 10) die Gleichungen:

$$\mathfrak{X}_m = \mp\left[m(n-m)\frac{l\lambda}{2} + (n-m)\frac{\mathfrak{M}}{g} + m\,\frac{\mathfrak{M}' + k\,\mathfrak{H}}{g} - \frac{\mathfrak{H}}{g}\,n\,\mathfrak{z}_m\right]\frac{g\,x_m}{l\,h_m},$$

$$\mathfrak{Z}_m = \pm\Big[(m-1)\,(n-m+1)\,\frac{l\lambda}{2} + (n-m+1)\,\frac{\mathfrak{M}}{g}$$
$$+ (m-1)\,\frac{\mathfrak{M}' + k\,\mathfrak{H}}{g} - \frac{\mathfrak{H}}{g}\,n\,\mathfrak{x}_{m-1}\Big]\frac{g\,z_m}{l\,h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{D}_m = \mp\Big[\varepsilon\left(m\,\frac{n-m}{\varepsilon} - n + 2m - 1\right)\frac{l\lambda}{2} + (n-m+\varepsilon)\,\frac{\mathfrak{M}}{g}$$
$$+ (m-\varepsilon)\,\frac{\mathfrak{M}' + k\,\mathfrak{H}}{g} - \frac{\mathfrak{H}}{g}\,\eta\,w_d\Big]\frac{g\,d_m}{\varepsilon\,l\,h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{V}_m = \pm\Big[\nu\left(m\,\frac{n-m}{\nu} - n + 2m - \frac{g_x - g_z}{g}\right)\frac{l\lambda}{2} + (n-m+\nu)\,\frac{\mathfrak{M}}{g}$$
$$+ (m-\nu)\,\frac{\mathfrak{M}' + k\,\mathfrak{H}}{g} - \frac{\mathfrak{H}}{g}\,n\,w_v\Big]\frac{g}{\nu\,l}.$$

Wenn nun $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{H}$ gleich Null oder proportional g sind, wie immer wenn die Beanspruchungen nur von den Lasten herrühren (§ 12, Absatz 2), dann sind die grossen Klammerausdrücke in den drei ersten dieser Gleichungen unabhängig von g, wir können aus ihnen auch die Stabkräfte für eine auf die ganze Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit entnehmen. Im Weiteren bezeichnen X_m, Z_m, D_m, V_m Grenzwerthe, doch ist der eine Grenzwerth einer Stabkraft zur Unterscheidung von andern durch eine Klammer ausgezeichnet.

Gurtungen und Diagonalen. Für diese können wir mit Rücksicht auf das soeben Gesagte Gleichung 1) wie folgt ausdrücken:

$$X_m + (X_m) = 2\mathfrak{X}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{X}_m = \frac{g+q}{g}\mathfrak{X}_m, \tag{2}$$

$$Z_m + (Z_m) = 2\mathfrak{Z}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{Z}_m = \frac{g+q}{g}\mathfrak{Z}_m, \tag{3}$$

$$D_m + (D_m) = 2\mathfrak{D}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{D}_m = \frac{g+q}{g}\mathfrak{D}_m, \tag{4}$$

und damit haben wir bereits Formeln der verlangten Art. Wenn eine Grenzbeanspruchung für Eigengewicht allein eintritt, vereinfachen sich dieselben noch. Wir erhalten:

$$\text{für } (X_m) = \mathfrak{X}_m \qquad X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \tag{5}$$

$$\text{„} \quad (Z_m) = \mathfrak{Z}_m \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m, \tag{6}$$

$$\text{„} \quad (D_m) = \mathfrak{D}_m \qquad D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m. \tag{7}$$

Für Balkenfachwerke mit zwei Gelenkauflagern des betrachteten Systems beispielsweise gelten 5) 6) immer, 7) jedoch nur bei gewissen ungewöhnlichen Gurtungsformen (§ 32). Ist die Eigengewichtsbeanspruchung eines Gurtungsstabes oder einer Diagonale gleich Null, dann sind nach 2)—4) die beiden Grenzbeanspruchungen numerisch gleich und von verschiedenen Vorzeichen.

Verticalen. Jenachdem die Fahrbahnlast auf Knotenpunkt m der X-Gurtung wirkt, wie g_x, oder auf Knotenpunkt m der Z-Gurtung, wie g_z, können wir Gleichung 1) mit Rücksicht auf den Ausdruck für $\mathfrak{V}_m$ wie folgt schreiben:

$$V_m + (V_m) = 2\mathfrak{V}_m \pm \Big[\nu\Big(m\frac{n-m}{\nu} - n + 2m - 1\Big)\frac{l\lambda}{2}$$
$$+ (n-m+\nu)\frac{\mathfrak{M}}{g} + (m-\nu)\frac{\mathfrak{M}'+k\mathfrak{H}}{g} - \frac{\mathfrak{H}}{g}n\,w_v\Big]\frac{p}{\nu l},$$

$$V_m + (V_m) = 2\mathfrak{V}_m \pm \left[\nu\left(m\,\frac{n-m}{\nu} - n + 2m + 1\right)\frac{l\lambda}{2}\right.$$
$$\left. + (n - m + \nu)\frac{\mathfrak{M}}{g} + (m-\nu)\frac{\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H}}{g} - \frac{\mathfrak{H}}{g}\,n\,w_v\right]\frac{p}{\nu l},$$

oder auch:

$$V_m + (V_m) = 2\mathfrak{V}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{V}_m \mp \frac{p\lambda}{2} \pm \frac{g_x - g_z}{g}\,\frac{p\lambda}{2},$$
$$V_m + (V_m) = 2\mathfrak{V}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{V}_m \pm \frac{p\lambda}{2} \pm \frac{g_x - g_z}{g}\,\frac{p\lambda}{2},$$

woraus wegen $g_x + g_z = g$:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

(8) $$V_m + (V_m) = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{V}_m \mp \frac{p\lambda}{g}\,g_z,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

(9) $$V_m + (V_m) = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{V}_m \mp \frac{p\lambda}{g}\,g_x.$$

Vereinfachungen treten wieder ein, wenn eine Grenzbeanspruchung bei Belastung durch Eigengewicht allein entsteht. Wir erhalten:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

(10) für $(V_m) = \mathfrak{V}_m$ $$V_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_m \mp \frac{p\lambda}{g}\,g_z,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

(11) für $(V_m) = \mathfrak{V}_m$ $$V_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_m \pm \frac{p\lambda}{g}\,g_x.$$

Bei Balkenfachwerken mit zwei Gelenkauflagern des betrachteten Systems beispielsweise bestehen die Gleichungen 10) 11) für gewisse ungewöhnliche Gurtungsformen. Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Formeln a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Formeln b).

Soll das Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, wie es vielfach zulässig ist, so erhält man aus 8) 9), gleichgültig auf welche Gurtung die Fahrbahnlast wirkt:

12) $$V_m + (V_m) = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{V}_m$$

und speziell:

$$(13) \qquad \text{für } (V_m) = \mathfrak{V}_m \qquad V_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{V}_m\,.$$

Auf diese Gleichungen hätten wir schon aus § 12, 7) 8) schliessen können, ja bei einiger Ueberlegung selbst auf 2) bis 7), obwohl die letzteren nicht voraussetzen, dass das Eigengewicht nur in denselben Knotenpunkten wie die Verkehrslast angreift.

Wir haben oben angenommen, dass bei Berechnung einer Stabkraft das Eigengewicht per Längeneinheit auf dem ganzen Träger und die Verkehrslast per Längeneinheit auf jeder ergriffenen Strecke constant sind. Es genügt jedoch selbstverständlich, wenn jene Lasten auf denjenigen Strecken constante Werthe haben, auf welchen die Belastung überhaupt von Einfluss auf die betreffende Stabkraft ist. Dagegen gelten die abgeleiteten Gleichungen nicht oder nur angenähert, wenn die Grenzwerthe selbst nur nach Näherungsformeln berechnet sind, wozu auch die Formeln für vorausbestimmte Knotenpunktslasten gehören (§ 12, d). Auch dürfen die Grenzbeanspruchungen des betreffenden Stabes nicht durch etwa vorhandene Gegendiagonalen beeinflusst sein.

Bezüglich der Gültigkeit der Formeln bei wechselnder Stellung der Diagonalen, wenn also die X-Gurtung bald oben, bald unten liegt, ist auf das im Anschlusse an § 16, 8) Gesagte zu verweisen.

§ 20. Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen und einer geraden Gurtung. Einfluss des Horizontalschubs. †

Bei einem Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen seien die Stützpunkte 0 und l einer Oeffnung durch eine gerade Gurtung verbunden, während Form und Art des Trägers im Uebrigen beliebig sein können. Es handelt sich darum, zu entscheiden, welchen Einfluss ein etwa vorhandener Horizontalschub H auf die Stäbe der fraglichen Oeffnung ausübt, wenn nur verticale Activkräfte (Lasten) wirken.

Nach § 18, 2) hat man die Beiträge des Horizontalschubs zu den Stabkräften bei beliebigen Formen beider Gurtungen:

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} X_m &= \pm H\left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}\,k\right)\frac{x_m}{\lambda h_m}\,,\\ Z_m &= \mp H\left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}\,k\right)\frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}\,,\\ D_m &= \pm H\left(w_d - \frac{m-\varepsilon}{n}\,k\right)\frac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}}\,,\\ V_m &= \mp H\left(w_v - \frac{m-\nu}{n}\,k\right)\frac{1}{\nu\lambda}\,,\end{aligned}\right.$$

also, nebenbei bemerkt, proportional H. In 1) sind nach § 16, 5) 6):

$$(2)\qquad \begin{cases} w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon\,(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \varepsilon\,(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1})\,, \\ w_v = \mathfrak{x}_m - \nu\,(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) = \mathfrak{z}_m - \nu\,(\mathfrak{z}_{m+1} - \mathfrak{z}_m)\,. \end{cases}$$

Der erwähnte Verbindungsgurt kann nun im Felde m die X-Gurtung oder Z-Gurtung bilden.

Gerader Verbindungsgurt als X-Gurtung. Für diesen Fall haben wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_m = \dfrac{m}{n}\,k\,, & x_m = x\,, \\ w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon\,\dfrac{k}{n}\,, & w_v = \mathfrak{x}_m - \nu\,\dfrac{k}{n}\,, \end{cases}$$

und hiermit nach 1):

$$(4)\qquad Z_m = D_m = V_m = 0,$$

$$(5)\qquad X_m = \pm\, H\left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}\,k\right)\frac{x}{\lambda h_m}\,.$$

Da die Länge der Verticale m

h_m gleich dem Absolutwerthe von $\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}\,k$

ist, so wird der Beitrag von H zu X_m numerisch gleich $H\,\frac{x}{\lambda}$.

Gerader Verbindungsgurt als Z-Gurtung. In diesem Falle hat man:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_m = \dfrac{m}{n}\,k\,, & z_m = z\,, \\ w_d = \mathfrak{z}_m - \varepsilon\,\dfrac{k}{n}\,, & w_v = \mathfrak{z}_m - \nu\,\dfrac{k}{n}\,, \end{cases}$$

und hiermit nach 1):

$$(7)\qquad X_m = D_m = V_m = 0\,,$$

$$(8)\qquad Z_m = \mp\, H\left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}\,k\right)\frac{z}{\lambda h_{m-1}}\,.$$

Da die Länge der Verticale $m - 1$

h_{m-1} gleich dem Absolutwerthe von $\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}\,k$

ist, so wird der Beitrag von H zu Z_m numerisch gleich $H\,\frac{z}{\lambda}$.

Vorstehende Ableitung zeigt, *dass der Horizontalschub auf sämmtliche nicht zum geraden Verbindungsgurte gehörigen Stäbe überhaupt keinen Einfluss ausübt, wogegen er jenem Verbindungsgurte eine überall gleiche Beanspruchung ertheilt, dessen Horizontalcomponente numerisch gleich dem Horizonlalschube selbst ist.* Hiernach kann die Berechnung mancher Träger wesentlich erleichtert und beispielsweise auch der Einfluss der Reibung verschiebbarer Auflager in den gewöhnlichen Fällen auf einfache Weise berücksichtigt werden.

Wir haben oben angenommen, dass die Punkte 0 und l eine Trägeröffnung als Stützpunkte begrenzen. Nach dem am Schlusse von § 16 Gesagten dürfen es aber auch beliebige Knotenpunkte irgend zweier Verticalen sein, zwischen welchen sich kein Stützpunkt befindet, und deren horizontale Entfernung $l = n\lambda$ gesetzt wird. Demnach müssen z. B. bei einem Trapezbogenfachwerk mit drei Gelenken (§ 72) die Beanspruchung und Grenzbeanspruchungen eines nicht zum Verbindungsgurte jener Gelenke gehörigen Stabes genau so gross sein, als wenn das Trägerstück, zu welchem der Stab gehört, für sich vorhanden und durch ein festes und ein horizontal frei verschiebbares Gelenkauflager (gewöhnliche Balkenfachwerke, III. Abschnitt) begrenzt wäre.

§ 21. Balkenfachwerke einfachen Systems mit Verticalen und parallelen Gurtungen.†

Für beliebige Balkenfachwerke ist in den Gleichungen des § 18 der Horizontalschub $H = \mathfrak{H} = 0$, womit einige Vereinfachungen eintreten. Wir wollen jedoch nur für Balkenträger mit parallelen Gurtungen spezialisiren und zunächst den gewöhnlichen Fall voraussetzen, dass die Gurtungen horizontal sind. Alsdann hat man:

(1) $$x_m = z_m = \lambda, \quad h_m = h, \quad d_m = d, \quad \varepsilon = \nu = \infty$$

und damit nach § 18, 2)—4) für beliebige Belastung:

(1) $$\begin{cases} X_m = \mp\left[(n-m)(M+S) + m(M'+S')\right]\frac{1}{nh}, \\ Z_m = \pm\left[(n-m+1)(M+S) + (m-1)(M'+S')\right]\frac{1}{nh}, \\ D_m = \pm\left[M'+S'-M-S\right]\frac{d}{lh}, \\ V_m = \mp\left[M'+S'-M-S\right]\frac{1}{l}, \end{cases}$$

(3) $$X_m + Z_m + \frac{\lambda}{d} D_m = 0, \qquad Z_{m+1} = -X_m.$$

Zu beachten ist, dass die Momente S, S' in der letzten Gleichung 2) von den gleich bezeichneten in den übrigen Gleichungen im Allgemeinen verschieden sind. Die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die Knotenpunkte m der X-Gurtung und Z-Gurtung ergibt weiter:

(4) $$V_m + \frac{h}{d} D_{m+1} \pm K_x = 0, \qquad V_m + \frac{h}{d} D_m \mp K_z = 0,$$

unter K_x, K_z die Belastungen jener Knotenpunkte verstanden.

Soll das Eigengewicht innerhalb der betrachteten Oeffnung l als gleichmässig vertheilt gelten, dann folgen aus § 18, 10) die Beanspruchungen durch das gesammte Eigengewicht allein:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\mathfrak{X}_m = \mp\left[m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\mathfrak{M} + m\mathfrak{M}'\right]\frac{1}{nh}, \\
\mathfrak{Z}_m = \pm\left[(m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+1)\mathfrak{M} + (m-1)\mathfrak{M}'\right]\frac{1}{nh}, \\
\mathfrak{D}_m = \pm\left[(n-2m+1)\frac{gl^2}{2n} + \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}\right]\frac{d}{lh}, \\
\mathfrak{V}_m = \mp\left[\left(n-2m+\frac{g_x-g_z}{g}\right)\frac{gl^2}{2n} + \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}\right]\frac{1}{l}.
\end{cases}
$$

Durch beliebige Belastung der Fahrbahn entstehen nach § 18, 15) bis 19) die Stabkräfte:

$$
(6)\qquad X_m = \mp\left[(n-m)\left(M + \sum_0^m Pa\right) + m\left(M' + \sum_m^n P(l-a)\right)\right]\frac{1}{nh},
$$

$$
(7)\qquad Z_m = \pm\left[(n-m+1)\left(M + \sum_0^{m-1} Pa\right)\right.
$$

$$
\left. + (m-1)\left(M' + \sum_{m-1}^n P(l-a)\right)\right]\frac{1}{nh},
$$

$$
(8)\qquad D_m = \pm\left[M' - M - \sum_0^{m-1} Pa - (n-1)\sum_{m-1}^m P\left(\frac{m-1}{n-1}l - a\right)\right.
$$

$$
\left. + \sum_m^n P(l-a)\right]\frac{d}{lh},
$$

sowie, wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$
(9)\qquad V_m = \mp\left[M' - M - \sum_0^{m-1} Pa - (n-1)\sum_{m-1}^m P\left(\frac{m-1}{n-1}l - a\right)\right.
$$

$$
\left. + \sum_m^n P(l-a)\right]\frac{1}{l},
$$

und wenn sie im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$
(10)\qquad V_m = \pm\left[M' - M - \sum_0^m Pa - (n-1)\sum_m^{m+1} P\left(\frac{m}{n-1}l - a\right)\right.
$$

$$
\left. + \sum_{m+1}^n P(l-a)\right]\frac{1}{l}.
$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, so ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 9), diejenige des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 10) bestimmt.

Die abgeleiteten Gleichungen gelten auch für Parallelträger mit nicht horizontalen Gurtungen, wenn nur in den Ausdrücken der Gurtungskräfte hinter der letzten Klammer $\frac{x}{lh}$ an Stelle von $\frac{1}{nh}$ und in der ersten Gleichung 3) x an Stelle von λ gesetzt werden, unter x die Länge eines Gurtungsstabes verstanden. Obige Gleichungen hätten insbesondere für continuirliche Balkenträger zur Verwendung zu kommen.

§ 22. Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen. Verschiedene Anordnung der Diagonalen.†

Wie die Formeln des § 18 zeigen, sind die Beanspruchungen bestimmter Stäbe je nach der Anordnung der Diagonalen oder Lage der X-Gurtung verschieden. Es bestehen jedoch zwischen diesen verschiedenen Beanspruchungen für jeden angenommenen Belastungsfall gewisse Beziehungen, welche unter Umständen nützliche Verwendung finden können und deshalb abgeleitet werden sollen. Wir führen die in Fig. 129 ersichtlichen Bezeichnungen der Stablängen ein. Ferner soll die Länge der Diagonale des $m$ten Feldes bei oben liegender X-Gurtung (Fig. 130) durch d_m, bei unten liegender X-Gurtung (Fig. 131) durch d'_m bezeichnet sein. Die Beanspruchungen der obern Gurtung, untern Gurtung und Diagonale im Felde m seien bei oben liegender X-Gurtung durch X_m, Z_m, D_m, bei unten liegender X-Gurtung durch Z'_m, X'_m, D'_m vertreten. Bezüglich der Anordnung der Diagonalen in den einer Verticale m anliegenden Feldern sind die in Fig. 132—135 angedeuteten Fälle möglich, welchen entsprechend wir vier verschiedene Bezeichnungen der Verticalenbeanspruchung eingeschrieben haben. V_m, V'_m sowie die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen sind in § 18 für alle Fälle ausgedrückt. Schliesslich mögen $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{u}_m$ die Ordinaten der Knotenpunkte m im Obergurt und Untergurt bedeuten.

Diagonalen. Nach § 18,2) hat man bei jeder bestimmten Belastung:

$$(1) \qquad \frac{D'_m}{d'_m} = -\frac{D_m}{d_m}.$$

Wenn also von den beiden in einem Felde möglichen Diagonalen eine vorhanden ist und diese gezogen wird, so würde die andre,

wenn allein vorhanden, im gleichen Belastungsfalle gedrückt und umgekehrt. Sind beide möglichen Diagonalen vorhanden, aber nur für Zug oder nur für Druck widerstandsfähig, so kommt in jedem Belastungsfalle nur eine derselben zur Wirkung. Hieraufberuht die Anwendung der Gegendiagonalen (§ 13, Abschnitt IV).

Gurtungen. Nach § 16 und § 18, 2) sind die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen eines Feldes unabhängig von den Stellungen der Diagonalen in andern Feldern. Bezeichnet nun R die resultirende Horizontalcomponente der im Knotenpunkte $m-1$ des Obergurts angreifenden Stabkräfte des Feldes $m-1$, so liefert die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf den oberen Knotenpunkt $m-1$ der Fig. 130 und 131:

$$X_m \frac{\lambda}{o_m} + D_m \frac{\lambda}{d_m} = R,$$

$$Z'_m \frac{\lambda}{o_m} \qquad\qquad = R,$$

woraus durch Subtraction:

$$Z'_m = X_m + \frac{o_m}{d_m} D_m. \tag{2}$$

Bezeichnet ferner R' die resultirende Horizontalcomponente der im Knotenpunkte $m+1$ des Untergurts angreifenden Stabkräfte des Feldes $m+1$, so ergibt die eben erwähnte Bedingung in Anwendung auf den untern Knotenpunkt m der Fig. 130 und 131:

$$Z_m \frac{\lambda}{u_m} + D_m \frac{\lambda}{d_m} = R',$$

$$X'_m \frac{\lambda}{u_m} \qquad\qquad = R',$$

woraus durch Subtraction:

$$X'_m = Z_m + \frac{u_m}{d_m} D_m. \tag{3}$$

Die Gleichungen 2) 3) lassen sich mit Rücksicht auf 1) noch anders ausdrücken und ergeben:

$$\frac{Z'_m - X_m}{o_m} = \frac{X'_m - Z_m}{u_m}. \tag{4}$$

Verticalen. Wird die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" auf den Knotenpunkt m des Obergurts angewandt, so erhält man

für Fig. 132: $$V_m + K_0 + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}}{o_m} X_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m+1}}{o_{m+1}} X_{m+1}$$

$$+ \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1} = 0,$$

für Fig. 133: $(V_m) + K_0 + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}}{o_m} X_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m+1}}{o_{m+1}} Z'_{m+1} = 0$,

für Fig. 134: $V'_m + K_0 + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}}{o_m} Z'_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m+1}}{o_{m+1}} Z'_{m+1}$

$$+ \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m-1}}{d'_m} D'_m = 0,$$

für Fig. 135: $(V'_m) + K_0 + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}}{o_m} Z'_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m+1}}{o_{m+1}} X_{m+1}$

$$+ \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m-1}}{d'_m} D'_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1} = 0.$$

Durch Subtraction entstehen aus der ersten und zweiten Gleichung:

$$(V_m) - V_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m+1}}{o_{m+1}} (Z'_{m+1} - X_{m+1}) - \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1} = 0,$$

aus der zweiten und dritten:

$$(V_m) - V'_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}}{o_m} (X_m - Z'_m) - \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m-1}}{d'_m} D'_m = 0,$$

aus der dritten und vierten:

$$(V'_m) - V'_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m+1}}{o_{m+1}} (X_{m+1} - Z'_{m+1}) + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1} = 0,$$

und aus der vierten und ersten:

$$(V'_m) - V_m + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}}{o_m} (Z'_m - X_m) + \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m-1}}{d'_m} D'_m = 0.$$

Von den vier so erhaltenen Formeln liefern mit Rücksicht auf 1) 2) die beiden ersten:

$$(5) \qquad (V_m) = V_m + \frac{h_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1} = V'_m - \frac{h_{m-1}}{d_m} D_m,$$

und die beiden letzten:

$$(6) \qquad (V'_m) = V'_m - \frac{h_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1} = V_m + \frac{h_{m-1}}{d_m} D_m.$$

Diese Beziehungen können wieder mit Rücksicht auf 1) — 3) in mancherlei andere Formen gebracht werden. Durch Addition folgt

$$(7) \qquad (V_m) + (V'_m) = V_m + V'_m.$$

III. Abschnitt.

Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern.

In diesem Abschnitte betrachten wir Träger mit einem festen und einem horizontal frei verschiebbaren Gelenkauflager, Bei Weitem die meisten der im Ingenieurwesen und Hochbau vorkommenden ebenen Träger werden als solche einfache Balkenträger angesehen. Die vielfache Verwendung ist durch die constructive Einfachheit und statische Bestimmtheit der Trägerart, sowie dadurch bedingt, dass in dem gewöhnlichen Falle nur verticaler Activkräfte (Lasten) auch nur verticale Drücke auf die Stützen entstehen, was für die Stabilität der Letzteren günstig ist. Die grosse Bedeutung des Trägers rechtfertigt eine besonders eingehende Behandlung desselben.

§ 23. Beliebige Belastung beliebiger Systeme.

Form und System des Trägers können beliebig sein, sodass die Beziehungen dieses und der beiden folgenden Paragraphen auch für statisch unbestimmte Fachwerke und vollwandige Träger gelten. Der Ursprung der Coordinaten liege im Gelenkpunkte links, für den Gelenkpunkt rechts seien l, k die Coordinaten. Werden die Schnitte 0 und l so durch die Punkte 0 und l gelegt (Fig. 136), dass von äusseren Kräften links von 0 nur die Stützenreaction V und rechts von l nur die Stützenreaction V' bleibt, dann hat man nach § 8, 6) das Moment der äussern Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger in Hinsicht irgend eines Drehpunkts der Abscisse u:

$$(1) \qquad M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S',$$

worin S das Moment der zwischen den Schnitten 0 und s auf den Träger wirkenden Lasten in Hinsicht des Punktes 0 und S' das Moment der zwischen den Schnitten s und l auf den Träger wirkenden Lasten in Hinsicht des Punktes l. Greifen die Lasten K_1, $K_2 \dots$ bei den Abscissen e_1, $e_2 \dots$ am Träger an, so hat man

(2) $$M_s = \frac{l-u}{l}\sum_0^s Ke + \frac{u}{l}\sum_s^l K(l-e),$$

und nach § 8, 8) die Stützenreactionen:

(3) $$V = \frac{1}{l}\sum_0^l K(l-e), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Ke.$$

Wirken irgendwelche Lasten $P_1, P_2, \ldots$ bei $a_1, a_2 \ldots$ zunächst auf ein System von Zwischenträgern und bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so liefert 1) wegen § 10, 2) für diese Lasten:

(4) $$\begin{cases} M_s = \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a) \\ \text{mit } z = \frac{v-u}{cl - u(l-v+c)}\, cl, \end{cases}$$

während nach § 10 die entsprechenden Stützenreactionen:

(5) $$V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Pa.$$

Die Grenzen 0, s, l in sämmtlichen Gleichungen bedeuten Schnitte, nicht Abscissen, was nur bei Verticalschnitten auf eins herauskommt. Nach 4) hat man

$$\begin{array}{llllllll} \text{für } u = & -\infty & 0 & c & \frac{c+v}{2} & v & l & \infty \\ z = & \frac{cl}{l+c-v} & v & l & \frac{cl}{c+v-l} & 0 & c & \frac{cl}{l+c-v}. \end{array}$$

Die Influenzlinie einer Einwirkung B entsteht, wenn an jeder Stelle a die Ordinate b gleich dem Factor gemacht wird, mit welchem P für diese Lage a im allgemeinen Ausdrucke für B multiplicirt ist. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten, in welchen Lasten P auf den Träger übertragen werden, verläuft die Influenzlinie geradlinig (§ 11). Demnach ergeben sich aus 4) 5) folgende Verfahren zur Verzeichnung der Influenzlinien.

Influenzlinie für M_s (Fig. 137—139). Man trage bei den Abscissen 0 und l bezw. $u = 00_1$ und $l - u = ll_1$ als Ordinaten an, ziehe die Geraden $0l_1$ und $l0_1$, welche die Perpendikel in c und v bei c_1, v_1 schneiden und verbinde c_1 mit v_1 durch eine Gerade; dann ist $0c_1v_1l$ die Influenzlinie für M_s.

Influenzlinie für V (Fig. 140). Man trage bei 0 als Ordinate $1 = 00_1$ auf, dann hat man in der Geraden $l0_1$ die Influenzlinie von V.

Für eine zwischen den Punkten 0 und l auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit liefern die Gleichungen 4) 5) mit $P = p da$ oder die Influenzlinien mit $B = pF$ oder auch 1) 5) mit § 10, 5) 6)

$$(6) \qquad M_s = [u(l - c - v) + cv] \frac{p}{2},$$

$$(7) \qquad V = V' = \frac{pl}{2}.$$

Während die bis jetzt gefundenen Gleichungen beide Stützpunkte an beliebigen Stellen des Trägers zulassen und auch die verzeichneten Influenzlinien Lasten ausserhalb der Spannweite l berücksichtigen, setzen wir von nun an den allein wichtigen Fall voraus, dass alle Lasten zwischen den Verticallinien durch die Punkte 0 und l angreifen. In den zwei folgenden Paragraphen handelt es sich darum, die Grenzwerthe von M_s und V bei Einwirkung bewegter Lasten festzustellen. Mit den Grenzwerthen von M_s sind für Fachwerke einfachen Systems auch die Grenzbeanspruchungen der Stäbe bestimmt (§ 15).

§ 24. Gleichmässig vertheilte bewegte Last bei beliebigen Systemen.

Es seien $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{V}$ die Beiträge der festen Last zu M_s, V und p die bewegte Last per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Da die bewegte Last auf einer Fahrbahnstrecke den Beitrag pF liefert, unter F die (positive oder negative) Influenzfläche jener Strecke verstanden, so treten die Grenzwerthe von M_s im Falle von Fig. 138 bei Totalbelastung des ganzen Trägers und bei fester Last allein ein, in den Fällen Fig. 137 und 139 aber dann, wenn die bewegte Last einmal von z bis l, das andre Mal von 0 bis z reicht (§ 12, c), wobei:

$$(1) \qquad z = \frac{v - u}{cl - u(l - v + c)} cl$$

die Abscisse des Grenzpunkts der Beitragsstrecken verschiedenen Vorzeichens ist. Wir erhalten als Grenzwerthe von M_s mit Rücksicht auf § 23, 6) und die Ordinatenwerthe:

$$v v_1 = \frac{l - v}{l} u, \qquad c c_1 = \frac{l - u}{l} c,$$

wenn der Drehpunkt u innerhalb der Oeffnung l liegt:

$$(2) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l - c - v) + cv] \frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s;$$

wenn der Drehpunkt u ausserhalb der Oeffnung l liegt:

$$(3)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-z)(l-v)p, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}czp,$$

oder nach Einsetzen von z:

$$(4)\quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u(c-u)(l-v)^2}{l(c-u)+u(v-c)}\frac{p}{2}, \quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{(l-u)(v-u)c^2}{l(c-u)+u(v-c)}\frac{p}{2}.$$

Liegt u gerade an der Grenze von l, das heisst auch z bei c oder v (§ 23), dann müssen natürlich 2) und 3) dieselben Grenzwerthe liefern, deren einer dem Eigengewichte allein entspricht. Die Grenzwerthe von V folgen aus Fig. 140:

$$(5)\qquad V = \mathfrak{V} + \frac{pl}{2}, \qquad V = \mathfrak{V}.$$

Für den gewöhnlichen Fall symmetrisch zur Trägermitte angenommener fester Last sind dies auch die Grenzwerthe von V'.

Soll die feste Last mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge gelten, so hat man:

$$(6)\qquad \mathfrak{V} = \frac{gl}{2},$$

und will man sich diese Last allein auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt denken, in welchen die Fahrbahnlast angreift, womit sie wie eine auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last wirkt, dann wird nach § 23, 6):

$$(7)\qquad \mathfrak{M}_s = [u(l-c-v)+cv]\frac{g}{2}.$$

Die letztere Annahme ist bequem und sehr gebräuchlich. Im Allgemeinen sind $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{V}$ durch § 23, 2) 3) bestimmt.

An Stelle von 3) 4) kann man einfachere Näherungsformeln erhalten. Setzt man einmal etwas zu klein $z = c$, das andre Mal etwas zu gross $z = v$ (Fig. 137, 139), so ergeben sich:

$$(8)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-c)(l-v)p, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}cvp.$$

Setzt man dagegen einmal etwas zu gross $z = v$, das andre Mal etwas zu klein $z = c$, dann folgen

$$(9)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-v)^2 p, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}c^2 p.$$

Bei bestimmtem p liefern die Formeln 8) zu ungünstige, die Formeln 9) zu günstige Werthe, weshalb man die ersteren vorziehen wird. Die Differenzen gegen die genauen Werthe sind um so kleiner, je kleiner $v - c$ im Vergleiche zu den $l - c$, $l - v$, c, v ist.

Ist die Anordnung der Stäbe zur Verticalen durch die Trägermitte symmetrisch, so hat man bei ebenfalls symmetrischer fester Last nur eine Trägerhälfte zu berechnen, bei unsymmetrischer fester Last würde dies nur bezüglich der Beanspruchungen durch die Verkehrslast gelten. — (Beispiele 23 u. 26).

§ 25. Bewegte Radlastzüge bei beliebigen Systemen.

Bezüglich der Beiträge $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{V}$ der festen Last zu M_s, V gilt das im vorigen Paragraphen Gesagte. Im Folgenden beziehen sich die Summen $\sum$ nur auf die bewegten Lasten ihrer Strecken. Nach § 23, 4) 5) hat man dann bei jeder Belastung für beliebige Schnitte s:

$$(1)\quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a)$$

$$(2)\qquad \text{mit}\quad z = \frac{v-u}{cl - u(l-v+c)}\, cl$$

und die Stützenreaction bei 0:

$$(3)\qquad V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a).$$

Anstatt 1) kann man mit Rücksicht auf 2) auch schreiben:

$$(4)\quad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_v^c Pa + \frac{v-u}{v-c}\frac{c}{z}\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a).$$

Sind verschiedene Radlastsysteme auf dem Träger möglich, so liefert das Verfahren § 12 b mit Rücksicht auf die Influenzlinien Fig. 137—140 und Gleichung 1) folgende Grenzwerthe. Wenn der Drehpunkt u innerhalb der Oeffnung l liegt:

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O

bei c für $z > v$, bei v für $z < c$, M_s nach 1) 4),

Belastung durch die feste Last allein, $M_s = \mathfrak{M}_s$;

wenn der Drehpunkt u ausserhalb der Oeffnung l liegt:

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(5)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(6)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa.$$

Die Grenzwerthe von V ergeben sich nach 2) oder Fig. 140 wie folgt:

Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0, V nach 3),

Belastung durch die feste Last allein, $V = \mathfrak{V}$.

Für den gewöhnlichen Fall symmetrisch zur Verticallinie durch die Trägermitte liegender fester Last sind dies auch die Grenzwerthe von V'.

Wird ein bestimmtes System gleichzeitig auf dem Träger Platz findender Lasten in festen Entfernungen nur unendlich wenig fortbewegt, so ändern sich in 1) 3) alle a um das gleiche da, das Moment ändert sich um:

$$(7) \qquad dM_s = \left(\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{u}{l}\sum_0^l P\right) da,$$

und die Stützenreaction V um:

$$(8) \qquad dV = -\frac{1}{l}\sum_0^l P da.$$

Für diejenigen Laststellungen, welchen Maxima oder Minima von M_s entsprechen, hat man nach 7):

$$(9) \qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P = \frac{u}{l}\sum_0^l P,$$

während mathematische Maxima oder Minima von V nicht vorkommen, sondern nach 8) jedes positive da diese Reaction verkleinert, jedes negative da sie vergrössert. Die Grenzwerthe von M_s für das angenommene Lastsystem ergeben sich aus 1) mit Rücksicht auf 7) 9), die Grenzwerthe von V für P_1 bei 0 und P_1 möglichst weit von 0 oder, wenn das Lastsystem entfernt werden kann, für P_1 bei 0 und Belastung durch die feste Last allein.

Hat man bei verschiedenen möglichen Radlastsystemen die Belastungen für die Grenzwerthe von M_s in der zuerst erwähnten Weise angenommen, so könnte mittelst 7) oder 9) noch eine Controle und eventuelle Correctur mit nachfolgender Berechnung von M_s nach 1) stattfinden, was jedoch praktisch selten nöthig sein wird. — Das im letzten Absatze des vorigen Paragraphen Gesagte gilt auch im jetzigen Falle.

Bemerkungen betreffend die Verwendung des Zuges II. Wie schon aus den allgemeinen Erörterungen des § 12 hervorgeht, können in Fällen, für welche oben Belastung durch Zug II angenommen ist (u ausserhalb l, oder s zwischen c und v) unter Umständen etwas ungünstigere Belastungen durch Zug I entstehen. Das steht besonders

dann in Aussicht, wenn ein Grenzwerth für Eigengewicht allein eintritt, oder der Grenzpunkt z ans Ende der Strecke cv fällt (wie es für die Füllungsglieder bei den Trägerenden vorkommt), und wenn $v-c$ im Verhältnisse zu den Radentfernungen um O gross ist. Wer will, kann natürlich beide Züge probiren, was auch wir in den Beispielen thun werden. Im Falle der Verwendung von Zug I tritt für die Grenzwerthe die für beliebige Belastung bestehende Formel 1) oder 4) an Stelle von 5) 6), und Analoges gilt bezüglich der entsprechenden Spezialformeln für bestimmte Systeme. Praktisch ist die Sache nicht von Bedeutung, wenn die Züge I und II genügend ungünstig gewählt werden, was immer zu empfehlen ist. Der von uns gewählte Zug I ist deshalb besonders ungünstig, weil nach den Vereinbarungen deutscher Eisenbahnverwaltungen nur ausnahmsweise Locomotiven mit den Schloten gegeneinander fahren sollen. — (Beispiele 24, 25, 27, 28.)

§ 26. Lastäquivalente bei beliebigen Systemen.

Der Träger werde nun durch Radlastzüge befahren. Es sollen diejenigen Lastäquivalente p ausgedrückt werden, mit welchen die Formeln für gleichmässig vertheilte bewegte Last dieselben Grenzwerthe von M_s, V wie die wirklichen Lasten ergeben. Wie schon in §§ 24, 25 haben wir bezüglich der Grenzwerthe von M_s je nach der Lage des Drehpunkts zwei Fälle zu unterscheiden.

Liegt der Drehpunkt u innerhalb der Spannweite l, so tritt der untere Grenzwerth von M_s bei Einwirkung der festen Last allein ein. Den oberen Grenzwerth erhält man für bewegte Radlastzüge mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei c wenn $z > v$, bei v wenn $z < c$:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \frac{v-u}{v-c}\frac{c}{z}\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

für gleichmässig vertheilte bewegte Last:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l-c-v) + cv]\frac{p}{2}\cdot$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich:

$$(1) \qquad p = \frac{2\,m_s}{u(l-c-v)+cv},$$

worin im ersterwähnten Belastungsfalle:

$$(2) \qquad m_s = \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \frac{v-u}{v-c}\frac{c}{z}\sum_c^v P(z-a) + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a).$$

Liegt der Drehpunkt u ausserhalb der Spannweite l, so ergibt sich der erste Grenzwerth von M_s für bewegte Radlastzüge mit Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

und für gleichmässig vertheilte bewegte Last:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-z)(l-v)p.$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$(3) \qquad p = \frac{2s_v}{(l-z)(l-v)},$$

worin mit vorerwähnter Belastung:

$$(4) \qquad s_v = \sum_v^l P(l-a).$$

Den zweiten Grenzwerth erhalten wir für bewegte Radlastzüge mit Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa,$$

für gleichmässig vertheilte bewegte Last:

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}czp.$$

Durch Gleichsetzen entsteht:

$$(5) \qquad p = \frac{2r_c}{cz},$$

worin mit der letzterwähnten Radbelastung:

$$(6) \qquad r_c = \sum_0^c Pa.$$

Der untere Grenzwerth der Stützenreactionen tritt bei fester Last allein ein, den oberen Grenzwerth von V erhält man für bewegte Radlastzüge mit Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei 0:

$$V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a),$$

für gleichmässig vertheilte bewegte Last:

$$V = \mathfrak{V} + \frac{pl}{2}.$$

Durch Gleichsetzen wird bei Beachtung von 4):

$$(7) \qquad p = \frac{2 s_0}{l^2},$$

das heisst, es gilt Formel 3) mit $v = 0$ (was $c = z = 0$ zur Folge hat) auch für den oberen Grenzwerth von V.

In allen vorstehenden Formeln ist:

$$(8) \qquad z = \frac{v - u}{cl - u(l - v + c)}\, cl.$$

Hätte man jedoch für u ausserhalb l von dem am Schlusse des § 24 gegebenen Näherungsformeln Gebrauch gemacht, so würden nach 3) 5) entsprechen § 24, 8) mit $z = c$ bezw. $z = v$:

$$(9) \qquad z = \frac{2 s_v}{(l - c)(l - v)}, \qquad p = \frac{2 r_c}{cv},$$

und § 24, 9) mit $z = v$ bezw. $z = c$:

$$(10) \qquad p = \frac{2 s_v}{(l - v)^2}, \qquad p = \frac{2 r_c}{c^2}.$$

Wollte man ferner für u ausserhalb l aber z bei 0 oder l (das heisst auch $c = 0$ oder $v = l$) im Falle bewegter Radlastzüge einen Grenzwerth von M_s (der andre tritt für Eigengewicht allein ein) mit Zug I anstatt mit Zug II berechnen, so würde das Lastäquivalent 1) anstatt 3) oder 5) demselben entsprechen.

Die Formeln 3) 5) wie die zugehörigen Gleichungen für die Grenzwerthe von M_s lassen sich für praktische Berechnungen mit gleichmässig vertheilten Lasten in noch bequemere Formen bringen. — (Beispiele 29 u. 30, Aufgaben 29 u. 30.)

§ 27. **Parallelträger. Einfaches System des gleichschenkligen Dreiecks. Allgemeines.**

Im Hinsicht der geometrischen Anordnung kommen zwei Fälle vor: entweder die äussersten Füllungsglieder fallen nach den Trägerenden hin ab (Fig. 141), oder sie steigen nach ihnen an (Fig. 142). Wir bezeichnen diejenige Gurtung, welche die Füllungsglieder bei den Trägerenden treffen, als Z-Gurtung, die andere als X-Gurtung. Dann gelten in allen für das betrachtete System abzuleitenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung. Die Fahrbahnlast kann in den Knotenpunkten der X-Gurtung allein, oder in denjenigen der Z-Gurtung allein, oder in den Knotenpunkten beider Gurtungen auf den Träger kommen. Letzteres wird bewirkt durch Anwendung von

Hängestangen wie in Fig. 143, oder von Pfosten wie in Fig. 144, oder von Hängestangen und Pfosten wie in Fig. 145. Die Trägerenden werden vielfach bei oben liegender X-Gurtung nach Fig. 146, bei untenliegender X-Gurtung nach Fig. 147 angeordnet.

Wir führen die in Fig. 141 und 142 ersichtlichen Bezeichnungen ein, sodass die Spannweite $l = n\lambda$ ist. Ein Schnitt s sei so gelegt, dass er die mit X_m, Y_m, Z_m beanspruchten Stäbe trifft. Bedeutet dann M_s das Moment der äussern Kräfte des Trägers links von Schnitt s in Hinsicht des gewählten Drehpunkts, so hat man nach Anleitung von § 15

zur Bestimmung von X_m, Abscisse des Drehpunkts $u = m\lambda$,

$$(1) \qquad M_s \pm X_m h = 0, \qquad X_m = \mp \frac{M_s}{h},$$

zur Bestimmung von Z_m, Abscisse des Drehpunkts $u = \frac{2m-1}{2}\lambda$,

$$(2) \qquad M_s \mp Z_m h = 0, \qquad Z_m = \pm \frac{M_s}{h},$$

zur Bestimmung von Y_m, Abscisse des Drehpunkts $u = \infty\lambda$,

$$(3) \qquad M_s \mp Y_m \frac{h}{d} \infty\lambda = 0, \qquad Y_m = \pm \frac{M_s}{\infty\lambda} \frac{d}{h}.$$

Der Hebelarm von Y_m in 3) folgt aus Fig. 148.

Vorstehende Gleichungen gelten für beliebig gerichtete Activkräfte. Setzen wir verticale Activkräfte (Lasten) allein voraus, so ist nach § 23, 1):

$$M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S',$$

und wir erhalten aus 1)—3) bei Berücksichtigung der Werthe von u:

$$(4) \qquad \begin{cases} X_m = \mp [(n-m) S + mS'] \frac{1}{nh}, \\ Z_m = \pm [(2n - 2m + 1) S + (2m-1) S'] \frac{1}{2nh}, \\ Y_m = \pm [S' - S] \frac{d}{lh}, \end{cases}$$

worin S das Moment der Knotenpunktslasten vor Schnitt s in Hinsicht Auflager 0, S' das Moment der Knotenpunktslasten nach Schnitt s in Hinsicht Auflager l bedeutet. Mit den Stabkräften Y_m sind in dem gewöhnlichen Falle symmetrisch zur Verticalen durch die Trägermitte liegender fester Last auch die Stabkräfte Y_m' bestimmt. Allgemein hat man, wenn K_x, K_z' die Belastungen des Knotenpunkts m in X-Gurtung und $m-1$ in Z-Gurtung bezeichnen:

$$(5) \qquad Y_m' + Y_m \pm \frac{d}{h} K_x = 0, \qquad Y_m' + Y_m \mp \frac{d}{h} K_z' = 0.$$

Neben 4) 5) bestehen bei beliebiger Belastung noch die in § 30 gegebenen Gleichungen.

Bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so haben wir

a) wenn die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten der X-Gurtung angreift:

$$(6) \qquad c = \frac{2m-1}{2}\lambda, \qquad v = \frac{2m+1}{2}\lambda,$$

b) wenn die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten der Z-Gurtung angreift,

$$(7) \qquad c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda,$$

c) wenn die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten beider Gurtungen angreift:

$$(8) \qquad c = \frac{2m-1}{2}\lambda, \qquad v = m\lambda.$$

Dabei ist angenommen, dass die Fahrbahnträger in den beiden ersten Fällen von der Länge λ, im letzten von der Länge $\frac{\lambda}{2}$ sind, wie dies immer zutrifft.

Es sollen hier noch die speziellen Ausdrücke der Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein für den Fall abgeleitet werden, dass dieses mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gilt. Wir setzen:

$$(9) \qquad g = g_x + g_y + g_z,$$

unter g_x, g_y, g_z diejenigen Theile von g verstanden, welche in denselben Knotenpunkten übertragen werden wie das Eigengewicht der X-Gurtung, der Füllung und der Z-Gurtung. Das Eigengewicht der Fahrbahn ist also einzuschliessen:

a) wenn die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte der X-Gurtung wirkt, in g_x,

b) wenn die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte der Z-Gurtung wirkt, in g_z,

c) wenn die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte beider Gurtungen wirkt, in g_y.

Selbstverständlich kann man eine oder zwei der Grössen g_x, g_y, g_z gleich Null setzen, falls die entsprechende Last in den verbleibenden Grössen eingeschlossen wird. Wenn eine auf den ganzen Träger gleichmässsig vertheilte Last von p per Längeneinheit durch Fahrbahnträger auf die Hauptträger kommt, so ist nach § 23, 6):

$$M_s = [u(l-c-v) + cv]\frac{p}{2}.$$

Die Lasten g_x, g_y, g_z werden nun in ganz gleicher Weise wie die Fahrbahnlast auf die Hauptträger übertragen, nur dass die aufnehmenden Knotenpunkte und damit die c, v verschieden sind. Wir haben nach vorstehender Gleichung

für g_x mit

$$c = \frac{2m-1}{2}\lambda, \quad v = \frac{2m+1}{2}\lambda, \quad M_s = \left[\frac{u}{\lambda}(n-2m) + m^2 - \frac{1}{4}\right]\frac{g_x \lambda^2}{3},$$

für g_y mit

$$c = \frac{2m-1}{2}\lambda \quad v = m\lambda, \qquad M_s = \left[\frac{u}{\lambda}(n-2m) + m^2 + \frac{u}{2\lambda} - \frac{m}{2}\right]\frac{g_y \lambda^2}{2},$$

für g_z mit

$$c = (m-1)\lambda, \; v = m\lambda, \qquad M_s = \left[\frac{u}{\lambda}(n-2m) + m^2 + \frac{u}{\lambda} - m\right]\frac{g_z \lambda^2}{2}.$$

Durch Addition erhält man das vom Eigengewicht herrührende Gesammtmoment:

$$\mathfrak{M}_s = \left[\frac{u}{\lambda}(n-2m) + m^2\right]\frac{g\lambda^2}{2} + \left(\frac{u}{\lambda} - m\right)\left(g_z + \frac{g_y}{2}\right)\frac{\lambda^2}{2} - \frac{g_x \lambda^2}{8},$$

und hiermit aus 1)—3) bei Berücksichtigung der Werthe von u die (wie immer deutsch bezeichneten) Stabkräfte für Eigengewicht allein:

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp\left[m(n-m) - \frac{g_x}{4g}\right]\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm\left[(2m-1)(2n-2m+1) - \frac{g_z}{g}\right]\frac{g\lambda^2}{8h}, \\ \mathfrak{Y}_m = \pm\left[n - 2m + \frac{g_y + 2g_z}{2g}\right]\frac{g\lambda d}{2h}. \end{cases}$$

Soll das Eigengewicht g nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so folgen aus 10):

a) wenn die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten der X-Gurtung angreift ($g_x = g$, $g_y = g_z = 0$):

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp\left[m(n-m) - \frac{1}{4}\right]\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm(2m-1)(2n-2m+1)\frac{g\lambda^2}{8h}, \\ \mathfrak{Y}_m = \pm(n-2m)\frac{g\lambda d}{2h}; \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten der Z-Gurtung angreift ($g_z = g$, $g_x = g_y = 0$),

$$(12)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp m(n-m)\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm [(2m-1)(2n-2m+1)-1]\frac{g\lambda^2}{8h}, \\ \mathfrak{Y}_m = \pm (n-2m+1)\frac{g\lambda d}{2h}; \end{cases}$$

c) wenn die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten beider Gurtungen angreift ($g_y = g,\ g_z = g_x = 0$),

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp m(n-m)\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm (2m-1)(2n-2m+1)\frac{g\lambda^2}{8h}, \\ \mathfrak{Y}'_m = \pm (2n-4m+1)\frac{g\lambda d}{2h}. \end{cases}$$

Für $m = n$ können kleine Abweichungen gegen 10), und wenn die Fahrbahnlast nur auf die Knotenpunkte der X-Gurtung wirkt (was selten vorkommt), auch gegen die in §§ 28, 30 abzuleitenden Formeln für die Grenzbeanspruchungen eintreten, daher rührend, dass für g_x und eventuell auch für die Fahrbahnlast mit $m = n$ nicht wie sonst $v = \frac{2m+1}{2}\lambda$ ist. Die Abweichungen sind sogar davon abhängig, ob die Anordnung Fig. 146, 147 getroffen wird oder wo sonst die Endauflager der Fahrbahnträger liegen. Es genügt jedoch in praktischen Fällen, Z_n nach den für beliebige Z_m gegebenen Formeln zu berechnen, während die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" in Anwendung auf den Knotenpunkt n der Z-Gurtung ergibt

$$(14)\qquad Z_n + Y_n\frac{\lambda}{2d} = 0, \qquad Y_n = -Z_n\frac{2d}{\lambda}.$$

Damit sind die Werthe von Y_n durch diejenigen von Z_n und beide entweder genau oder etwas zu ungünstig bestimmt.

§ 28. Parallelträger. Einfaches System des gleichschenkligen Dreiecks. Gleichmässig vertheilte bewegte Last. †

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die Grenzbeanspruchungen der Stäbe folgen aus § 27, 1)—3) mit Rücksicht auf die in § 24 gegebenen Grenzwerthe des Moments M_s, nämlich für die Gurtungsglieder, deren Drehpunkte innerhalb l liegen,

$$(1)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l-c-v)+cv]\frac{p}{2}, \quad M_s = \mathfrak{M}_s$$

und für die Füllungsglieder, deren Drehpunkte ausserhalb l liegen,

$$(2)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{(l-u)(v-u)c^2}{(c-u)l+(v-c)u}\,\dfrac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{u(c-u)(l-v)^2}{(c-u)l+(v-c)u}\,\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

Im Weiteren ist die Lagerung der Fahrbahn zu berücksichtigen. Die deutsch bezeichneten Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein sind aus § 27 zu entnehmen.

a) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte der X-Gurtung.** Denn haben wir $c = \frac{2m-1}{2}\lambda$, $v = \frac{2m+1}{2}\lambda$, womit als Grenzwerthe der Stabkräfte folgen:

$$(3)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[m(n-m) - \frac{1}{4}\right]\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(4)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (2m-1)(2n-2m+1)\frac{p\lambda^2}{8h}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm (2n-2m-1)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)8h} \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp (2m-1)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)8h}. \end{cases}$$

Bezüglich der Berechnung von Y_n wird auf das am Schlusse des § 27 Gesagte verwiesen.

b) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte der Z-Gurtung.** Wir erhalten dann mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$ die Grenzwerthe der Stabkräfte:

$$(6)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(7)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm [(2m-1)(2n-2m+1) \mp 1]\frac{p\lambda^2}{8h}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

$$(8)\qquad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm (n-m)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)2h}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp (m-1)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)2h}. \end{cases}$$

c) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte beider Gurtungen.** In diesem Falle sind $c = \frac{2m-1}{2}\lambda$, $v = m\lambda$ und es ergeben sich die Grenzwerthe der Stabkräfte:

$$(9)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(10)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (2m-1)(2n-2m+1)\frac{p\lambda^2}{8h}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

$$(11)\quad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm (n-m)^2 \dfrac{p\lambda d}{(2n-1)h}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp (2m-1)^2 \dfrac{p\lambda d}{(2n-1)4h}. \end{cases}$$

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gedacht, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so haben wir nach vorstehenden Gleichungen und § 27, 11) — 13) den oberen Grenzwerth der Gurtungskräfte bei allen drei Lagerungen der Fahrbahn

$$(12)\qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m,$$

unter $q = g + p$ die Totallast per Längeneinheit verstanden.

§ 29. Parallelträger. Einfaches System des gleichschenkligen Dreiecks. Vorausbestimmte Knotenpunktslasten.

Es sei g das Eigengewicht per Längeneinheit Träger und p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Von g mögen g_x auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und g_z auf diejenigen der Z-Gurtung zu rechnen sein. Man nimmt dann an, dafs mit Ausnahme der Knotenpunkte über den Auflagern, jeder Knotenpunkt der X-Gurtung und Z-Gurtung λg_x bezw. λg_z Eigengewicht erhält und dass die Verkehrslast einen Knotenpunkt total oder gar nicht belastet. Abgesehen von der Unmöglichkeit eines plötzlichen Uebergangs von total belasteten zu nur mit Eigengewicht belasteten Knotenpunkten (§ 10), liegt darin bezüglich der beiden äussersten Knotenpunkte der X-Gurtung eine Ungenauigkeit, da auf diese nur eine Strecke von $\frac{3}{4}\lambda$ entfällt. Beide Annahmen sind jedoch umso eher zuzulassen, als sich infolge der erstern bei bestimmtem p im Allgemeinen zu ungünstige Grenzwerthe ergeben (§ 12d).

Für Eigengewicht allein ergeben sich die statischen Momente der Knotenpunktslasten vor Schnitt s (Fig. 141 und 142) in Bezug auf Punkt 0 und nach Schnitt s in Bezug auf Punkt l:

$$S = \lambda^2 g_z [1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1)] + \lambda^2 g_x \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdots + \frac{2m-1}{2}\right]$$
$$= m(m-1)\frac{g_z\lambda^2}{2} + m^2 \frac{g_x\lambda^2}{2},$$

$$S' = \lambda^2 g_z [1+2+3+\cdots+(n-m)] + \lambda^2 g_x \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdots + \frac{2n-2m-1}{2}\right]$$
$$= (n-m)(n-m+1)\frac{g_z\lambda^2}{2} + (n-m)^2 \frac{g_x\lambda^2}{2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in § 27, 4) folgen die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp\, m(n-m)\,\dfrac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm\left[(2m-1)(2n-2m+1)+\dfrac{g_x-g_z}{g}\right]\dfrac{g\lambda^2}{8h}, \\ \mathfrak{Y}_m = \pm\left(n-2m+\dfrac{g_z}{g}\right)\dfrac{g\lambda d}{2h}. \end{cases}$$

Wie die Gleichungen § 27, 4) zeigen, treten die Grenzwerthe der Gurtungskräfte bei Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein ein. Da im ersteren Falle gegenüber dem letzteren $q = g + p$ an Stelle von g tritt, so liefert 1) die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

$$(2)\qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m.$$

Für die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung und Füllungsglieder ist die Lagerung der Fahrbahn von Einfluss. Die letzteren Grenzwerthe entstehen nach § 27, 4), wenn die Verkehrslast einmal nur auf die Knotenpunkte von s bis l, das andre Mal nur auf diejenigen von 0 bis s wirkt. Im ersten Falle ist S' möglichst gross, S möglichst klein, im zweiten Falle trifft das Gegentheil zu.

a) Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte der X-Gurtung. Dann hat man nach obigen Ausdrücken von S, S' für Verkehrslast von s bis l allein:

$$S = 0, \qquad S' = (n-m)^2\,\frac{p\lambda^2}{2},$$

und für Verkehrslast von 0 bis s allein:

$$S = m^2\,\frac{p\lambda^2}{2}, \qquad S' = 0.$$

Es ergeben sich damit nach § 27, 4) die Grenzwerthe von Y^m

$$(3)\qquad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm (n-m)^2\,\dfrac{g\lambda d}{2nh}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp m^2\,\dfrac{g\lambda d}{2nh}. \end{cases}$$

Für Totalbelastung treten in 1) q, $g_x + p$ an Stelle von g, g_x, wir erhalten als Grenzwerthe von Z_m:

$$(4)\qquad Z_m = \pm\left[(2m-1)(2n-2m+1)+\frac{q-2g_z}{q}\right]\frac{q\lambda^2}{8h}$$

$$= \mathfrak{Z}_m \pm [(2m-1)(2n-2m+1)+1]\,\frac{p\lambda^2}{8h}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Denkt man sich jedoch auch das ganze Eigengewicht in den Knoten-

punkten der X-Gurtung allein angreifend, so entstehen mit $g_x = g$, $g_z = 0$:

(5) $Z_m = \frac{q}{g} \mathfrak{Z}_m = \pm [(2m-1)(2n-2m+1)+q] \frac{q\lambda^2}{8h}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$

b) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte der Z-Gurtung.** Nach oben stehenden Ausdrücken für S, S' entsprechen der Verkehrslast von s bis l:

$$S = 0, \qquad S' = (n-m)(n-m+1) \frac{p\lambda^2}{2}$$

und der Verkehrslast von 0 bis s:

$$S = m(m-1) \frac{p\lambda^2}{2}, \qquad S' = 0.$$

Damit folgen aus § 27, 4) die Grenzwerthe von Y_m:

$$(6) \qquad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm (n-m)(n-m+1) \frac{p\lambda d}{2nh}, \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp m(m-1) \frac{p\lambda d}{2nh}. \end{cases}$$

Für Totalbelastung treten in 1) q, $g_z + p$ an Stelle von g, g_z, womit die Grenzwerthe von Z_m:

$$(7) \qquad Z_m = \pm \left[(2m-1)(2n-2m+1) - \frac{q-2g_x}{q}\right] \frac{q\lambda^2}{8h}$$

$$= \mathfrak{Z}_m \pm [(2m-1)(2n-2m+1)-1] \frac{p\lambda^2}{8h}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Denkt man sich das Eigengewicht nur in den Knotenpunkten der Z-Gurtung angreifend, so ergeben sich mit $g_z = g$, $g_x = 0$:

(8) $Z_m = \frac{q}{g} \mathfrak{Z}_m = \pm [(2m-1)(2n-2m+1)-1] \frac{q\lambda^2}{8h}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$

c) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte beider Gurtungen.** Da in diesem Falle auf einen Knotenpunkt nur die Verkehrslast $\frac{\lambda}{2} p$ zu rechnen ist, so liefern obige Ausdrücke von S, S' für Verkehrslast von s bis l:

$$S = 0, \qquad S' = (n-m)(2n-2m+1) \frac{p\lambda^2}{4},$$

und für Verkehrslast von 0 bis s:

$$S = m(2m-1) \frac{p\lambda^2}{4}, \qquad S' = 0.$$

Damit folgen aus § 27, 4) die Grenzwerthe von Y_m:

$$(9) \qquad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm (n-m)(2n-2m+1) \frac{p\lambda d}{4nh} \\ Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp m(2m-1) \frac{p\lambda d}{4nh}. \end{cases}$$

Für Totalbelastung treten in 1) $q,\ g_x + \frac{p}{2},\ g_z + \frac{p}{2}$ an Stelle von $g,\ g_x,\ g_z$, sodass die Grenzwerthe von Z_m:

$$(10)\qquad Z_m = \pm\left[(2m-1)(2n-2m+1) + \frac{g_x - g_z}{q}\right]\frac{q\lambda^2}{8h}$$

$$= \mathfrak{Z}_m \pm (2m-1)(2n-2m+1)\frac{p\lambda^2}{8h},\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Denkt man sich das Eigengewicht zu gleichen Theilen auf die Knotenpunkte beider Gurtungen wirkend, so werden mit $g_x = g_z = \frac{g}{2}$:

$$(11)\qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m = \pm(2m-1)(2n-2m+1)\frac{q\lambda^2}{8h},\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

(Beispiele 31 und 32.)

§ 30. Parallelträger. Einfaches System des gleichschenkligen Dreiecks. Bewegte Radlastzüge.

Die Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Y}_m$, $\mathfrak{Z}_m$ durch beliebige feste Last sind aus § 27 zu entnehmen. Bei gleichmässig vertheilter fester Last könnten auch die Formeln § 29, 1) Verwendung finden. Für beliebige Lasten $P_1, P_2, \ldots$ auf der Fahrbahn folgen die Stabkräfte aus § 27, 1) — 3) mit M_s nach § 25, 1), wobei die bekannten Werthe von $c,\ v,\ u$ einzusetzen sind. Die Grenzwerthe der Stabkräfte schliesslich entstehen gleichzeitig mit den durch § 25 festgestellten Grenzwerthen von M_s. Für sämmtliche Gurtungsglieder sind die unteren Grenzbeanspruchungen:

$$(1)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m,\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Es ist nun die Lagerung der Fahrbahn zu berücksichtigen.

a) **Die Fahrbahn wirkt auf die Knotenpunkte der X-Gurtung.** Dann haben wir:

$$(2)\qquad c = \frac{2m-1}{2}\lambda,\qquad v = \frac{2m+1}{2}\lambda,$$

und für beliebige Belastung:

$$(3)\quad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^c Pa + \frac{n-2m}{2}\sum_c^v P(a-z) \right. \\ \qquad\qquad \left. + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh} \\ \qquad\qquad \text{mit}\quad z = \frac{2m-1}{2m-n}\,\frac{l}{2}, \end{cases}$$

$$(4)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(2n-2m+1)\sum_0^c Pa + (2m-1)\sum_c^l P(l-a)\right]\frac{1}{2nh},$$

$$(5)\quad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp \left[\sum_0^c Pa + (n-1)\sum_c^v P(z-a) - \sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d}{lh}, \\ \text{mit } z = \frac{2m-1}{n-1}\,\frac{l}{2}. \end{cases}$$

Die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte ergeben sich nach § 25 und wie auch vorstehende Gleichungen erkennen lassen:

mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$, X_m nach 3),

„ „ I „ 0 „ l, „ O „ c, Z_m „ 4).

Die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder folgen ebenso:

für Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(6)\quad Y_m = \mathfrak{Y}_m \pm \frac{d}{lh}\sum_v^l P(l-a),$$

für Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(7)\quad Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp \frac{d}{lh}\sum_0^c Pa.$$

Bezüglich der Berechnung von Y_n wird auf das am Schlusse von § 27 Gesagte verwiesen.

b) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte der Z-Gurtung.** Dann sind:

$$(8)\quad c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda$$

und folgen für beliebige Belastung:

$$(9)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

$$(10)\quad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(2n-2m+1)\sum_0^c Pa + (n-2m+1)\sum_c^v (a-z) \\ \qquad + (2m-1)\sum_v^l P(l-a)\Big]\frac{1}{2nh} \\ \text{mit } z = \frac{m-1}{2m-1-n}\,l, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp \left[\sum_0^c Pa + (n-1)\sum_c^v P(z-a) - \sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d}{lh} \\ \text{mit}\quad z = \frac{m-1}{n-1}\,l. \end{cases}$$

Der allgemeine Ausdruck von Y_m entspricht also (bei andern Werthen von c, v, z) genau demjenigen unter a) und ebenso bleiben die Grenzwerthe von Y_m mit c, v nach 8) wie dort angegeben bestimmt. Die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte dagegen folgen:

mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei x, X_m nach 9),
" " I " 0 " l, " O " c für $z > v$,
bei v für $z < c$, Z_m " 10).

Für Y_1 tritt der untere Grenzwerth bei Belastung durch Eigengewicht allein ein und ist $z = 0$. Soll dann dem am Schlusse des § 25 Gesagten entsprechend der obere Grenzwerth für Zug I berechnet werden, so ergiebt sich derselbe bei Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei $v = \lambda$, nach 11). Für Y_n gilt wegen $z = l$ Analoges und würde der obere Grenzwerth bei Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei $c = (n-1)\lambda$ aus 11) folgen.

c) **Die Fahrbahnlast wirkt auf die Knotenpunkte beider Gurtungen.** Man hat dann:

$$(12)\qquad c = \frac{2m-1}{2}, \qquad v = m\lambda$$

und für beliebige Belastung:

$$(13)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

$$(14)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(2n-2m+1)\sum_0^c Pa + (2m-1)\sum_c^l P(l-a)\right]\frac{1}{2nh},$$

$$(15)\quad \begin{cases} Y_m = \mathfrak{Y}_m \mp \left[\sum_0^c Pa + (2n-1)\sum_c^v P(z-a) - \sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d}{lh} \\ \text{mit}\quad z = \frac{2m-1}{2n-1}\,l. \end{cases}$$

Der allgemeine Ausdruck von Y_m mit Ausnahme des Factors $2n-1$ entspricht wieder demjenigen unter a) und es bleiben auch die Grenzwerthe von Y_m mit c, v nach 12) wie dort erwähnt bestimmt. Die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte erhält man:

mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei v, X_m nach 13),
" " I " 0 " l, " O " c, Z_m " 14).

Für Y_n tritt der untere Grenzwerth bei Belastung durch Eigengewicht allein ein und ist $z = l$. Soll dann dem am Schlusse des § 25 Gesagten entsprechend der obere Grenzwerth für Zug I berechnet werden, so ergibt sich derselbe bei Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c aus 15). — (Beispiel 33, Aufgabe 31.)

§ 31. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Allgemeines.

Die Spannweite l sei durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale. Die l begrenzenden Auflager können gleich oder verschieden hoch liegen. Für alle Arten solcher Träger wurden die Stabkräfte schon in §§ 16, 18 ausgedrückt. Wir haben in den dortigen Gleichungen einfach die Momente M, M' und, da nur verticale Activkräfte wirken, den Horizontalschub H gleich Null zu setzen, um spezielle Ausdrücke für den vorliegenden Fall zu erhalten.

Eine Diagonale kann nach der Seite von 0 hin ansteigen oder abfallen. Diejenige Gurtung, welche man, der Diagonale m nach der Seite von 0 hin folgend, trifft, nannten wir X-Gurtung, die andere Z-Gurtung. Ausserdem wurden die in Fig. 149 und 150 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt, sodass x_m, z_m, d_m, h_m die Längen derjenigen Stäbe bedeuten, welche durch X_m, Z_m, D_m, V_m beansprucht sind. Unter diesen Voraussetzungen gelten in allen das angenommene Trägersystem betreffenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung. Es ergaben sich in § 16:

(1) $$X_m = \mp M_s \frac{x_m}{\lambda h_m}, \quad \text{Abscisse des Drehpunkts } u = m\lambda,$$

(2) $$Z_m = \pm M_s \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \quad \text{„ „ „} \quad u = (m-1)\lambda,$$

(3) $$D_m = \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \quad \text{„ „ „} \quad u = (m-\varepsilon)\lambda,$$

(4) $$V_m = \pm M_s \frac{1}{\nu \lambda}, \quad \text{„ „ „} \quad u = (m-\nu)\lambda.$$

Hierin bezeichnet M_s die Momente der äussern Kräfte links derjenigen Schnitte s, welche zur Berechnung der betreffenden Stäbe geführt wurden (für X_m, Z_m, D_m durch x_m, d_m, z_m, für V_m durch x_m, h_m, z_{m+1}, § 16). Ferner hat man:

(5) $$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}$$

und, wenn $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ die Ordinaten der Knotenpunkte m in X-Gurtung und Z-Gurtung bedeuten:

(6) $$\nu = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}},$$

(7) speziell bei horizontaler X-Gurtung: $\nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}$,

(8) „ „ Z-Gurtung: $\nu = \varepsilon$,

(9) „ symmetrischen Gurtungen: $\nu = \frac{2h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}}$,

unter symmetrischen Gurtungen solche verstanden, welche bei sonst beliebigen Formen zu irgend einer Horizontalen symmetrisch liegen.

Die bisherigen Gleichungen gelten für beliebig gerichtete Activkräfte. Setzen wir nun lediglich verticale Activkräfte (Lasten) voraus, und bezeichnen durch S das Moment der vor Schnitt s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht Auflager 0, durch S' das Moment der nach Schnitt s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht Auflager l, so lassen sich die Stabkräfte nach § 18, 2) auch wie folgt ausdrücken:

(10) $$\begin{cases} X_m = \mp [(n-m)S + mS'] \dfrac{x_m}{lh_m}, \\ Z_m = \pm [(n-m+1)S + (m-1)S'] \dfrac{z_m}{lh_{m-1}}, \\ D_m = \mp [(n-m+\varepsilon)S + (m-\varepsilon)S'] \dfrac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}, \\ V_m = \pm [(n-m+\nu)S + (m-\nu)S'] \dfrac{l}{\nu l}. \end{cases}$$

Weiter hat man alsdann nach § 18, 3) 4) bei jeder bestimmten Belastung:

(11) $$\frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_m}{z_m} + \frac{D_m}{d_m} = 0,$$

(12) $$\frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_{m+1}}{z_{m+1}} = 0,$$

und endlich sind nun die M_s und ihre Grenzwerthe durch die Gleichungen der §§ 23—25 gegeben.

Die Höhenlage der Fahrbahn ist ohne Einfluss auf die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen, wohl aber von Einfluss

auf die Beanspruchungen der Verticalen. Bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Verticalen, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, und ist dieser von der Länge λ, so haben wir

für X_m, Z_m, D_m:

$$c = (m - 1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \tag{13}$$

für V_m, wenn die Fahrbahnlast angreift

a) im Knotenpunkte m der X-Gurtung:

$$c = (m - 1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \tag{14}$$

b) im Knotenpunkt m der Z-Gurtung:

$$c = m\lambda, \qquad v = (m + 1)\lambda. \tag{15}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, so ist das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung gerade so zu berechnen, als ob die Fahrbahnlast (feste und bewegte Last) im Knotenpunkte m der X-Gurtung angriffe, das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung ebenso, als ob die Fahrbahn im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angriffe. Wir haben also in den Formeln immer nur Knotenpunktslasten zu berücksichtigen.

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen und bezeichnen g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, dann hat man nach § 18, 10) als Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein:

$$\tag{16} \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_m &= \mp\, m(n - m)\, \frac{x_m}{h_m} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m &= \pm\, (m - 1)(n - m + 1)\, \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m &= \pm \left(n - 2m + 1 - m\, \frac{n - m}{\varepsilon}\right) \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m &= \mp \left(n - 2m + \frac{g_x - g_z}{g} - m\, \frac{n - m}{\nu}\right) \frac{g\lambda}{2}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen gelten bei jeder Lage der Fahrbahn. Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, so ist das Eigengewicht der Fahrbahn einzurechnen bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x, bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_z.

Soll das Eigengewicht g nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, dann folgt aus 16):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift ($g_x = g$, $g_z = 0$):

$$\mathfrak{V}_m = \mp \left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{g\lambda}{2}, \tag{17}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift ($g_z = g$, $g_x = 0$):

$$\mathfrak{V}_m = \pm \left(n - 2m - 1 - m\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{g\lambda}{2}. \tag{18}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurtungen in Verticale m an, dann ist die Beanspruchung des Vertikalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 17), diejenige des Vertikalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 18) bestimmt. Bei nicht gleichmässig vertheiltem Eigengewichte wären $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ durch 10) bestimmt.

Die Formeln für X_m, Z_m, D_m und 11) gelten auch, wenn die Stellung der Diagonalen wechselt, die X-Gurtung also bald oben, bald unten liegt. Zur Gültigkeit der Formeln für V_m, $\mathfrak{V}_m$ und 12) dagegen ist im Allgemeinen nöthig, dass sich zu beiden Seiten der Verticale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung befinden, wobei jedoch die Diagonale auch mit einem Gurtungsstabe zusammenfallen kann (Fig. 72, 73). Neben den Formeln 10) bestehen bei beliebiger Belastung noch die Gleichungen § 33, 1) — 5).

Bei den hier betrachteten Trägern werden die Stäbe fast immer symmetrisch zur Verticallinie durch die Trägermitte angeordnet und zwar besonders häufig so, dass die Diagonalen für Eigengewicht allein gezogen werden, womit im Allgemeinen auch die oberen Grenzbeanspruchungen Zug darstellen und die entsprechenden Verticalbeanspruchungen, bei den häufigst vorkommenden Gurtformen, Druck bedeuten. Eine solche Vertheilung von Zug und Druck ist aber bei eisernen Trägern gewöhnlich erwünscht (die Verticalen pflegen kürzer als die Diagonalen und daher weniger der Zerknickungsgefahr ausgesetzt zu sein, sie müssen, im Falle Querträger anschliessen, ohnehin steif construirt werden, die Diagonalen würden mit Rücksicht auf die Befestigung an den Knotenblechen und gleichmässiger Krafteintragung am besten aus Flacheisen hergestellt), während bei hölzernen das Gegentheil der Fall sein kann (wenn die Verbindungen der Diagonalen und Gurten keinen grossen Zug zulassen und die Verticalen durch dünne Eisenstangen gebildet sind). Stellen nicht beide Grenzbeanspruchungen einer Diagonale Zug oder nicht beide Druck dar, die Diagonale soll aber nur für Zug oder nur für Druck

widerstandsfähig gemacht werden, so hat man im betreffenden Felde eine Gegendiagonale anzuwenden. — (Beispiel 34, 40, 58.)

§ 32. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die Grenzbeanspruchungen der Stäbe folgen aus § 31, 1) — 4) mit Rücksicht auf die in § 24 erhaltenen Grenzwerthe des Moments M_s, nämlich wenn der Momentendrehpunkt u innerhalb der Spannweite l liegt:

$$(1) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \left[u(l-c-v) + cv\right]\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s,$$

und wenn der Drehpunkt u ausserhalb l liegt:

$$(2) \qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{u(c-u)(l-v)^2}{(c-u)l + (v-c)u}\dfrac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{(l-u)(v-u)c^2}{(c-u)l + (v-c)u}\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

Für letzteren Fall wurden als etwas zu ungünstige Näherungsformeln gegeben:

$$(3) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-c)(l-v)p, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}cvp.$$

Die Werthe von u, c, v und die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ sind aus § 31 zu entnehmen.

Für die Gurtungsstäbe hat man $u = m\lambda$ oder $u = (m-1)\lambda$ und da diese Werthe zwischen 0 und l liegen, so sind für die Grenzbeanspruchungen die Momente 1) massgebend. Wir erhalten damit:

$$(4) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\frac{x_m}{h_m}\frac{p\lambda}{2}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(5) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Wird wie gewöhnlich das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen, dann sind nach 4) 5) und § 31, 16) die oberen Grenzwerthe:

$$(6) \qquad X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m,$$

worin $q = g + p$ ist. Im Weiteren kommen die Gurtungsformen in Frage.

Gewöhnliche Gurtungsformen. Liegt $m-\varepsilon$ nicht zwischen 0 und n, das heisst schneiden sich die Richtungslinien der Stäbe x_m und z_m ausserhalb l, so ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m mit 2):

$$(7)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \dfrac{(\varepsilon-m)(n-m)^2}{(n-1)\varepsilon-n+m}\,\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \dfrac{(\varepsilon-m+n)(m-1)^2}{(n-1)\varepsilon-n+m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Liegt $m-\nu$ nicht zwischen 0 und n, das heisst schneiden sich die Richtungslinien der Stäbe x_m und z_{m+1} ausserhalb l, dann erhält man mit 2) als Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(8)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{(\nu-m)(n-m)^2}{(n-1)\nu-n+m}\,\dfrac{\nu-1}{\nu}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{(\nu-m+n)(m-1)^2}{(n-1)\nu-n+m}\,\dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(9)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{(\nu-m)(n-m-1)^2}{(n-1)\nu+m}\,\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{(\nu-m+n)m^2}{(n-1)\nu+m}\,\dfrac{\nu+1}{\nu}\,\dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Gleichungen 8), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Gleichungen 9).

Ungewöhnliche Gurtungsformen. Liegt $m-\varepsilon$ zwischen 0 und n, das heisst schneiden sich die Richtungslinien von x_m und z_m innerhalb l, dann folgen die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m mit 1):

$$(10)\quad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left(n-2m+1-m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{2}, \quad D_m = \mathfrak{D}_m.$$

Liegt $m-\nu$ zwischen 0 und n, das heisst, schneiden sich die Richsungslinien von x_m und z_{m+1} innerhalb l, so finden sich mit 1) die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(11)\quad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left(n-2m+1-m\,\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2}: \qquad V_m = \mathfrak{V}_m;$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left(n - 2m - 1 - m\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m. \tag{12}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe 11), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe 12).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen, so ist nach 10) und § 31, 16) der obere Grenzwerth von D_m:

$$D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m, \tag{13}$$

und soll dies Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte wirkend gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so hat man nach 11) 12) und § 31, 17) 18) als oberen Gegenwerth von V_m:

$$V_m = \frac{q}{g}\mathfrak{V}_m. \tag{14}$$

Näherungsformeln (Vorausbestimmte Knotenpunktslasten). Werden in den unter „gewöhnliche Gurtungsformen" behandelten Fällen anstatt der Formeln 2) die Formeln 3) verwendet, so ergeben sich als Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

$$\left\{\begin{aligned} D_m &= \mathfrak{D}_m \pm (n-m)(n-m+1)\left(1-\frac{m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2n},\\ D_m &= \mathfrak{D}_m \mp m(m-1)\left(1+\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2n}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$\left\{\begin{aligned} V_m &= \mathfrak{V}_m \mp (n-m)(n-m+1)\left(1-\frac{m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2n},\\ V_m &= \mathfrak{V}_m \pm m(m-1)\left(1+\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2n}; \end{aligned}\right. \tag{16}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$\left\{\begin{aligned} V_m &= \mathfrak{V}_m \mp (n-m)(n-m-1)\left(1-\frac{m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2n},\\ V_m &= \mathfrak{V}_m \pm m(m+1)\left(1+\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{p\lambda}{2n}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Ausdrücke 16), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Ausdrücke 17).

Mittelst der Formeln 15)—17) und 6) ergeben sich dieselben Grenzwerthe, welche auf Grund vorausbestimmter Knotenpunktslasten $q\lambda$ ung $g\lambda$ erhalten würden (§ 12 d). Wenn oben für gewisse Fälle die Gurtungsformen als ungewöhnliche bezeichnet wurden, so bezieht sich dies nur auf die jetzt betrachteten Balkenfachwerke, nicht auf Bogenfachwerke. Die erste Formel 7) kann mit Rücksicht auf

$$(18) \qquad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon h_{m-1}} = \frac{1}{h_m}$$

noch etwas vereinfacht werden. —

Die oben und im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln lassen bereits erkennen, dass ohne Einführung der Grössen ε, ν sowie der X-Gurtnng und Z-Gurtung die Theorie an Allgemeinheit oder Einfachheit einbüssen müsste. Das Gleiche wird sich im nächsten Paragraphen und in der Folge zeigen. — (Beispiele 35, 38, 39.)

§ 33. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Bewegte Radlastzüge.

Die Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ durch beliebiges Eigengewicht allein sind aus § 31 zu entnehmen. Für jede Stellung eines beliebigen Lastsystems P_1, $P_2, \ldots$ auf der Fahrbahn hat man nach § 18 die Beanspruchungen der Gurtungsglieder m und Diagonale m allgemein:

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{x_m}{lh_m},$$

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a)\right]\frac{z_m}{lh_{m-1}},$$

$$(3) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(n-m+\varepsilon)\displaystyle\sum_0^{m-1} Pa \\ \qquad + (n\varepsilon - \varepsilon - n + m)\displaystyle\sum_{m-1}^m P(z-a) - (\varepsilon - m)\displaystyle\sum_m^n P(l-a)\Big]\dfrac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \\ \qquad \text{mit} \quad z = \dfrac{m-1}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\varepsilon l \end{cases}$$

und die Beanspruchung der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(4)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(n-m+v)\sum_0^{m-1} Pa \\ \quad + (nv - v - n + m)\sum_{m-1}^{m} P(z-a) - (v-m)\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{1}{vl} \\ \quad \text{mit} \quad z = \frac{m-1}{(n-1)v-n+m}\, vl, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(5)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(n-m+v)\sum_0^{m} Pa \\ \quad + (nv - v + m)\sum_{m}^{m+1} P(z-a) - (v-m)\sum_{m+1}^n P(l-a)\Big]\frac{1}{vl} \\ \quad \text{mit} \quad z = \frac{v+1}{(n-1)v+m}\, ml. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 4), die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 5) bestimmt. Die Grenzen der $\sum$ in vorstehenden wie in den folgenden Gleichungen bedeuten Verticalennummern.

Die Grenzwerthe der Stabkräfte entstehen nach § 31, 1)—4) gleichzeitig mit den in § 25 festgestellten Grenzmomenten M_r. Wir erhalten demnach die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe m:

$$(6)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m, \qquad\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

und die oberen Grenzbeanbeanspruchungen derselben:

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m, X_m nach 1),
„ „ I „ 0 „ n, „ O „ „ $m-1$, Z_m „ 2).

Auf diese Belastungen konnte man auch aus 1) 2) schliessen. Bezüglich der Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder kommen die Gurtungsformen in Frage.

Gewöhnliche Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ nicht zwischen 0 und n, das heisst, schneiden sich die Richtungslinien der Stäbe x_m und

z_m ausserhalb der Spannweite l, dann erhalten wir die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon l} \sum_m^n P(l-a), \tag{7}$$

mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m + n}{\varepsilon l} \sum_0^{m-1} Pa. \tag{8}$$

Liegt $m - \nu$ nicht zwischen 0 und n, das heisst, schneiden sich die Richtungslinien von x_m und z_{m+1} ausserhalb l, so findet man die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{\nu - m}{\nu l} \sum_m^n P(l-a), \tag{9}$$

mit Zug II von 0 bis $m - 1$, Vorderrad O bei Verticale $m - 1$,

$$V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{\nu - m + n}{\nu l} \sum_0^{m-1} Pa; \tag{10}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

mit Zug II von $m + 1$ bis n, Vorderrad O bei Verticale $m + 1$,

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{\nu - m}{\nu l} \sum_{m+1}^n P(l-a), \tag{11}$$

mit Zug II von 0 bis m, Vorderrad 0 bei Verticale m,

$$V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{\nu - m + n}{\nu l} \sum_0^m Pa. \tag{12}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe b).

Für D_1 und im Falle a) auch für V_1 tritt ein Grenzwerth bei Belastung durch Eigengewicht allein ein und ist $z = 0$. Soll dann dem am Schlusse des § 25 Gesagten entsprechend der andre Grenz-

werth für Zug I berechnet werden, so ergibt sich derselbe bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, aus der für beliebige Belastung bestehenden Gleichungen 3) oder 4). Analoges würde wegen $z = l$ für D_n und im Falle b) auch für V_{n-1} gelten (Rad 0 bei Verticale $n-1$), doch hat man diese Beanspruchungen der Symmetrie zur Trägermitte wegen gewöhnlich nicht zu berechnen. Für V_0, V_n gelten die Formeln für V_m überhaupt nicht ohne Weiteres (§ 31, Aufgabe 19).

Ungewöhnliche Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ zwischen 0 und n, das heisst schneiden sich die Richtungslinien der Stäbe x_m und z_m innerhalb der Spannweite l, dann erhält man die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m-1$ für $z > m\lambda$,
bei m für $z < (m-1)\lambda$, D_m nach 3),
mit Eigengewicht allein, $D_m = \mathfrak{D}_m$.

Liegt $m - \nu$ zwischen 0 und n, das heisst schneiden sich die Richtungslinien von x_m und z_{m+1} innerhalb l, so ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m - 1$ für $z > m\lambda$,
bei m für $z < (m-1)\lambda$, V_m nach 4),
mit Eigengewicht allein, $V_m = \mathfrak{V}_m$;

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m für $z > (m+1)\lambda$, bei
$m+1$ für $z < m\lambda$, V_m nach 5),
mit Eigengewicht allein, $V_m = \mathfrak{V}_m$.

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe b). — (Beispiele 36 u. 37, Aufgaben 32 u. 33).

§ 34. Parallelträger. Einfaches System des rechtwinkligen Dreiecks. Allgemeines.

Die geometrische Anordnung dieser Träger wurde schon in § 17 besprochen. Bezüglich der Stabkräfte und ihrer Grenzwerthe bei veränderlicher Belastung bestehen die Beziehungen der §§ 31—33 mit

(1) $$h_m = h, \quad x_m = z_m = x, \quad \varepsilon = \nu = \infty.$$

Bei den folgenden Spezialisirungen fassen wir nur den gewöhnlichen Fall horizontaler Gurtungen ins Auge, sodass noch

$$(2) \qquad x = \lambda, \qquad d_m = d$$

hinzutreten. Selbstverständlich gelten auch in den entstehenden Spezialformeln die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung, unter letzterer Bezeichnung diejenige Gurtung verstanden, welche man der Diagonale m nach der Seite von 0 hin folgend trifft (Fig. 151 u. 152).

Mit 1) 2) folgen aus § 31, 10) als Ausdrücke der Stabkräfte für beliebige Belastung:

$$(3) \qquad \begin{cases} X_m = \mp [(n-m)S + mS'] \frac{1}{nh}, \\ Z_m = \mp [(n-m+1)S + (m-1)S'] \frac{1}{nh}, \\ D_m = \pm [S' - S] \frac{d}{lh}, \\ V_m = \mp [S' - S] \frac{1}{l}, \end{cases}$$

worin S das Moment der Knotenpunktslasten vor Schnitt s (durch x_m, z_m, d_m für X_m, Z_m, D_m, durch x_m, h_m, z_{m+1} für V_m) in Hinsicht Auflager 0, S' das Moment der Knotenpunktslasten nach Schnitt s in Hinsicht Auflager l. Nach § 31, 11) 12) haben wir ferner für jede bestimmte Belastung:

$$(4) \qquad X_m + Z_m + \frac{\lambda}{d} D_m = 0, \qquad X_m + Z_{m+1} = 0,$$

während die Bedingnng „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die Knotenpunkte m der X-Gurtung und Z-Gurtung ergibt:

$$(5) \qquad V_m + \frac{h}{d} D_{m+1} \pm K_x = 0, \qquad V_m + \frac{h}{d} D_m \mp K_z = 0,$$

unter K_x, K_z die Belastungen jener Knotenpunkte verstanden. Neben 3) — 5) gelten bei beliebiger Belastung auch die Gleichungen § 36, 1)—5).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen und bezeichnen g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, dann liefert § 31, 16) die Beanspruchungen für Eigengewicht allein:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp m(n-m)\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm (m-1)(n-m+1)\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm (n-2m+1)\frac{g\lambda d}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp \left(n-2m+\frac{g_x-g_z}{g}\right)\frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, dann ist das Eigengewicht der Fahrbahn einzurechnen bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x, bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_z.

Soll das Eigengewicht g nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so hat man nach 6) oder § 31, 17) 18):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(7)\quad \mathfrak{V}_m = \mp (n-2m+1)\frac{g\lambda}{2},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(8)\quad \mathfrak{V}_m = \mp (n-2m-1)\frac{g\lambda}{2}.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 7), diejenige des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 8) bestimmt. Bei nicht gleichmässig vertheiltem Eigengewichte wären $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ aus 3) zu berechnen.

§ 35. Parallelträger. Einfaches System des rechtwinkligen Dreiecks. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die vom Eigengewicht allein herrührenden Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ sind durch § 34 bestimmt. Die Grenzwerthe der Stabkräfte folgen aus § 32 mit $h_m = h$, $d_m = d$, $x_m = z_m = \lambda$, $\varepsilon = \nu = \infty$. Wir erhalten für die Gurtungen und Diagonalen:

$$(1)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(2)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1)(n-m+1)\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm (n-m)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)\,2h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp (m-1)^2 \dfrac{p\lambda d}{(n-1)\,2h}, \end{cases}$$

und für die Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(4)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (n-m)^2 \dfrac{p\lambda}{(n-1)\,2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm (m-1)^2 \dfrac{p\lambda}{(n-1)\,2}; \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(5)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (n-m-1)^2 \dfrac{p\lambda}{(n-1)\,2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm m^2 \dfrac{p\lambda}{(n-1)\,2}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Diagonale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe 4), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe 5).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen, dann hat man nach § 32 die oberen Grenzwerthe der Gurtungskräfte:

$$(6)\qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad\qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m.$$

Näherungsformeln (Vorausbestimmte Knotenpunktslasten). Nach § 32, 15)—17) erhält man etwas zu ungünstig als Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$(7)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm (n-m)(n-m+1) \dfrac{p\lambda d}{2nh}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp m(m-1) \dfrac{p\lambda d}{2nh}, \end{cases}$$

und als Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(8)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (n-m)(n-m+1) \dfrac{p\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm m(m-1) \dfrac{p\lambda}{2n}; \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(9)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (n-m)(n-m-1)\dfrac{p\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm m(m+1)\dfrac{p\lambda}{2n}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so sind die Beanspruchungen des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 8), diejenigen des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 9) bestimmt.

Mittelst der Formeln 7)—9) ergeben sich dieselben Grenzwerthe, welche bei der gewöhnlichen Berechnung mittelst vorausbestimmter Knotenpunktslasten $q\lambda$ und $g\lambda$ erhalten würden. — (Beispiele 41 u. 44.)

§ 36. Parallelträger. Einfaches System des rechtwinkligen Dreiecks. Bewegte Radlastzüge.

Die vom Eigengewicht allein herrührenden Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ sind aus § 34 zu entnehmen. Im Uebrigen folgen die Stabkräfte aus § 33 mit $h_m = h$, $d_m = d$, $x_m = z_m = \lambda$, $\varepsilon = v = \infty$, Wir erhalten für jede Stellung eines Lastsystems $P_1, P_2, \ldots$ auf der Fahrbahn die Beanspruchungen der Gurtungsstäbe und Diagonale m:

$$(1)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \Big[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n (l-a)\Big]\frac{1}{nh},$$

$$(2)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^n (l-a)\Big]\frac{1}{nh}$$

$$(3)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[\sum_0^{m-1} Pa + (n-1)\sum_{m-1}^m (z-a) - \sum_m^n P(l-a)\Big]\dfrac{d}{lh} \\ \qquad \text{mit} \quad z = \dfrac{m-1}{n-1}\,l, \end{cases}$$

und die Beanspruchung der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(4)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[\sum_0^{m-1} Pa + (n-1)\sum_{m-1}^m P(z-a) - \sum_m^n P(l-a)\Big]\dfrac{1}{l} \\ \qquad \text{mit} \quad z = \dfrac{m-1}{n-1}\,l, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(5)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\sum_0^m Pa + (n-1) \sum_m^{m+1} P(z-a) - \sum_{m+1}^n P(l-a) \right] \frac{1}{l} \\ \text{mit} \quad z = \frac{m}{n-1} l. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung durch 4), die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung durch 5) bestimmt.

Die unteren Grenzwerthe der Gurtungskräfte sind nach § 33):

$$(6)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

die oberen Grenzwerthe derselben ergeben sich:

mit Zug I von 0 bis l, Rad O bei Verticale m, X_m nach 1),
„ „ I „ 0 „ l, „ O „ „ $m-1$, Z_m „ 2).

Weiter erhält man die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(7)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{d}{lh} \sum_m^n P(l-a),$$

mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(8)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{d}{lh} \sum_0^m Pa,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(9)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{1}{l} \sum_m^n P(l-a),$$

mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(10)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{1}{l} \sum_0^{m-1} Pa;$$

b) wenn die Fahrbahnlast in Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

mit Zug II von $m+1$ bis n, Vorderrad O bei Verticale $m+1$,

$$(11) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{1}{l} \sum_{m+1}^{n} P(l-a),$$

mit Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(12) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{1}{l} \sum_{0}^{m} Pa.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe b).

Für D_1 und im Falle a) auch für V_1 tritt ein Grenzwerth bei Belastung durch Eigengewicht allein ein und ist $z=0$. Soll dann dem am Schlusse des § 25 Gesagten entsprechend der andre Grenzwerth für Zug I berechnet werden, so ergibt sich derselbe bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, aus 3) oder 4). Für D_n und im Falle b) auch für V_{n-1} würde wegen $z=l$ Analoges gelten (Rad O bei Verticale $n-1$), doch hat man diese Stabkräfte der Symmetrie zur Trägermitte wegen gewöhnlich nicht zu berechnen. — (Beispiele 42, 43, 45.)

§ 37. Parallelträger einfachen Systems mit ungleichlangen Feldern.

Ein Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern werde als Fachwerk einfachen Systems mit Verticalen und horizontalen Gurtungen hergestellt. Die Fahrbahnträger überspannen je ein Feld, die einzelnen Felder brauchen aber nicht gleich lang zu sein. Es handelt sich darum, die Stabkräfte für beliebige Belastung und ihre Grenzwerthe für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge auszudrücken.

Es sind zweierlei Anordnungen der Diagonalen möglich, welche in Fig. 153 und 154 angedeutet wurden. Diejenige Gurtung, welche man einer Diagonalen nach der Seite von 0 hin folgend trifft, heisst X-Gurtung, die andere Z-Gurtung. Führen wir weiter die in Fig. 153, 154 ersichtlichen Bezeichnungen ein, so gelten in allen folgenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung. Die für X_m, Z_m, D_m gegebenen Formeln bleiben auch bestehen, wenn die Lage der X-Gurtung wechselt, die Formeln für V_m dagegen sind an die

Voraussetzung geknüpft, dass zu beiden Seiten der Verticale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung liegen.

Ist e_m die Abscisse der Verticale m und werden im Uebrigen die Bezeichnungen des § 23 beibehalten, dann hat man:

$$(1)\quad \begin{cases} u = e_m & M_s \pm X_m h = 0, \\ u = e_{m-1} & M_s \mp Z_m h = 0, \\ u = -\infty & M_s \pm D_m \frac{\infty h}{d_m} = 0, \\ u = -\infty & M_s \mp U_m \infty = 0, \end{cases}$$

und nach Einsetzen von § 23, 1) für beliebige Belastung:

$$(2)\quad \begin{cases} X_m = \mp [(l - e_m) S + e_m S'] \frac{1}{lh} = - Z_{m+1}, \\ D_m = \pm (S' - S) \frac{d_m}{lh}, \\ V_m = \mp (S' - S) \frac{1}{l}. \end{cases}$$

Die Z_m und ihre Grenzwerthe sind hiernach durch die X_m und deren Grenzwerthe bestimmt. Weiter bleiben die Formeln § 31, 4) 5) mit d_m statt d bestehen. Zu beachten ist, dass sich die statischen Momente S, S' für X_m, D_m auf einen Schnitt durch x_m, d_m, z_m, für V_m auf einen Schnitt durch x_m, h_m, z_{m+1} beziehen. Neben 1) 2) gelten für beliebige Belastung auch die Gleichungen 9)—12).

Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge gelten und sind von g die Theile g_x und g_z auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen, so hat man nach § 10, 5) für X_m, D_m:

$$S = \frac{g}{2} e_m e_{m-1}, \qquad S' = \frac{g}{2} (l - e_m)(l - e_{m-1})$$

und demnach für V_m:

$$S = \frac{g}{2} e_m e_{m-1} + \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2} g_z e_m,$$
$$S' = \frac{g}{2} (l - e_m)(l - e_{m-1}) - \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2} g_z (l - e_m).$$

Wir erhalten damit aus 2) die Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp e_m (l - e_m) \frac{g}{2h} = - \mathfrak{Z}_{m+1}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm (l - e_m - e_{m-1}) \frac{g d_m}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp \left(l - e_m - e_{m-1} - \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2} g_z\right) \frac{g}{2}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in den Verticalen an, so ist das Eigengewicht der Fahrbahn einzurechnen für die Verticalenstücke von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_z, für die Verticalenstücke von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_x. Ferner gelten dann für die Beanspruchungen und Grenzbeanspruchungen der ersterwähnten Verticalenstücke die unten folgenden Formeln a) und für die Grenzbeanspruchungen der letzterwähnten Verticalenstücke die unten folgenden Formeln b). Bei nicht gleichmässig vertheiltem Eigengewicht sind $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ aus 2) zu berechnen.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Da für die Gurtungsstäbe der Drehpunkt u innerhalb der Spannweite l liegt, so folgen aus 1) mit § 24, 2) die Grenzwerthe der Gurtungskräfte:

$$X_m = \mathfrak{X}_m \mp e_m(l - e_m)\frac{p}{2h}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m. \tag{4}$$

Da ferner für die Füllungsstäbe der Drehpunkt u ausserhalb l liegt, so folgen aus 1) mit § 24, 3) die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

$$D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{(l - e_m)^2}{l - \lambda_m}\,\frac{p\,d_m}{2h}, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{e^2{}_{m-1}}{l - \lambda_m}\,\frac{p\,d_m}{2h}, \tag{5}$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{(l - e_m)^2}{l - \lambda_m}\,\frac{p}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{e^2{}_{m-1}}{l - \lambda_m}\,\frac{p}{2}, \tag{6}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{(l - e_{m+1})^2}{l - \lambda_{m+1}}\,\frac{p}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{e^2{}_m}{l - \lambda_{m+1}}\,\frac{p}{2}. \tag{7}$$

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angenommen, dann hat man nach 3) 4) die Grenzwerthe von X_m:

$$X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m. \tag{8}$$

Bewegte Radlastzüge. Für jede Stellung eines beliebigen Lastsystems $P_1, P_2, \ldots$ auf der Fahrbahn hat man nach 1) mit § 25, 1) oder nach 2) mit § 10, 2), wenn die Grenzen der $\sum$ Verticalennummern bedeuten, für Gurtungen und Diagonalen:

$$(9) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(l - e_m) \sum_0^m Pa + e_m \sum_m^n P(l-a)\right] \frac{1}{lh},$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[\sum_0^{m-1} Pa + \left(\frac{l}{\lambda_m} - 1\right) \sum_{m-1}^m P(z-a) - \sum_m^n P(l-a)\right] \frac{d_m}{lh} \\ \qquad \text{mit} \quad z = \frac{l e_{m-1}}{l - \lambda_m}, \end{array} \right.$$

und für die Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\sum_0^{m-1} Pa + \left(\frac{l}{\lambda_m} - 1\right) \sum_{m-1}^m P(z-a) - \sum_m^n P(l-a)\right] \frac{1}{l} \\ \qquad \text{mit} \quad z = \frac{l e_{m-1}}{l - \lambda_m}, \end{array} \right.$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\sum_0^m Pa + \left(\frac{l}{\lambda_{m+1}} - 1\right) \sum_m^{m+1} P(z-a) - \sum_{m+1}^n P(l-a)\right] \frac{1}{l} \\ \qquad \text{mit} \quad z = \frac{l e_m}{l - \lambda_{m+1}}. \end{array} \right.$$

Der obere Grenzwerth von X_m ergiebt sich nach 9) bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m, der untere tritt für Eigengewicht allein ein. Weiter erhält man aus 1) mit § 25, 5) 6) oder unmittelbar aus 10) — 12) die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(13) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{d_m}{lh} \sum_m^n P(l-a),$$

mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(14) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{d_m}{lh} \sum_0^{m-1} Pa,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(15) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m \mp \frac{1}{l} \sum_m^n P(l-a),$$

mit Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(16) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \frac{1}{l} \sum_0^{m-1} Pa;$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

mit Zug II von $m+1$ bis n, Vorderrad O bei Verticale $m+1$,

$$(17) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m \mp \frac{1}{l} \sum_{m+1}^m P(l-a),$$

mit Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(18) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \frac{1}{l} \sum_0^m Pa.$$

Für D_1 und im Falle a) auch für V_1 tritt ein Grenzwerth bei Belastung durch Eigengewicht allein ein und ist $z=0$. Soll dann dem am Schlusse des § 25 Gesagten entsprechend der andere Grenzwerth für Zug I berechnet werden, so findet sich derselbe bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1, nach 10) oder 11). Für D_n und im Falle b) auch für V_{n-1} würde wegen $z=l$ Analoges gelten (Rad O bei Verticale $n-1$), doch hat man diese Stabkräfte der Symmetrie zur Trägermitte wegen gewöhnlich nicht zu berechnen.

Alle in diesem Paragraphen enthaltenen Gleichungen gehen mit $e_m = m\lambda$ in die für Parallelträger mit gleichlangen Feldern gültigen Spezialformeln der §§ 34—36 über. Der Fall ungleichlanger Felder kommt mitunter bei schiefen Brücken vor, wo man ihn aber, wenn nicht Symmetrie zur Trägermitte erreichbar ist, zu vermeiden sucht. Häufiger hat man es bei Berechnung mehrfacher Systeme auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme (VIII. Abschnitt) mit ihm zu thun. Wir setzen von nun an wieder gleichlange Felder voraus. — (Beispiele 46, 47, 48, Aufgabe 34.)

§ 38. Dreieckträger und Trapezträger. Einfaches System mit Verticalen. Allgemeines.

Die geometrische Anordnung dieser Träger wurde in § 17 besprochen. Die Gurtungen sind vollständig geradlinig oder folgen von einer Verticale ausgehend geraden Strecken. Da im letzteren Falle immer Symmetrie zur Verticalen durch die Trägermitte besteht, so genügen Formeln unter Voraussetzung von Abscisse 0 ausgehender gerader Gurtungen. Bezeichnet nun $\mu\lambda$ die (absolute) Horizontalentfernung des Schnittpunkts der Gurtungsrichtungslinien vom Auflager 0, so hat man bei nach 0 hin abnehmenden Verticalenlängen:

$$(1) \quad h_m = h_0 + mc, \quad x_m = x, \quad z_m = z, \quad \varepsilon = \nu = m + \mu,$$

und bei nach 0 hin zunehmenden Verticalenlängen

$$(2) \quad h_m = h_0 - mc, \quad x_m = x, \quad z_m = z, \quad \varepsilon = \nu = m - \mu.$$

Die Constanten c, μ sind in § 17 ausgedrückt, während Fig. 84—101 Skizzen hierher gehöriger Träger bilden.

In §§ 31—33 wurden die Stabkräfte von Balkenfachwerken einfachen Systems mit Verticalen und deren Grenzwerthe für beliebige Gurtungsformen festgestellt. Wir wollen deshalb hier nur die Fälle ins Auge fassen, dass sich die Richtungslinien der Gurtungen bei Abscisse 0 oder aber bei Abscisse l schneiden. Die so entstehenden Dreiecksträger und Trapezträger haben neben constructiver Einfachheit und leichter Berechnung den grossen Vortheil, dass jeder Stab bei allen Belastungen entweder nur Zug oder nur Druck erhält. Da sich für die Ausdrücke der Gurtungskräfte keine wesentlichen Vereinfachungen gegenüber den allgemeinen Formeln in §§ 31—33 ergeben, so ziehen wir bei den folgenden Spezialisirungen nur die Beanspruchungen der Füllungsglieder in Betracht. Da ferner die Fahrbahnlast bei den betrachteten Trägern wohl niemals zwischen beiden Gurtungen in den Verticalen angreift, so werden wir diesen Fall hier nicht mehr besonders erwähnen, bezüglich desselben ebenfalls auf §§ 31—33 verweisend. Wie dort, so gelten natürlich auch in den abzuleitenden Spezialformeln die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung, wobei diejenige Gurtung als X-Gurtung bezeichnet ist, welche man der Diagonale m nach der Seite von 0 hin folgend trifft. Endlich bedeutet nach wie vor S das Moment der Knotenpunktslasten vor Schnitt s (durch x_m, d_m, z_m für D_m, durch x_m, h_m, z_{m+1} für V_m) in Hinsicht

Auflager 0, S' das Moment der Knotenpunktslasten nach Schnitt s in Hinsicht Auflager l.

Gurtungsschnitte bei Abscisse 0 (Fig. 155 und 156). Wir erhalten aus 1):

$$(3)\qquad h_m = mc, \qquad x_m = x, \qquad z_m = z, \qquad \varepsilon = \nu = m,$$

und damit nach § 31, 10) bei beliebiger Belastung:

$$(4)\qquad D_m = \mp S \frac{d_m}{m\lambda h_{m-1}}, \qquad V_m = \pm S \frac{1}{m\lambda}.$$

Man sieht, dass alle Knotenpunktslasten zwischen 0 und s in gleichem Sinne zu D_m und V_m beitragen, die Knotenpunktslasten von s bis l aber ohne Einfluss auf diese Stabkräfte sind.

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen und bezeichnen g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, dann folgen aus § 31, 16) die Beanspruchungen für Eigengewicht allein:

$$(5)\qquad \mathfrak{D}_m = \mp (m-1) \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \qquad \mathfrak{V}_m = \pm \left(m - \frac{g_x - g_z}{g}\right) \frac{g\lambda}{2}.$$

Soll das Eigengewicht g nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, dann folgen aus 5):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(6)\qquad \mathfrak{V}_m = \pm (m-1) \frac{g\lambda}{2},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(7)\qquad \mathfrak{V}_m = \mp (m+1) \frac{g\lambda}{2}.$$

Gurtungsschnitte bei Abscisse l (Fig. 157 und 158). Es ergeben sich nach 2):

$$(8)\qquad h_m = (n-m)c, \qquad x_m = x, \qquad z_m = z, \qquad \varepsilon = \nu = m - n,$$

und damit nach § 31, 10) für beliebige Belastung:

$$(9)\qquad D_m = \pm S' \frac{d_m}{(n-m)\lambda h_{m-1}}, \qquad V_m = \mp S' \frac{1}{(n-m)\lambda}.$$

Im vorliegenden Falle tragen also die Knotenpunktslasten von s bis l in gleichem Sinne zu D_m und V_m bei, während die Knotenpunktslasten von 0 bis s ohne Einfluss auf diese Stabkräfte sind.

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen und sind

die Theile g_x und g_z von g auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen, dann folgen aus § 31, 11) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein:

$$(10) \qquad \mathfrak{D}_m = \pm(n-m+1)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2}, \quad \mathfrak{V}_m = \mp\left(n-m+\frac{g_x-g_z}{g}\right)\frac{g\lambda}{2}.$$

Soll das Eigengewicht g nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so liefert 10):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(11) \qquad \mathfrak{V}_m = \mp(n-m+1)\frac{g\lambda}{2},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(12) \qquad \mathfrak{V}_m = \pm(n-m-1)\frac{g\lambda}{2}.$$

§ 39. Dreieckströger und Trapezträger. Einfaches System mit Verticalen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind durch § 32, die Eigengewichtsbeanspruchungen $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ der Füllung durch § 38 bestimmt. Um spezielle Ausdrücke für die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder zu erhalten, haben wir die Werthe der ε, ν in die Gleichungen des § 32 einzusetzen. Wir können dabei ebensowohl von den für gewöhnliche Gurtungsformen wie von den für ungewöhnliche gegebenen Gleichungen ausgehen, da die Gurtungsschnitte gerade an den Grenzen der Spannweite liegen. Auch die in § 32 als Näherungsformeln angeführten Beziehungen würden im vorliegenden Falle genaue Resultate liefern, weil die ihnen zu Grunde liegende Annahme bezüglich der z (§ 24) ausnahmsweise erfüllt ist. Da nach § 38 alle Lasten in gleichem Sinne oder gar nicht zu D_m, V_m beitragen, so haben wir als untere Grenzwerthe dieser Stabkräfte:

$$(1) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

Gurtungsschnitte bei Abscisse 0. Wir erhalten mit $\varepsilon = m$ die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$(2) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp (m-1)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2},$$

und mit $\nu = m$ diejenigen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{B}_m \pm (m-1)\frac{p\lambda}{2}, \tag{3}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{B}_m \pm (m+1)\frac{p\lambda}{2}. \tag{4}$$

Gurtungsschnitte bei Abscisse l. Es ergeben sich mit $\varepsilon = m - n$ die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$D_m = \mathfrak{D}_m \pm (n - m + 1)\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2}, \tag{5}$$

und mit $\nu = m - n$ diejenigen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{B}_m \mp (n - m + 1)\frac{p\lambda}{2}, \tag{6}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$V_m = \mathfrak{B}_m \mp (n - m - 1)\frac{p\lambda}{2}. \tag{7}$$

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen, so haben wir nach § 32 oder nach vorstehenden Gleichungen und § 38 die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonalen in beiden betrachteten Fällen:

$$D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m, \tag{8}$$

und soll jenes Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte wirkend gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift (bei Dachbindern die oberen Knotenpunkte), dann folgt ebenso:

$$V_m = \frac{q}{g}\mathfrak{B}_m. \tag{9}$$

(Beispiele 49—51.)

§ 40. Dreieckstrāger und Trapezträger. Einfaches System mit Verticalen. Bewegte Radlastzüge.

Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen bleiben durch § 33 bestimmt. Die Eigengewichtsbeanspruchungen der Füllung sind aus § 38 zu entnehmen. Un die Grenzbeanspruchungen der Füllungsstäbe zu erhalten, können wir von den in § 33 für gewöhnliche

Gurtungsformen oder von den für ungewöhnliche gegebenen Regeln ausgehen. Da sich auf letzterem Wege etwas genauere Resultate erwarten lassen (mit Rücksicht auf die Lage der Grenzpunkte z), so soll dieser eingeschlagen und bezüglich des erstern auf § 33 verwiesen werden. Nach § 38 tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu D_m, V_m bei, wonach

(1) $$D_m = \mathfrak{D}_m, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m$$

die unteren Grenzwerthe dieser Stabkräfte sind.

Gurtungsschnitte bei Abscisse 0. Für jede Stellung eines Lastsystems P_1, P_2, ... auf der Fahrbahn hat man nach § 33, 3) — 5) mit $\varepsilon = \nu = m$ die Beanspruchung der Diagonale m:

(2) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^{m} P(z-a)\right] \dfrac{d_m}{m\lambda h_{m-1}} \\ \text{mit } z = m\lambda, \end{cases}$$

und die Beanspruchung der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

(3) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\sum_0^{m-1} Pa + (m-1)\sum_{m-1}^{m} P(z-a)\right] \dfrac{1}{m\lambda} \\ \text{mit } z = m\lambda, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

(4) $$\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\sum_0^{m} Pa + m\sum_{m}^{m+1} P(z-a)\right] \dfrac{1}{m\lambda} \\ \text{mit } z = (m+1)\lambda. \end{cases}$$

Weiter ergibt sich die obere Grenzbeanspruchung der Diagonale m:

mit Zug I von 0 bis m oder n, Rad O bei Verticalen $m - 1$,

D_m nach 2),

und die obere Grenzbeanspruchung der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

mit Zug I von 0 bis m oder n, Rad O bei Verticale $m - 1$,

V_m nach 3),

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

mit Zug I von 0 bis $m+1$ oder n, Rad O bei Verticale m,

V_m nach 4).

Gurtungsschnitte bei Abscisse l. Für beliebige Stellungen des Lastsystems $P_1, P_2, \ldots$ auf der Fahrbahn folgt nach § 33, 3)—5) mit $\varepsilon = \nu = m - n$ die Beanspruchung der Diagonale m:

$$(5) \quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[(n-m)\sum_{m-1}^{m} P(a-z) + \sum_{m}^{n} P(l-a)\right] \dfrac{d_m}{(n-m)\lambda h_{m-1}} \\ \text{mit } z = (m-1)\lambda, \end{cases}$$

und die Beanspruchung der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(6) \quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m + \left[(n-m)\sum_{m-1}^{m} P(a-z) + \sum_{m}^{n} P(l-a)\right] \dfrac{1}{(n-m)\lambda} \\ \text{mit } z = (m-1)\lambda, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(7) \quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[(n-m-1)\sum_{m}^{m+1} P(a-z) + \sum_{m+1}^{n} P(l-a)\right] \dfrac{1}{(n-m)\lambda} \\ \text{mit } z = m\lambda. \end{cases}$$

Sodann erhält man die obere Grenzbeanspruchung der Diagonale m

mit Zug I von 0 oder $m-1$ bis n, Rad O bei Verticale m

D_m nach 5),

und die obere Grenzbeanspruchung der Verticale m,

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

mit Zug I von 0 oder $m-1$ bis n, Rad O bei Verticale m,

V_m nach 6),

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

mit Zug I von 0 oder m bis n, Rad O bei Verticale $m+1$,

V_m nach 7).

(Beispiel 52 u. 53.)

§ 41. Parabelträger und Halbparabelträger. Einfaches System mit Verticalen. Allgemeines.

Die geometrische Anordnung dieser Träger wurde in § 17 besprochen. Die Gurtungsschwerlinien sind Parabeln von verticaler Axe eingeschrieben. Bezeichnet f den Absolutwerth der Pfeildifferenz beider Parabelbogen und werden die Gurtungsstäbe symmetrisch zur Verticallinie durch die Trägermitte vorausgesetzt, so hat man, wenn die Verticalenlängen nach den Trägerenden hin abnehmen:

$$(1)\quad \begin{cases} h_m = h_0 + m\,(n-m)\,\frac{4f}{n^2}, & \varepsilon = \dfrac{m\,(n-m) + \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + 1}, \\ & v = \dfrac{m\,(n-m) + \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + \omega}, \end{cases}$$

und wenn die Verticalenlängen nach den Trägerenden hin zunehmen:

$$(2)\quad \begin{cases} h_m = h_0 - m\,(n-m)\,\frac{4f}{n^2}, & \varepsilon = \dfrac{m\,(n-m) - \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + 1}, \\ & v = \dfrac{m\,(n-m) - \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + \omega}. \end{cases}$$

Die Werthe von f, ω sind in § 17 angegeben und man hat beispielsweise

bei horizontaler X-Gurtung: $\omega = -1$

„ „ Z-Gurtung: $\omega = 1$

„ zu einer Horizontale symmetrischen Gurtung: $\omega = 0$.

Da die Stabkräfte von Balkenfachwerken einfachen Systems mit Verticalen und deren Grenzwerthe in §§ 31—33 für beliebige Gurtungsformen festgestellt wurden, so wollen wir hier Spezialisirungen nur insoweit vornehmen, als sich bemerkenswerthe Vereinfachungen ergeben, und das ist nur für Parabelträger der Fall. Wie in §§ 31—33 gelten auch in den entstehenden Spezialformeln die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung, unter letzterer Bezeichnung diejenige Gurtung verstanden, welche man der Diagonale m nach der Seite von 0 hin folgend trifft. S bedeutet das Moment der Knotenpunktslasten vor Schnitt s (durch x_m, d_m, z_m für X_m, Z_m, D_m, durch x_m h_m, z_{m+1} für V_m) in Hinsicht des Auflagers 0, S' das Moment der Knotenpunktslasten nach Schnitt s in Hinsicht des Auflagers l.

Für Parabelträger haben wir nun nach 1) mit $h_0 = 0$:

(3) $$h_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2}, \qquad \varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1}, \qquad v = \frac{m(n-m)}{n-2m+\omega},$$

und damit nach § 31, 10) für beliebige Belastung:

(4) $$\begin{cases} X_m = \mp\left(\frac{S}{m} + \frac{S'}{n-m}\right)\frac{nx_m}{4\lambda f}, \\ Z_m = \pm\left(\frac{S}{m-1} + \frac{S'}{n-m+1}\right)\frac{nz_m}{4\lambda f}, \\ D_m = \mp\left(\frac{n-m+1}{m}S - \frac{m-1}{n-m}S'\right)\frac{d_m}{lh_{m-1}}, \\ V_m = \pm\left(\frac{n-m+\omega}{m}S - \frac{m-\omega}{n-m}S'\right)\frac{1}{l}. \end{cases}$$

Man sieht, dass selbst diese Formeln kaum neben den viel allgemeineren § 31, 10) angeführt zu werden brauchten.

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen und sind g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung gerechnet werden, dann folgen aus § 31, 16) mit 3) die Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein:

(5) $$\begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp\frac{ngl}{8f}x_m, & \mathfrak{Z}_m = \pm\frac{ngl}{8f}z_m, \\ \mathfrak{D}_m = 0 & \mathfrak{V}_m = \mp\left(\frac{g_x - g_z}{g} - \omega\right)\frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

und beispielsweise

(6) bei horizontaler X-Gurtung: $\mathfrak{V}_m = \mp g_x\lambda$,

(7) „ „ Z-Gurtung: $\mathfrak{V}_m = \pm g_z\lambda$,

(8) „ zu einer horizontal-symmetrischen Gurtung: $\mathfrak{V}_m = \mp\frac{g_x - g_z}{2}\lambda$.

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist das Eigengewicht einzuschliessen bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x, bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_z.

Soll das Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, dann hat man in vorstehenden Gleichungen zu setzen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift, $g_x = g$, $g_z = 0$,

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift, $g_z = g$, $g_x = 0$.

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Substitutionen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Substitutionen b).

Nach 5) können wir aussprechen: *Ist ein Parabelbalkenfachwerk mit q per Längeneinheit auf der ganzen Länge gleichmässig belastet, dann sind die Beanspruchungen aller Diagonalen gleich Null, die Horizontalcomponenten der Gurtungsbeanspruchungen dem Zahlenwerthe $\frac{ql^2}{8f}$ nach gleich gross, die ganzen Beanspruchungen der Gurtungsstäbe proportional deren Längen und bei horizontaler Gurtung gleich $\pm \frac{ql^2}{8f}$. Ist das Verhältniss der Knotenpunktslasten im Obergurt und Untergurt constant, dann sind auch die Beanspruchungen aller Verticalen von gleichem Werth.*

Wir wollem im nächsten § noch die Grenzwerthe der Stabkräfte von Parabelträgern für gleichmässig vertheilte bewegte Last ableiten, während bezüglich der Berechnung für bewegte Radlastzüge auf § 33 verwiesen wird. — (Beispiele 55 u. 56, Aufgabe 35.)

§ 42. Parabelträger einfachen Systems mit Verticalen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die Beanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ durch das Eigengewicht allein sind aus § 41 zu entnehmen. Um spezielle Ausdrücke für die Grenzwerthe der Stabkräfte zu erhalten, haben wir die Werthe von h_m, ε, ν nach § 41, 3) in die Gleichungen des § 32 einzusetzen. Es folgen dann für die Gurtungen und Diagonalen:

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \frac{pl}{8f} n x_m, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \frac{pl}{8f} n z_m, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \dfrac{n}{n+1} \dfrac{pl}{8f} d_m, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \dfrac{n}{n+1} \dfrac{pl}{8f} d_m, \end{cases}$$

und für die Verticalen nach § 32, 8) 9):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift (wie z. B. üblich bei Brückenträgern mit horizontaler X-Gurtung, wofür $\omega = -1$):

$$(4)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (m-\omega)\dfrac{(m-1)(n-m)+m-\omega}{(m-1)n+m-\omega}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{(n-m+\omega)(m-1)^2}{(m-1)n+m-\omega}\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift (wie z. B. üblich bei Brückenträgern mit horizontaler Z-Gurtung, wofür $\omega = 1$):

$$(5)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{(m-\omega)(n-m-1)^2}{(n-m)n-m+\omega}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm (n-m+\omega)\dfrac{(n-m)(m+1)-m+\omega}{(n-m)n-m+\omega}\dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an (wie häufig bei Brückenträgern mit zu einer Horizontalen symmetrischen Gurtung, wofür $\omega = 0$), dann gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe 4), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe 5).

Die Formeln 4) 5) sind an die Voraussetzung gebunden, dass $m - v$ zwischen 0 und n liegt oder die Richtungslinien der Stäbe x_m und z_{m+1} sich ausserhalb der Spannweite l schneiden, wie dies gewöhnlich zutrifft. Bei Sichelträgern kann es jedoch auch vorkommen, dass $0 < m - v < n$ ist. In diesem Falle treten nach § 32, 11) 12) an Stelle der vorstehenden Formeln für V_m die folgenden:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(6)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm (\omega - 1 + m)\frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(7)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm (\omega + 1 + m)\frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen, dann hat man nach 1) — 3) und § 41, 5) die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen:

$$(8)\qquad X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$(9)\qquad D_m = \pm \frac{n}{n+1}\frac{pl}{8f}d_m, \qquad D_m = \mp \frac{n}{n+1}\frac{pl}{2f}d_m.$$

Ist bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht auf die ganze Länge eines Parabelbalkenfachwerks die Verkehrslast mit p per Längeneinheit auf die

ergriffene Strecke gleichmässig vertheilt, dann sind die Horizontalcomponenten der Grenzbeanspruchungen aller Diagonalen und die beiden Grenzbeanspruchungen jeder bestimmten Diagonale proportional p, also bei constantem p dem Zahlenwerthe nach gleich gross. Im letzteren Falle sind sowohl die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen unter sich als die oberen Grenzbeanspruchungen und unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungsstäbe je unter sich proportional den Stablängen.

Näherungsformeln (Vorausbestimmte Knotenpunktslasten). Nach § 32, 15) — 17) erhalten wir etwas zu ungünstig als Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$(10)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{pl}{8f} d_m, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \frac{pl}{8f} d_m, \end{cases}$$

und als Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift:

$$(11)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (m-\omega)(n-m+1)\frac{p\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm (n-m+\omega)(m-1)\frac{p\lambda}{2n}, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift:

$$(12)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (m-\omega)(n-m-1)\frac{p\lambda}{2n}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm (n-m+\omega)(m+1)\frac{p\lambda}{2n}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe 11), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe 12).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge angenommen, dann liefert 10) die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$(13)\qquad D_m = \pm \frac{pl}{8f} d_m, \qquad D_m = \mp \frac{pl}{8f} d_m.$$

Mittelst 10) — 12) und 8) ergeben sich dieselben Grenzwerthe, welche bei der gewöhnlichen Berechnung mit vorausbestimmten Knotenpunktslasten $q\lambda$ und $g\lambda$ erhalten werden. Die Abweichungen derselben gegen die genaueren Werthe sind um so grösser, je kleiner die Felderzahl n. — (Beispiele 54 u. 57.)

§ 43. Träger einfachen Systems nach der Grenzform gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen. Formberechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Bei eisernen Trägern wird vielfach gewünscht, die Diagonalen nur auf Zug zu beanspruchen und doch Gegendiagonalen zu vermeiden. Bei Holzconstructionen wäre auch der Fall denkbar, dass man den Diagonalen nur Druck geben will (S. 107). Beides lässt sich u. A. durch Anwendung von Dreiecksträgern und abgesehen von einigen Feldern um die Trägermitte auch durch Parallelträger erreichen. Es handle sich nun aber darum, die Trägerform so festzustellen, dass für alle Diagonalen die eine Grenzbeanspruchung gleich Null und die vorkommenden Beanspruchungen gleicher Art (entweder Zug oder Druck) werden. Die Form hängt dann wesentlich vom Verhältniss des Eigengewichts zur Verkehrslast ab. Ersteres soll mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten. Da der Werth von g im Voraus nicht genau bekannt ist, so thut man gut, für die Formberechnung ein etwas geringeres Eigengewicht einzuführen, als man sonst annehmen würde und bei der nachfolgenden Berechnung der Beanspruchungen annehmen wird. Die rechnungsmässige untere Grenzbeanspruchung einer Diagonale ergibt sich dann proportional der Differenz jener beiden g und von gleicher Art wie die obere Grenzbeanspruchung.

Die Form der einen Gurtung darf frei gewählt werden, man kann sich wie in andren Fällen Segmentträger, Linsenträger, Sichelträger u. s. w. construirt denken. Ausgeführt wurden bis jetzt nur zur Verticalen durch die Trägermitte symmetrische Segmentträger mit horizontalem Untergurt (Schwedlerträger, § 45). Wir führen die Formbestimmung zunächst für gleichmässig vertheilte bewegte Last durch und zwar speziell nach den Formeln für vorausbestimmte Knotenpunktslasten. Im folgenden § wird sich die Berechnung für bewegte Radlastzüge anschliessen. Ist die Form festgestellt, so ergeben sich die Stabkräfte für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge nach den Gleichungen der §§ 31 — 33 für beliebige Gurtungsformen. Für die Beanspruchungen der Diagonalen werden wir jedoch auch spezielle Formeln erhalten.

Für die Diagonale des m^{ten} Feldes hat man nach § 31, 16) die Beanspruchung durch das Eigengewicht allein:

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_m = \pm \left(n - 2m + 1 - \frac{n-m}{\varepsilon}\, m\right) \frac{g \lambda d_m}{2 h_{m-1}},$$

und nach § 32, 15) die Grenzbeanspruchungen:
für rechtsseitige Belastung,

$$(2)\quad \begin{cases} D_m = \pm\Big[\big(n - 2m + 1 - \frac{n-m}{\varepsilon}\, m\big) g \\ \qquad + (n-m)(n-m+1)(\varepsilon - m)\frac{p}{\varepsilon n}\Big]\frac{\lambda d_m}{2 h_{m-1}}, \end{cases}$$

für linksseitige Belastung,

$$(3)\quad \begin{cases} D_m = \pm\Big[\big(n - 2m + 1 - \frac{n-m}{\varepsilon}\, m\big) g \\ \qquad - m(m-1)(\varepsilon + n - m)\frac{p}{\varepsilon n}\Big]\frac{\lambda d_m}{2 h_{m-1}}, \end{cases}$$

wobei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Wir bezeichnen das für die Formbestimmung massgebende g durch g_1 und setzen

$$(4)\qquad \alpha = n\frac{g_1}{p}.$$

a) **Die Grenzbeanspruchung für linksseitige Belastung ist gleich Null.** (Fig. 161—163). Aus 3) ergiebt sich für $D_m = 0$ mit $g = g_1$

$$(5)\qquad \varepsilon = \frac{m(n-m)(m-1+\alpha)}{(n-2m+1)\alpha - m(m-1)}.$$

Da nun nach § 16, 1) allgemein

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \frac{h_{m-1}}{h_m}},$$

so folgt durch Gleichsetzen zur Feststellung der Trägerform:

$$(6)\qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{(m-1)(n-m+1)(m+\alpha)}{m(n-m)(m-1+\alpha)}.$$

Diese Beziehung lässt sich auch schreiben

$$\frac{m+\alpha}{n-m}\,\frac{h_m}{m} = \frac{m-1+\alpha}{n-m+1}\,\frac{h_{m-1}}{m-1},$$

wonach für alle m constant:

$$(7)\qquad c = \frac{m+\alpha}{n-m}\,\frac{h_m}{m}.$$

Aus 6) folgt

für $m = 1$, $\quad \frac{h_{m-1}}{h_m} = 0$, $\quad$ also $h_0 = 0$,

„ $m = n$, $\quad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \infty$, $\quad$ „ $h_n = 0$,

die beiden Gurtungen treffen sich über den Auflagern. Vom Auflager 0 an wächst der Verticalabstand der Gurtungen, wir haben

$$\text{(8)} \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} \leqq 1, \quad \text{solange} \ \frac{(m-1)(n-m+1)(m+\alpha)}{m(n-m)(m-1+\alpha)} \leqq 1,$$

woraus der Index m der längsten Verticale berechnet werden kann. Dieselbe liegt bei den üblichen n, α auf der ersten Trägerhälfte. Multiplicirt man auf der rechten Seite von 7) Zähler und Nenner mit λ^2 und bezeichnet die der Abscisse $x = m\lambda$ entsprechende Trägerhöhe mit y, so folgt:

$$\text{(9)} \qquad y = \frac{c x (l - x)}{\lambda(\alpha\lambda + x)}.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Hyperbelbogens, welcher bei $x = 0$ und $x = l$ die Abscissenaxe schneidet und bei $x = -\alpha\lambda$ eine verticale Asymptote hat. Den Ordinaten eines solchen Bogens entsprechend variiren also die Längen h_m der Verticalen. Setzen wir

$$\text{für } x = \frac{l}{2}, \quad y = f,$$

so folgt zur Berechnung von f und als neuer Ausdruck für die Constante c:

$$\text{(10)} \qquad c = \left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right)\frac{2f}{n}.$$

Durch Substitution von 5) in 1) — 3) ergeben sich die Eigengewichtsbeanspruchung und beide Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

$$\mathfrak{D}_m = \pm \frac{(m-1)(n-m+1)}{m-1+\alpha} \frac{g\lambda d_m}{2h_{m-1}},$$

$$D_m = \pm\left(g + \frac{n+\alpha}{n} p\right)\frac{(m-1)(n-m+1)}{m-1+\alpha} \frac{\lambda d_m}{2h_{m-1}},$$

$$D_m = \pm\left(g - \frac{\alpha}{n} p\right)\frac{(m-1)(n-m+1)}{m-1+\alpha} \frac{\lambda d_m}{2h_{m-1}},$$

oder mit Rücksicht auf 4) 7) einfacher:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{D}_m = \pm \dfrac{g\lambda}{2c} d_m, \\[2ex] D_m = \pm \dfrac{q + g_1}{2c} \lambda d_m = \dfrac{q + g_1}{g} \mathfrak{D}_m, \\[2ex] D_m = \pm \dfrac{g - g_1}{2c} \lambda d_m = \dfrac{g - g_1}{g} \mathfrak{D}_m, \end{cases}$$

worin wie immer $q = g + p$ ist. Für $g_1 = g$ ist die zweite Grenzbeanspruchung gleich Null; wählen wir jedoch $g_1 < g$, so wird die

zweite Grenzbeanspruchung zwar von 0 verschieden, aber vom gleichem Vorzeichen wie die erste, der Hauptzweck der betrachteten Trägerform, die Erreichung gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen wird bei diesem Vorgehen um so sicherer erreicht. Nach 11) erleiden die Diagonalen bei oben liegender X-Gurtung nur Zug, bei unten liegender X-Gurtung nur Druck. Die Horizontalcomponenten der oberen Grenzbeanspruchungen aller Diagonalen sind gleich gross und ebenso die Horizontalcomponenten der unteren Grenzbeanspruchungen und der Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein.

b) **Die Grenzbeanspruchung für rechtsseitige Belastung ist gleich Null.** (Fig. 164—166). Gleichung 2) liefert für $D_m = 0$, mit $g = g_1$ und der Bezeichnung 4):

$$(12) \qquad \varepsilon = \frac{m(n-m)(n-m+1+\alpha)}{(n-2m+1)\alpha + (n-m)(n-m+1)}.$$

Durch Gleichsetzen mit

$$\varepsilon = -\frac{1}{1-\frac{h_{m-1}}{h_m}}$$

folgt zur Feststellung der Trägerform:

$$(13) \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{(m-1)(n-m+1)(n-m+\alpha)}{m(n-m)(n-m+1+\alpha)}.$$

Diese Gleichung kann man schreiben:

$$\frac{n-m+\alpha}{n-m}\,\frac{h_m}{m} = \frac{n-m+1+\alpha}{n-m+1}\,\frac{h_{m-1}}{m-1},$$

und ist danach für alle m constant:

$$(14) \qquad c = \frac{n-m+\alpha}{n-m}\,\frac{h_m}{m}.$$

Aus 13) folgt

$$\text{für } m = 1, \quad \frac{h_{m-1}}{h_m} = 0, \quad \text{also } h_0 = 0,$$

$$\text{„} \quad m = n, \quad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \infty, \quad \text{„} \quad h_n = 0,$$

die beiden Gurtungen treffen sich über den Auflagern. Vom Auflager 0 an wächst der Verticalabstand der Gurtungen, es ist

$$(15) \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} \leqq 1, \quad \text{solange } \frac{(m-1)(n-m+1)(n-m+\alpha)}{m(n-m)(n-m+1+\alpha)} \leqq 1.$$

Der Index m der längsten Verticale, welche auf der zweiten Trägerhälfte zu liegen pflegt, kann hiernach berechnet werden. Multiplicirt

man auf der rechten Seite von 14) Zähler und Nenner mit λ^2 und bezeichnet die der Abscisse $x = m\lambda$ entsprechende Trägerhöhe mit y, so folgt:

$$(16) \qquad y = \frac{ex(l-x)}{\lambda(\alpha\lambda + l - x)}.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, welche bei $x = 0$ und $x = l$ die Abscissenaxe schneidet und bei $x = l + \alpha\lambda$ eine verticale Asymtote hat. Den innerhalb l gelegenen Ordinaten eines solchen Hyperbelbogens entsprechend variiren die Verticalenlängen h_m. Bezeichnen wir wieder

$$\text{für } x = \frac{l}{2}, \qquad y = f,$$

so folgt weiter:

$$(17) \qquad e = \left(1 + \frac{2\alpha}{n}\right)\frac{2f}{n} = c.$$

Durch Substitution von 12) in 1) — 3) ergeben sich die Beanspruchung durch Eigengewicht allein und Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

$$\mathfrak{D}_m = \mp \frac{(m-1)(n-m+1)}{n-m+1+\alpha} \frac{g\lambda d_m}{2h_{m-1}},$$

$$D_m = \mp \left(g - \frac{\alpha}{n}p\right) \frac{(m-1)(n-m+1)}{n-m+1+\alpha} \frac{\lambda d_m}{2h_{m-1}},$$

$$D_m = \mp \left(g + \frac{n+\alpha}{n}p\right) \frac{(m-1)(n-m+1)}{n-m+1+\alpha} \frac{\lambda d_m}{2h_{m-1}},$$

oder mit Rücksicht auf 4) 14) 17):

$$(18) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D}_m = \mp \dfrac{g\lambda}{2c} d_m, \\ D_m = \pm \dfrac{g - g_1}{2c} \lambda d_m = \dfrac{g - g_1}{g} \mathfrak{D}_m, \\ D_m = \pm \dfrac{q + g_1}{2c} \lambda d_m = \dfrac{q + g_1}{g} \mathfrak{D}_m. \end{cases}$$

Die erste Grenzbeanspruchung wird gleich Null, wenn $g_1 = g$ gewählt wird. Für $g_1 < g$ erhalten beide Grenzbeanspruchungen das gleiche Vorzeichen; sie werden negativ und Druck bei oben liegender X-Gurtung, positiv und Zug bei unten liegender X-Gurtung. Die Horizontalcomponenten aller oberen Grenzbeanspruchungen sind gleich gross und ebenso diejenigen aller unteren Grenzbeanspruchungen und der Beanspruchungen durch Eigengewicht allein.

Die Gleichung 16) geht wegen 17) in 9) über, wenn $l - x$ an Stelle von x gesetzt wird. Daraus folgt, dass die unter b) erhaltenen Träger mit den unter a) erhaltenen übereinstimmen, die letzteren

jedoch um die Verticallinie durch die Trägermitte gedreht erscheinen, bis beide Enden mit einander vertauscht sind. Der Träger Fig. 165 entspricht dem Träger Fig. 163 und der Träger Fig. 166 demjenigen Fig. 162, wie auch die gefundenen Beanspruchungen erkennen lassen. Man konnte auf alles dies von vornherein schliessen.

§ 44. Träger einfachen Systems nach der Grenzform gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen. Formberechnung für bewegte Radlastzüge.

Für die Diagonale des m^{ten} Feldes hat man bei beliebigen Gurtungsformen nach § 31, 16) die Beanspruchung durch Eigengewicht allein:

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_m = \pm \left(n - 2m + 1 - \frac{n-m}{\varepsilon} m\right) \frac{g \lambda d_m}{2 h_{m-1}},$$

und nach § 33, 7) 8) die Grenzbeanspruchungen:

für rechtsseitige Belastung, mit Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(2) \quad D_m = \pm \left[\left(n - 2m + 1 - \frac{n-m}{\varepsilon} m\right) \frac{g \lambda}{2} + \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon l} \sum_m^n P(l-a)\right] \frac{d_m}{h_{m-1}},$$

für linksseitige Belastung, mit Zug II von 0 bis $m - 1$, Vorderrad O bei Verticale $m - 1$,

$$(3) \quad D_m = \pm \left[\left(n - 2m + 1 - \frac{n-m}{\varepsilon} m\right) \frac{g \lambda}{2} - \frac{\varepsilon + n - m}{\varepsilon l} \sum_0^{m-1} Pa\right] \frac{d_m}{h_{m-1}}.$$

Wir bezeichnen das für die Formbestimmung massgebende Eigengewicht per Längeneinheit durch g_1 und setzen für Belastung durch Zug II von 0 bis $m - 1$, Vorderrad O bei $m - 1$,

$$(4) \qquad \alpha = \frac{2}{l \lambda g_1} \sum_0^{m-1} Pa,$$

und für Belastung durch Zug II von m bis n, Vorderrad O bei m,

$$(5) \qquad \beta = \frac{2}{l \lambda g_1} \sum_m^n P(l-a).$$

a) **Die Grenzbeanspruchung für linksseitige Belastung ist gleich Null.** (Fig. 162, 163). Aus 3) folgt für $D_m = 0$ mit $g = g_1$ und 4):

$$(6) \qquad \varepsilon = \frac{(n-m)(m+\alpha)}{n - 2m + 1 + \alpha},$$

und weil allgemein

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \frac{h_{m-1}}{h_m}},$$

zur Berechnung der Trägerform:

(7) $$\frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{n-m+1}{n-m} \cdot \frac{m-1+\alpha}{m+\alpha}.$$

Da hiernach

$$\text{für } m = 1 \text{ mit } \alpha = 0, \quad \frac{h_{m-1}}{h_m} = 0, \text{ also } h_0 = 0,$$

$$\text{„} \quad m = n, \quad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \infty, \text{ „} \quad h_n = 0,$$

so treffen sich die beiden Gurtungen über den Auflagern. Wir haben

(8) $$\frac{h_{m-1}}{h_m} \leqq 1, \quad \text{solange} \quad \frac{n-m+1}{n-m} \cdot \frac{m-1+\alpha}{m+a} \leqq 1,$$

wonach der Index m der längsten Verticale berechnet werden kann.

Durch Substitution von 4)—6) in 1)—3) erhält man die Eigengewichtsbeanspruchung und beide Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

(9) $$\mathfrak{D}_m = \pm \frac{n-m+1}{m+1} \cdot \frac{\alpha d_m}{h_{m-1}} \cdot \frac{g\lambda}{2},$$

(10) $$\begin{cases} D_m = \pm \left[g + \frac{n\alpha + m(m-1)}{(n-m)(n-m+1)} \cdot \frac{\beta g_1}{\alpha}\right] \frac{n-m+1}{m+\alpha} \cdot \frac{\alpha\lambda d_m}{2h_{m-1}}, \\ D_m = \pm (g - g_1) \frac{n-m+1}{m+\alpha} \cdot \frac{\alpha\lambda d_m}{2h_{m-1}}. \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen lassen sich auch ausdrücken:

(11) $$\begin{cases} D_m = \left[1 + \frac{n\alpha + m(m-1)}{(n-m)(n-m+1)} \cdot \frac{\beta g_1}{\alpha g}\right] \mathfrak{D}_m, \\ D_m = \frac{g - g_1}{g} \mathfrak{D}_m. \end{cases}$$

Für $g_1 = g$ ist die zweite Grenzbeanspruchung gleich Null; wählen wir $g_1 < g$, dann ist sie von Null verschieden und gleichen Vorzeichens wie die erste. Die Diagonalen werden nur gezogen bei oben liegender X-Gurtung, nur gedrückt bei unten liegender X-Gurtung.

b) **Die Grenzbeanspruchung für rechtsseitige Belastung ist gleich Null.** (Fig. 165, 166). Gleichung 2) liefert für $D_m = 0$ mit $g = g_1$ und 5):

(12) $$\varepsilon = \frac{m(n-m+\beta)}{n-2m+1+\beta}.$$

Durch Gleichsetzen mit

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \frac{h_{m-1}}{h_m}}$$

folgt zur Feststellung der Trägerform:

$$(13) \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \frac{m-1}{m} \, \frac{n-m+1+\beta}{n-m+\beta}.$$

Da hiernach

$$\text{für } m = 1, \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = 0, \text{ also } h_0 = 0,$$

$$\text{„} \; m = n \text{ mit } \beta = 0, \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} = \infty, \text{ „ } h_n = 0,$$

so treffen sich die beiden Gurtungen über den Auflagern. Es ist

$$(14) \qquad \frac{h_{m-1}}{h_m} \leq 1, \quad \text{solange } \frac{m-1}{m} \, \frac{n-m+1+\beta}{n-m+\beta} \leq 1,$$

wonach der Index m der längsten Verticale berechnet werden kann.

Mit Rücksicht auf 4) 5) 12) folgen aus 1) — 3) die Eigengewichtsbeanspruchung und Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

$$(15) \qquad \mathfrak{D}_m = \mp \frac{m-1}{n-m+\beta} \, \frac{\beta d_m}{h_{m-1}} \, \frac{g\lambda}{2},$$

$$(16) \quad \begin{cases} D_m = \mp (g - g_1) \dfrac{m-1}{n-m+\beta} \, \dfrac{\beta \lambda d_m}{2 h_{m-1}}, \\[2ex] D_m = \mp \left[g + \dfrac{n\beta + (n-m)(n-m+1)}{m(m-1)} \, \dfrac{\alpha g_1}{\beta} \right] \dfrac{m-1}{n-m+\beta} \, \dfrac{\beta \lambda d_m}{2 h_{m-1}}. \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen lassen sich auch ausdrücken:

$$(17) \quad \begin{cases} D_m = \dfrac{g - g_1}{g} \mathfrak{D}_m, \\[2ex] D_m = \left[1 + \dfrac{n\beta + (n-m)(n-m+1)}{m(m-1)} \, \dfrac{\alpha g_1}{\beta g} \right] \mathfrak{D}_m. \end{cases}$$

Für $g_1 = g$ ist die erste Grenzbeanspruchung gleich Null. Wählt man $g_1 < g$, so werden beide Grenzbeanspruchungen von gleichem Vorzeichen und zwar Druck bei oben liegender X-Gurtung, Zug bei unten liegender X-Gurtung.

Auch bei der jetzigen Formbestimmung haben wir unter b) dieselben Träger wie unter a) mit vertauschten Enden erhalten. — (Aufgabe 36.)

§ 45. Schwedlerträger einfachen Systems.

Schwedler führte die Träger nach der Grenzform einfacher Zugdiagonalen ein (erste Ausführung 1863 Weserbrücke bei Corvey, doppeltes System, Zeitschr. f. Bauwesen 1867). Der Träger wurde dabei in üblicher Weise symmetrisch zur Trägermitte angenommen. Für diesen Fall sind nach Fig. 162, 163 zwei Systeme Fig. 167 und 168 möglich. Die Form der einen Gurtung ist beliebig, während die Felderzahl gerade sein muss. In Fig. 169, 170 sind die entstehenden Träger mit horizontalem Untergurt angedeutet, wie er bisher bei Schwedlerträgern immer angewendet wurde. Träger des Systems Fig. 170 wird man jedoch nicht ausführen, denn wenn die Erzielung einfacher Zugdiagonalen durch Formen ähnlich diesen erkauft werden sollte, so würde dies einfacher durch Dreieckstäger geschehen. Es bleibt also das System Fig. 169. Um die hierbei um die Trägermitte entstehende, einspringende Gurtungsecke zu vermeiden, hat *Schwedler* zwischen den längsten Verticalen ein Stück Parallelträger eingeschaltet. Indem damit in den mittleren Feldern die Grenzform einfacher Zugdiagonalen verlassen wird, erhalten einfache Diagonalen daselbst Zug und Druck, und sollen die Diagonalen nur Zug aushalten, so müssen Gegendiagonalen zur Verwendung kommen. Die Felderzahl n aber kann nun gerade oder ungerade sein.

Bei der Formberechnung von Schwedlerträgern wird man im Allgemeinen wie folgt vorgehen. Die Spannweite l ist bekannt, die Felderzahl n und grösste Trägerhöhe werden angenommen. Der Symmetrie halber genügt es, die Form der ersten Trägerhälfte zu berechnen. Ist nun g_1 das Eigengewicht per Längeneinheit, welches der Formberechnung zu Grunde gelegt werden soll, und welches zweckmässig etwas kleiner als das Eigengewicht g zur Berechnung der Beanspruchungen gewählt wird, so erhält man α für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus § 43, 4) oder α, β für bewegte Radlastzüge aus § 44, 4) 5). Die letzte Verticale, bis zu welcher die Trägerhöhe nach der Mitte hin wächst, findet sich für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus § 43, 8), für bewegte Radlastzüge aus § 44, 8). Die so gefundene Verticale wie alle weiter nach der Mitte gelegenen erhalten die Länge h, während von ihr beginnend nach Auflager 0 hin die Längen der Verticalen für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus § 43, 6), für bewegte Radlastzüge aus § 44, 7) hervorgehen. Da man ausserhalb der Felder mit parallelen Gurtungen die Form der einen Gurtung beliebig wählen kann, so können mit den berech-

neten Verticalenlängen noch sehr verschiedene Trägerformen entstehen (Fig. 171—174), praktisch dürften besonders Segmentträger und Linsenträger in Betracht kommen, und bisher wurden nur Segmentträger mit horizontalem Untergurt und unten liegender Fahrbahn ausgeführt. Fig. 171 stellt also den besonders in Norddeutschland so sehr verbreiteten *Schwedlerträger* dar.

Anstatt wie angegeben die Grenze des Parallelträgerstücks zu berechnen, kann man auch von vornherein eine geeignet erscheinende oder gewünschte Anzahl Felder mit parallelen Gurtungen annehmen und von der am weitesten nach 0 hin gelegenen Verticale der Länge h ganz wie oben mittelst der Gleichung für $h_{m-1} : h_m$ die übrigen Verticalenlängen berechnen. Dies letzte Verfahren würde auch bei Trägern des Systems Fig. 168, 170 anzuwenden sein, wenn man ein Stück Parallelträger einschalten wollte, wobei α, β wie oben und $h_{m-1} : h_m$ für gleichmässig vertheilte bewegte Last aus § 43, 13), für bewegte Radlastzüge aus § 44, 13) zu berechnen wären.

Nachdem die Trägerform festgestellt ist, finden sich die Stabkräfte nach den für beliebige Gurtungsformen gültigen Gleichungen der §§ 32, 33. Für das Parallelträgerstück mit Ausschluss der Grenzverticalen kann man auch die Gleichungen der §§ 35, 36 verwenden. Die Beanspruchungen der Diagonalen in den Feldern mit nicht parallelen Gurtungen aber ergeben sich am bequemsten nach den in den zwei letzten Paragraphen erhaltenen Formeln, die wir deshalb für die aus Fig. 167 hervorgehenden Trägerformen wiederholen wollen. Es sind bei beliebiger Form der einen Gurtung die Eigengewichtsbeanspruchung und Grenzbeanspruchungen auf der ersten Trägerhälfte:

für gleichmässig vertheilte bewegte Last (α, c nach § 43, 4) 7)),

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_m = \frac{g\lambda}{2c}\, d_m,$$

$$(2) \qquad D_m = \frac{g+g_1}{g}\,\mathfrak{D}_m, \qquad D_m = \frac{g-g_1}{g}\,\mathfrak{D}_m,$$

und für bewegte Radlastzüge (α, β nach § 44, 4) 5)),

$$(3) \qquad \mathfrak{D}_m = \frac{n-m+1}{m+1}\,\frac{\alpha d_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2},$$

$$(4) \qquad D_m = \left[1 + \frac{n\alpha + m(m-1)}{(n-m)(n-m+1)}\,\frac{\beta g_1}{\alpha g}\right]\mathfrak{D}_m, \quad D_m = \frac{g-g_1}{g}\,\mathfrak{D}_m.$$

Für $g_1 = g$ sind in beiden Fällen die unteren Grenzbeanspruchungen gleich Null.

Träger nach der Grenzform einfacher Zugdiagonalen bis zur Trägermitte nach Fig. 169 hat *Launhardt* verwenden wollen, um

Gegendiagonalen überall zu vermeiden (Deutsche Bauzeitung 1876). Wenn man jedoch, wie bei Anwendung solcher Träger vorausgesetzt werden muss, ästhetische Rücksichten gar nicht zu nehmen hat, so dürften die dem gleichen Zwecke dienenden Dreieckträger vorzuziehen sein. — (Beispiele 59—61.)

§ 46. Träger einfachen Systems mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen. Formberechnung für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Bei Betrachtung der Parabelträger ergab sich, dass für Segmentträger bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht und ebensolcher Verkehrslast die horizontale Gurtung auf ihrer ganzen Länge gleiche Grenzbeanspruchungen erleidet, wovon die unteren dem Eigengewicht allein entsprechen. Die fragliche Gurtung erhält damit constanten Querschnitt, was im Interesse einfacher Herstellung erwünscht ist. Man kann sich nun allgemein die Aufgabe stellen:

a) bei frei gewählter Form der Z-Gurtung der X-Gurtung gleiche Maximalbeanspruchungen zu geben;

b) bei frei gewählter Form der X-Gurtung der Z-Gurtung gleiche Maximalbeanspruchungen zu geben;

c) jeder der beiden Gurtungen auf ihrer ganzen Länge gleiche Maximalbeanspruchungen zu geben.

Die letzte Bedingung führt bei einfachem Systeme auf unbrauchbare Formen und soll deshalb hier ausser Betracht bleiben (über doppeltes System siehe §§ 98, 99).

Berechnet man mit gleichmässig vertheilter fester und bewegter Last, so werden mit den Maximalbeanspruchungen einer Gurtung auch die der festen Last allein entsprechenden Minimalbeanspruchungen constant. Bei Berechnung mit gleichmässig vertheilter fester Last und bewegten Radlastzügen trifft dies zwar nicht genau zu, aber doch genügend annähernd, um den Gurtungsquerschnitt constant annehmen zu können. Da für die Maximalbeanspruchungen aller Gurtungsstäbe die Totalbelastung des Trägers massgebend ist, so wird es übrigens auch bei Eisenbahnbrücken gewöhnlich genügen, die jetzt in Frage stehende *Formberechnung* auf Grund einer geeigneten, gleichmässig vertheilten Last vorzunehmen, was bei den Trägern der drei letzten Paragraphen, weil deren Form von den Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und damit von einseitigen Belastungen abhängt, nicht gesagt werden kann. Wir zeigen die Formbestimmung

zunächst für gleichmässig vertheilte Lasten und schliessen im folgenden Paragraphen diejenige für bewegte Radlastzüge bei ebenfalls gleichmässig vertheiltem Eigengewichte an. Ist die Trägerform festgestellt, so lassen sich die Stabkräfte für beide Belastungsarten nach den für beliebige Gurtungsformen gültigen Gleichungen der §§ 31 — 33 berechnen. Für die Gurtungen werden wir jedoch auch spezielle Formeln erhalten.

Bezeichnen g das Eigengewicht und p die Verkehrslast per Längeneinheit Träger, so hat man nach § 32, 4) die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

(1) $$X_m = \mp m(n-m)\frac{x_m}{h_m}\frac{q\lambda}{2}, \qquad \mathfrak{X}_m = \frac{g}{q}X_m,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

(2) $$Z_m = \pm(m-1)(n-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{q\lambda}{2}, \quad \mathfrak{Z}_m = \frac{g}{q}Z_m.$$

a) **Die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung sind constant.** Dann muss nach 1) für alle m constannt sein

(3) $$c = m(n-m)\frac{x_m}{h_m}.$$

Diese Gleichung liefert mit $m = 0$ und $m = n$ die Verticalenlängen $h_0 = 0$ und $h_n = 0$, die beiden Gurtungen treffen sich über den Auflagern. Für die Länge ξ_m des Perpendikels vom Knotenpunkte m der Z-Gurtung auf die Richtungslinie des Stabes x_m hat man (Fig. 175)

$$\xi_m : h_m = \lambda : x_m,$$

oder mit Rücksicht auf 3)

(4) $$\xi_m = \lambda\frac{h_m}{x_m} = m(n-m)\frac{\lambda}{c}.$$

Die Ordinate eines Parabelbogens (Fig. 176) von verticaler Axe, welcher bei 0 und l die Abscissenaxe schneidet und bezüglich letzterer den Pfeil f hat, ist nach § 17) 18) bei $x = m\lambda$

$$y_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2}.$$

Es sollen also unsre Perpendikel ξ_m diesen y_m proportional sein und setzen wir einfach

(5) $$\xi_m = y_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2},$$

so folgt mit 4) die Constante c

(6) $$c = \frac{nl}{4f},$$

während nach 1) — 3) die Maximalbeanspruchungen der Gurtungen sich ergeben:

$$(7)\qquad \begin{cases} X_m = \mp \frac{q\lambda}{2} c = \mp \frac{ql^2}{8f}, \\ Z_m = \pm \frac{q\lambda}{2} \frac{cz_m}{x_{m-1}} = \pm \frac{ql^2}{8f} \frac{z_m}{x_{m-1}}. \end{cases}$$

Bei beliebiger Form der Z-Gurtung lässt sich die Trägerform graphisch wie folgt bestimmen (Fig. 177, 178). Nach Annahme der Felderzahl n wähle man f gleich der in der Mitte gewünschten Trägerhöhe h, berechne nach 5) oder entnehme aus der Parabel (Fig. 176) die Längen ξ_m, schlage mit denselben als Radien Kreisbogen aus den Knotenpunkten m der Z-Gurtung und ziehe an dieselben vom Auflager 0 beginnend die Stabmittellinien x_m als Tangenten. Sollen die Gurtungen zu einer Horizontalen symmetrisch liegen, so schlage man die Kreisbogen aus den Feldergrenzen m dieser Horizontalen (Fig. 181, 182) mit den Radien $\frac{\xi_m}{2}$ und ziehe von 0 beginnend die Mittellinien x_m und z_m als Tangenten an dieselben. — Das letzte Verfahren ist deshalb richtig, weil danach das Perpendikel vom Knotenpunkte m der Z-Gurtung auf x_m die Länge $2\frac{\xi_m}{2} = \xi_m$ wie vorgeschrieben hat.

Zur numerischen Berechnung der Verticalenlängen (welche die Trägerform bestimmen) setze man

$$(8)\qquad \alpha = \frac{\lambda}{\xi_m} = \frac{x_m}{h_m} = \frac{c}{m(n-m)}.$$

Es folgt dann für Segmentträger mit horizontaler Z-Gurtung (Fig. 179, 180), aus

$$(9)\qquad x_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2} = \alpha h_m,$$

$$(10)\qquad h_m = \frac{-h_{m-1} + \sqrt{\alpha^2(\lambda^2 + h^2_{m-1}) - \lambda^2}}{\alpha^2 - 1},$$

und für Träger mit zu einer Horizontalen symmetrischen Gurtungen (Fig. 181, 182), aus

$$(11)\qquad z_m = x_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2} = \alpha h_m,$$

$$(12)\qquad h_m = \frac{-h_{m-1} + 2\sqrt{\alpha^2(4\lambda^2 + h^2_{m-1}) - \lambda^2}}{4\alpha^2 - 1}.$$

Nach 10) und 12) lässt sich von $h_0 = 0$ aus nach h_n hin eine Ver-

ticalenlänge aus der andren berechnen. Die Trägerform ist unabhängig von der Grösse der gleichmässig vertheilten Last.

Die bei dem angeführten graphischen und analytischen Verfahren entstehende grösste Verticalenlänge pflegt nur unbedeutend vom gewählten h abzuweichen. Soll jedoch noch genauer gerechnet werden, so entnehme man aus 3) 6) bei gerader Felderzahl $n = 2\sigma$

$$(13) \qquad c = \frac{n^2}{4h} x_\sigma, \qquad f = \frac{\lambda h}{x_\sigma},$$

bei ungerader Felderzahl $n = 2\sigma + 1$

$$(14) \qquad c = \frac{n^2 - 1}{4h} x_\sigma, \qquad f = \frac{n^2}{n^2 - 1} \frac{\lambda h}{x_\sigma},$$

setze hierin für x_σ den aus der ersten Berechnung erhaltenen Werth und wiederhole das Verfahren mit dem neuen f oder c.

b) Die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung sind constant. In diesem Falle muss nach 2) constant sein

$$(15) \qquad c = m(n - m) \frac{z_{m+1}}{h_m}.$$

Es folgen wieder mit $m = 0$ und $m = n$ die Verticalenlängen $h_0 = 0$ und $h_n = 0$, sodass sich die beiden Gurtungen über den Auflagern treffen. Die Länge ζ_{m+1} des Perpendikels vom Knotenpunkte m der X-Gurtung auf die Richtungslinie des Stabes z_{m+1} (Fig. 183) ergibt sich aus

$$\zeta_{m+1} : h_m = \lambda : z_{m+1},$$

$$(16) \qquad \zeta_{m+1} = \lambda \frac{h_m}{z_{m+1}} = m(n - m) \frac{\lambda}{c}.$$

Setzen wir analog dem Vorgehen unter a)

$$(17) \qquad \zeta_{m+1} = y_m = m(n = m) \frac{4f}{n^2},$$

so drückt sich wie dort aus

$$(18) \qquad c = \frac{nl}{4f},$$

und es folgen aus 1) 2) wegen 15) die Maximalbeanspruchungen der Gurtungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} X_m = \mp \dfrac{ql}{2} \dfrac{c x_m}{z_{m+1}} = \mp \dfrac{ql^2}{8f} \dfrac{x_m}{z_{m+1}}, \\ Z_m = \pm \dfrac{ql}{2} c = \pm \dfrac{ql^2}{8f}. \end{cases}$$

Die Trägerform lässt sich bei beliebiger Form der X-Gurtung graphisch wie folgt bestimmen (Fig. 184, 185). Nach Annahme der

Felderzahl n wähle man f gleich der in der Mitte gewünschten Trägerhöhe h, berechne nach 17) oder entnehme aus der Parabel (Fig. 176) die Längen ζ_{m+1}, schlage mit denselben als Radien Kreisbogen aus den Knotenpunkten m der X-Gurtung und ziehe an dieselben vom Auflager l beginnend die Stabmittellinien z_{m+1} als Tangenten. Sollen die Gurtungen zu einer Horizontalen symmetrisch liegen, so schlage man die Kreisbogen aus den Feldergrenzen m dieser Horizontalen (Fig. 188, 189) mit den Radien $\frac{\zeta_{m+1}}{2}$ und ziehe von l nach 0 hin die Stabmittellinien x_{m+1} und z_{m+1} als Tangenten an dieselben. — Durch das letztere Verfahren wird die Länge des Perpendikels vom Knotenpunkte m der X-Gurtung auf z_{m+1} gleich ζ_{m+1}, wie es sein muss.

Zur numerischen Berechnung der Verticalenlängen setzen wir

$$\alpha = \frac{\lambda}{\zeta_{m+1}} = \frac{z_{m+1}}{h_m} = \frac{c}{m(n-m)} \tag{20}$$

und erhalten für Segmentträger mit horizontaler X-Gurtung (Fig. 186, 187), aus

$$z_{m+1} = \sqrt{\lambda^2 + (h^2_{m+1} - h_m)} = \alpha h_m, \tag{21}$$

$$h_m = \frac{-h_{m+1} + \sqrt{\alpha^2(\lambda^2 + h_{m+1})^2 - \lambda^2}}{\alpha^2 - 1}, \tag{22}$$

und für Träger mit zu einer Horizontalen symmetrischen Gurtungen (Fig. 188, 189), aus

$$z_{m+1} = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_{m+1} - h_m}{2}\right)^2} = \alpha h_m, \tag{23}$$

$$h_m = \frac{-h_{m+1} + 2\sqrt{\alpha^2(4\lambda^2 + h^2_{m+1}) - \lambda^2}}{4\alpha^2 - 1}. \tag{24}$$

Nach 22) und 24) lässt sich von $h_n = 0$ nach h_0 hin eine Verticalenlänge aus der andern berechnen.

Auch im vorliegenden Falle wird die sich ergebende grösste Verticalenlänge gewöhnlich kaum von dem gewählten h abweichen. Soll noch genauer gerechnet werden, so entnehme man aus 15) 18) bei gerader Felderzahl $n = 2\sigma$

$$c = \frac{n^2}{4h} z_{\sigma+1}, \qquad f = \frac{\lambda h}{z_{\sigma+1}}, \tag{25}$$

bei ungerader Felderzahl $n = 2\sigma + 1$

$$c = \frac{n^2-1}{4h} z_{\sigma+1}, \qquad f = \frac{n^2}{n^2-1} \frac{\lambda h}{z_{\sigma+1}}, \tag{26}$$

setze hierin für $z_{\sigma+1}$ den durch die erste Berechnung erhaltenen Werth und wiederhole das Verfahren mit dem neuen f oder c.

Nach 17) 18) sollen die Perpendikel ζ_{m+1} vom Knotenpunkte m der X-Gurtung auf Stab z_{m+1} im Falle b) genau so variiren wie die Perpendikel ξ_m vom Knotenpunkte m der Z-Gurtung auf Stab x_m im Falle a). Wir haben also, wie auch von vornherein anzunehmen war und durch die Ausdrücke für h_m und die Maximalbeanspruchungen bestätigt wird, unter b) dieselben Träger wie unter a) erhalten, mit dem Unterschiede jedoch, dass letztere um die Verticallinie durch die Trägermitte gedreht erscheinen, bis beide Enden vertauscht sind. Der Träger Fig. 184 entspricht dem Träger Fig. 177 und der Träger Fig. 185 demjenigen Fig. 178.

Anstatt wie oben die Constante c aus der gewünschten Trägerhöhe h zu berechnen, könnte man deren Werth und damit die Maximalgurtungsbeanspruchungen natürlich auch unmittelbar wählen, womit alle übrigen Grössen, einschliesslich h, sofort bestimmt wären. Indessen wird man in praktischen Fällen eine Wahl der Trägerhöhe vorziehen. Je grösser h umso kleiner die Gurtungskräfte.

§ 47. Träger einfachen Systems mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen. Formberechnung für bewegte Radlastzüge. †

Wir setzen für die ungünstigste Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m

$$(1)\quad R_m = m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a),$$

und haben dann nach § 33, 1) 2) mit § 31, 16) bei beliebigen Gurtungsformen die Maximalbeanspruchung der X-Gurtung:

$$(2)\quad X_m = \mp R_m \frac{x_m}{lh_m},$$

die Maximalbeanspruchung der Z-Gurtung:

$$(3)\quad Z_m = \pm R_{m-1}\frac{z_m}{lh_{m-1}}.$$

Die Beanspruchungen für Eigengewicht allein bleiben durch § 31, 16) bestimmt.

a) **Die Maximalbeanspruchung der X-Gurtung ist constant.** (Fig. 177—182). Dann muss nach 2) für alle m constant sein

$$(4)\quad c = R_m \frac{x_m}{h_m},$$

sodass die Maximalbeanspruchungen der Gurtungen:

$$(5) \qquad X_m = \mp \frac{c}{l}, \qquad Z_m = \pm \frac{c}{l} \frac{z_m}{x_{m-1}}.$$

Gleichung 4) liefert mit Rücksicht auf 1) für $m = 0$ und $m = n$ die Verticalenlängen $h_0 = 0$, $h_n = 0$, die beiden Gurtungen treffen sich über den Auflagern. Aus Fig. 175 folgt die Länge des Perpendikels vom Knotenpunkte m der Z-Gurtung auf die Richtungslinie des Stabes x_m:

$$(6) \qquad \xi_m = \lambda \frac{h_m}{x_m} = \frac{\lambda}{c} R_m,$$

und hat man hiernach die ξ_m berechnet, so lässt sich bei beliebiger Form der Z-Gurtung die weitere Formbestimmung ganz wie unter § 46a angegeben graphisch vornehmen. Numerisch erhält man x_m h_m mit

$$(7) \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\xi_m} = \frac{x_m}{h_m} = \frac{c}{R_m}$$

für horizontale Z-Gurtung (Segmentträger) aus § 46, 9) 10), für zu einer Horizontalen symmetrische Gurtungen (Linsenträger) aus § 46, 11) 12).

Für die Berechnung nach 5) — 7) muss eine Wahl von c getroffen sein. Will man bei der Trägermitte die Höhe h haben, so folgt aus 4) bei gerader Felderzahl mit $n = 2\sigma$, bei ungerader Felderzahl mit $n = 2\sigma + 1$

$$(8) \qquad c = R_\sigma \frac{x_\sigma}{h}, \qquad \text{angenähert } c = R_\sigma \frac{\lambda}{h}.$$

Der zweite Werth ist zuerst zu verwenden und wird gewöhnlich genügen, eventuell hätte man die Rechnung mit dem ersten Ausdrucke zu wiederholen, wozu x_σ aus der ersten Rechnung zu entnehmen wäre.

b) **Die Maximalbeanspruchung der Z-Gurtung ist constant.** (Fig. 184—189). Für diesen Fall muss nach 3) constant sein

$$(9) \qquad c = R_m \frac{z_{m+1}}{h_m},$$

womit die Maximalbeanspruchungen der Gurtungen:

$$(10) \qquad X_m = \mp \frac{c}{l} \frac{x_m}{z_{m+1}}, \qquad Z_m = \pm \frac{c}{l}.$$

Auch Gleichung 9) ergibt für $m = 0$ und $m = n$ mit Rücksicht auf 1) die Verticalenlängen $h_0 = 0$ und $h_n = 0$, sodass sich die Gur-

tungen über den Auflagern treffen. Die Länge des Perpendikels vom Knotenpunkte m der X-Gurtung auf die Richtungslinie des Stabes z_{m+1} folgt aus Fig. 183:

$$\zeta_{m+1} = \lambda \frac{h_m}{z_{m+1}} = \frac{\lambda}{c} R_m. \tag{11}$$

Sind die ζ_{m+1} hiernach festgestellt, so lässt sich bei beliebiger Form der X-Gurtung die weitere Formbestimmung wie unter § 46 b angegeben graphisch vornehmen. Numerisch erhält man z_{m+1}, h_m mit

$$\alpha = \frac{\lambda}{\zeta_{m+1}} = \frac{z_{m+1}}{h_m} = \frac{c}{R_m} \tag{12}$$

für horizontale X-Gurtung (Segmentträger) aus § 46, 21) 22), für zu einer Horizontalen symmetrische Gurtungen (Linsenträger) aus § 46, 23) 24).

Für die Berechnung muss wieder ein geeignetes c gewählt werden. Soll die Trägerhöhe in der Mitte h betragen, so entnimmt man aus 9) bei gerader Felderzahl mit $n = 2\sigma$, bei ungerader Felderzahl mit $n = 2\sigma + 1$

$$c = R_\sigma \frac{z_{\sigma+1}}{h}, \qquad \text{angenähert } c = R_\sigma \frac{\lambda}{h}. \tag{13}$$

Mit diesen Werthen hat man analog wie zu 8) angegeben zu verfahren.

Auch bei der jetzigen Formbestimmung haben wir unter b) dieselben Träger wie unter a) mit vertauschten Enden erhalten. Der Schlusssatz des vorigen Paragraphen bleibt ebenfalls gültig.

§ 48. Paulische Träger einfachen Systems.

Fachwerkträger mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen wurden durch *v. Pauli* eingeführt, der 1856 ein Patent darauf nahm (erste Ausführung 1857, Isarbrücke bei Heselohe, Allg. Bauzeit. 1859; bedeutendstes Bauwerk ältere Mainzer Rheinbrücke, Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing. 1865). Sämmtliche ausgeführte *Paulische Träger* sind von einfachem Systeme mit Verticalen, constant beanspruchtem Obergurte (X-Gurtung der ersten Trägerhälfte) und Gegendiagonalen in allen Feldern. Die meisten haben zu einer Horizontalen symmetrische Gurtungen, sodass die Maximalbeanspruchungen des Untergurts ebenfalls nur wenig veränderlich sind, doch kommen auch Träger mit horizontalem Untergurte vor (Brücken bei Rechtenstein und Zell in Württemberg, Warthebrücke bei Posen).

Die in §§ 46, 47 abgeleiteten Träger sind in Bezug auf die Anordnung der Diagonalen niemals und in Bezug auf die Form der Gurtungen nur ausnahmsweise symmetrisch zur Verticallinie durch die Trägermitte. Die Symmetrie der Gurtungsformen tritt dann ein, wenn die Formberechnung für gleichmässig vertheilte Lasten erfolgt, die eine Gurtung parabolisch gewählt und f gleich dem Pfeile des betreffenden Parabelbogens von verticaler Axe gesetzt wird. Man kommt dann auf parabolische Segmentträger, deren horizontale Gurtung ja nach §§ 41, 42 constante Grenzbeanspruchungen erleiden, wenn die Berechnung auf Grund gleichmässig vertheilter Lasten vorgenommen wird.

Sollen Träger mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen zur Mitte symmetrisch hergestellt werden, so hat man je zwei congruente Hälften der in §§ 46, 47 betrachteten Träger zu verwenden. Es sind bei beliebig gewählter Form einer Gurtung vier Fälle möglich, und zwar:

bei frei gewählter Form des Untergurts und constant beanspruchtem Obergurte

Fig. 190, entstanden aus zwei ersten Hälften der Fig. 177 (oder zwei zweiten Hälften der Fig. 184),

Fig. 191, entstanden aus zwei zweiten Hälften der Fig. 177 (oder zwei ersten Hälften der Fig. 184);

bei frei gewählter Form des Obergurts und constant beanspruchtem Untergurte

Fig. 192, entstanden aus zwei ersten Hälften der Fig. 178 (oder zwei zweiten Hälften der Fig. 185),

Fig. 193, entstanden aus zwei zweiten Hälften der Fig. 178 (oder zwei ersten Hälften der Fig. 185).

Für praktische Zwecke würden wohl nur Segmentträger und Linsenträger, letztere mit zu einer Horizontalen symmetrischen Gurtungen in Betracht kommen, und da die Bedingung eines constant beanspruchten Horizontalgurts genau oder annähernd auf den Parabelträger führt, so kann es sich hier bei Segmentträgern nur um solche mit constant beanspruchter Polygonalgurtung handeln. Es sind nun folgende Fälle möglich:

Segmentträger mit constant beanspruchter Polygonalgurtung.

Horizontalgurt unten:	Fig. 194,	Spezialfall von	Fig. 190;
	Fig. 195,	„ „	Fig. 191.
Horizontalgurt oben:	Fig. 196,	„ „	Fig. 192;
	Fig. 197,	„ „	Fig. 193.

Linsenträger mit einer constant beanspruchten Gurtung.

Obergurt constant beansprucht: Fig. 198, Spezialfall von Fig. 190;
Fig. 199, „ „ Fig. 191.
Untergurt constant beansprucht: Fig. 200, „ „ Fig. 192;
Fig. 201, „ „ Fig. 193.

Der vollständigen Symmetrie wegen hat man immer nur eine Trägerhälfte zu berechnen. Mit Rücksicht auf die Träger der §§ 46, 47, aus welchen die jetzt betrachteten Träger entstanden sind, erhält man

für Fig. 190, 192, 194, 196, 198, 200 die Form der ersten Trägerhälfte aus §§ 46a, 47a (oder die der zweiten nach §§ 46b, 47b),

für Fig. 191, 193, 195, 197, 199, 201 die Form der zweiten Trägerhälfte aus §§ 46a, 47a (oder die der ersten nach §§ 46b, 47b).

§ 46 bezieht sich auf gleichmässig vertheilte Lasten, und § 47 auf bewegte Radlastzüge. Bei Berechnung der Träger Fig. 191, 193, 195, 197, 199, 201 hat man auch die Form der nicht verwendeten Hälfte des unsymmetrischen Trägers festzustellen, da die Berechnung an deren Auflager beginnt.

Bei den in §§ 46, 47 abgeleiteten Trägerformen ist der mittlere Stab der constant beanspruchten Gurtung im Allgemeinen nicht horizontal. Insbesondere ist es nicht der Fall, wenn die variabel beanspruchte Gurtung horizontal ist oder beide Gurtungen zu einer Horizontalen symmetrisch liegen. Man erkennt dies sofort aus den in § 46 angeführten graphischen Formbestimmungen. Wir würden also bei der obigen Herstellung symmetrischer Träger im Falle ungerader Felderzahl für das mittlere Feld zunächst einen gebrochenen Gurtungsstab erhalten, der nicht zulässig ist. Macht man den Stab gerade, so entsteht nur eine geringe Aenderung der Beanspruchung, durch welche die Wahl eines constanten Querschnitts nicht unzulässig wird. Symmetrische Träger mit überall genau gleichen Maximalbeanspruchungen einer polygonalen Gurtung sind nur bei gerader Felderzahl möglich.

Nachdem die Trägerform festgestellt ist, lassen sich die Stabkräfte nach den für beliebige Gurtungsformen gültigen Gleichungen der §§ 32, 33 berechnen. Für die Gurtungskräfte wird man jedoch bequemer die in §§ 46, 47 gefundenen speziellen Formeln verwenden. — (Beispiele 62—67.)

IV. Abschnitt.

Einfluss der Gegendiagonalen.

Wir ziehen zunächst beliebige Fachwerke einfachen Systems mit Verticalen in Betracht und gehen dann zu Balkenfachwerken mit zwei Gelenkauflagern über, wie sie im vorigen Abschnitte betrachtet wurden. Für diese sollen am Schlusse der §§ 50—53 Regeln zur Berücksichtigung des Einflusses der Gegendiagonalen so gegeben werden, dass man Gebrauch davon machen kann, ohne die ganze Entwicklung verfolgen zu müssen. Schliesslich werden noch Angaben über Gegendiagonalen bei beliebigen Balkenfachwerken einfachen Systems folgen. Bis jetzt hat man Gegendiagonalen überhaupt nur bei Balkenfachwerken angewandt. Ob dieselben annähernd so wirken, wie die Theorie annimmt, wird freilich wesentlich von der Ausführung abhängen.

Die Ermittelung des Einflusses der Gegendiagonalen lässt noch Manches zu wünschen übrig; doch gehen wir wesentlich weiter als sonst üblich ist. Verfasser muss ersteren Punkt besonders hervorheben, da ihm auffallende Angriffe gerade dann nicht erspart blieben, wenn er Mängel der Theorie, die sich vorläufig nicht ganz beseitigen liessen, wenigstens soweit als möglich zu heben suchte.

§ 49. Fachwerke beliebiger Art und Form. †

Der Horizontalabstand l zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützen sei durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt. Die Stützpunkte können gleich oder verschieden hoch liegen. Wir behalten die in § 22 verwendeten Bezeichnungen bei, sodass o_m, u_m die Längen des Obergurtstabes und Untergurtstabes im Felde m bedeuten. Für den Fall, dass Feld m nur eine widerstandsfähige Diagonale d_m enthält (X-Gurtung oben), seien deren Grenzbeanspruchungen gleich A_m und $-A'_m$, unter A_m, A'_m Absolutwerthe verstanden. Wenn nun die Diagonalen nur Zug oder nur Druck aufnehmen können, dann müssen im Felde m zwei Diagonalen angeordnet

werden. Diejenigen derselben, welche bei Belastung durch das Eigengewicht allein wirkt, heisst *Hauptdiagonale*, die andere *Gegendiagonale*.

Zugdiagonalen. Für solche wirkt d_m nur solange, als Zug darauf entfällt; daher hat man die Grenzbeanspruchungen von d_m:

$$(1) \qquad D_m = A_m, \qquad D_m = 0.$$

Weil ferner d'_m immer dann wirkt, wenn Druck auf d_m käme, so sind nach § 22, 1) die Grenzbeanspruchungen von d'_m:

$$(2) \qquad D_m = A'_m \frac{d'_m}{d_m}, \qquad D'_m = 0.$$

Wenn bei einfachen Diagonalen X_m, Z_m, D_m dem Falle oben liegender X-Gurtung im Felde m entsprechen, dann hat man bei Anwendung von Gegendiagonalen die Beanspruchungen des Obergurtstabes, Untergurtstabes und der Diagonale m für jede bestimmte Belastung:

bei positivem D_m (Fig. 130) $\qquad X_m$, Z_m, D_m,

und zufolge § 22, 1)—3) bei negativem D_m (Fig. 131)

$$(3) \qquad Z'_m = X_m + \frac{o_m}{d_m} D_m, \quad X'_m = Z_m + \frac{u_m}{d_m} D_m, \quad D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m.$$

Wenn ferner V_m bei einfachen Diagonalen dem Falle oben liegender X-Gurtung in den Feldern m und $m+1$ entspricht, dann hat man zufolge § 22, 5) 6) bei Anwendung von Gegendiagonalen die Beanspruchung der Verticale m für jede bestimmte Belastung:

bei positiven D_m, D_{m+1} (Fig. 132) $\qquad V_m$,

bei positivem D_m und negativem D_{m+1} (Fig. 133)

$$(4) \qquad (V_m) = V_m + \frac{h_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1},$$

bei negativen D_m, D_{m+1} (Fig. 134)

$$(5) \qquad V'_m = V_m + \frac{h_{m-1}}{d_m} D_m + \frac{h_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1},$$

bei negativem D_m und positivem D_{m+1} (Fig. 135)

$$(6) \qquad (V'_m) = V_m + \frac{h_{m-1}}{d_m} D_m.$$

Druckdiagonalen. Da für diese d_m nur so lange wirkt, als Druck darauf kommt, so sind die Grenzbeanspruchungen von d_m:

$$(7) \qquad D_m = -A'_m, \qquad D_m = 0,$$

und da d'_m in Wirksamkeit tritt, wenn d_m Zug erhielte, so sind die Grenzbeanspruchungen von d'_m:

$$(8) \qquad D'_m = -A_m \frac{d'_m}{d_m}, \qquad D'_m = 0.$$

Für jede bestimmte Belastung sind die Beanspruchungen des Obergurts, Untergurts und der Diagonale im Felde m, wenn X_m, Z_m, D_m ohne Gegendiagonalen dem Falle oben liegender X-Gurtung daselbst entsprechen:

bei negativem D_m (Fig. 130) $\qquad X_m,\ Z_m,\ D_m,$

und nach § 22), 1) — 3) bei positivem D_m (Fig. 131)

$$(9) \qquad Z'_m = X_m + \frac{o_m}{d_m} D_m, \quad X'_m = Z_m + \frac{u_m}{d_m} D_m, \quad D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m.$$

Die Beanspruchung der Verticale m ist nach § 22, 5) 6), wenn V_m ohne Gegendiagonalen dem Falle oben liegender X-Gurtung in den Feldern m und $m+1$ entspricht:

bei negativen D_m, D_{m+1} (Fig. 132) $\qquad V_m,$

bei negativem D_m und positivem D_{m+1} (Fig. 133)

$$(10) \qquad (V_m) = V_m + \frac{h_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1},$$

bei positiven D_m, D_{m+1} (Fig. 134)

$$(11) \qquad V'_m = V_m + \frac{h_{m-1}}{d_m} D_m + \frac{h_{m+1}}{d_{m+1}} D_{m+1},$$

bei positivem D_m und negativem D_{m+1} (Fig. 135)

$$(12) \qquad (V'_m) = V_m + \frac{h_{m-1}}{d_m} D_m.$$

Nach 1) 2) 7) 8) sind die Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen in Feldern mit Gegendiagonalen sofort aus denjenigen einer widerstandsfähigen Diagonale d_m bestimmt. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Verticalen können nicht so allgemein ausgedrückt werden, sie hängen von der Art und Form des Trägers ab. Angenommen, man habe die Stabkräfte für eine bestimmte Belastung unter Voraussetzung widerstandsfähiger Diagonalen d_m berechnet, dann gestatten die Formeln 3) — 6) bezw. 9) — 12) die bei Mitwirkung von Gegendiagonalen entstehenden Beanspruchungen aller Stäbe anzugeben, und zieht man eine genügende Anzahl Belastungsfälle in Betracht, so lassen sich auch die Grenzbeanspruchungen ermitteln (§ 12 f). Aus den Formeln des § 22 kann man ganz wie

oben auch den Einfluss der Gegendiagonalen gegenüber dem Träger mit widerstandsfähigen Diagonalen d'_m entnehmen. Im Weitern behandeln wir nur Zugdiagonalen bei Balkenträgern mit zwei Gelenkauflagern.

§ 50. Zugdiagonalen beim Parallelträger.

Für ein einfaches Balkenfachwerk mit Verticalen und horizontalen Gurtungen, dessen Felder jedoch nicht gleichlang zu sein brauchen, sei die erste Trägerhälfte einschliesslich der mittleren Verticale (bei gerader Felderzahl) oder des mittleren Feldes (bei ungerader Felderzahl) nach den Formeln für oben liegende X-Gurtung berechnet und habe sich ergeben, dass die Diagonalen in einer Anzahl Felder um die Trägermitte sowohl Zug als Druck empfangen können. Man beabsichtigt, sämmtliche Diagonalen nur auf Zug widerstandsfähig zu machen und also in den erwähnten Feldern Gegendiagonalen anzuordnen. Es handelt sich darum, die Grenzbeanspruchungen der Stäbe anzugeben.

Die Beanspruchung der Diagonale m ist nach § 37 bei beliebiger Belastung:

im Falle von Fig. 202 (X-Gurtung oben)

$$(1) \qquad D_m = (S' - S)\frac{d_m}{lh},$$

im Falle von Fig. 203 (X-Gurtung unten)

$$(2) \qquad D'_m = -(S' - S)\frac{d_m}{lh},$$

worin S das Moment der Knotenpunktslasten vor Schnitt s in Hinsicht des Auflagers 0, S' das Moment der Knotenpunktslasten nach Schnitt s in Hinsicht des Auflagers l. Sind beide Diagonalen vorhanden, aber nur auf Zug widerstandsfähig, so wirkt in jedem gegebenen Belastungsfalle diejenige Diagonale, für welche der vorstehende Ausdruck positiv ist.

Die bei Belastung durch das Eigengewicht allein wirkende Diagonale eines Feldes wurde Hauptdiagonale genannt, die andere Gegendiagonale. Setzen wir das Eigengewicht auf die ganze Trägerlänge gleichmässig vertheilt voraus, so hat man nach § 37, 3) die Eigengewichtsbeanspruchung der Diagonale m im Falle von Fig. 202:

$$(3) \qquad \mathfrak{D}_m = (l - e_m - e_{m-1})\frac{g d_m}{2h}.$$

Dieser Werth ist auf der ersten Trägerhälfte positiv, auf der zweiten

negativ, wonach auf der ersten Trägerhälfte die Diagonalen Fig. 202, auf der zweiten Trägerhälfte die Diagonalen Fig. 203 Hauptdiagonalen sind und der Träger symmetrisch zur Trägermitte wird.

Da die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen eines Feldes durch die in andern Feldern wirkenden Diagonalen nicht beeinflusst werden und die Beanspruchung einer Verticale nur von der Anordnung der Diagonalen in den beiden anliegenden Feldern abhängt, so können durch Einfügen der Gegendiagonalen Aenderungen der Grenzbeanspruchungen nur in solchen Gurtungsstäben und Diagonalen eintreten, in deren Feldern Gegendiagonalen Verwendung finden und nnr in solchen Verticalen, welchen Felder mit Gegendiagonalen anliegen. Bei Belastung durch das Eigengewicht allein wirkt nach dem oben Gesagten immer das *Hauptsystem*, sodass im Falle gerader Felderzahl die entsprechende Beanspruchung der mittleren Verticale ist

(4) $$\mathfrak{V}_\sigma = -\mathfrak{K}_0,$$

unter $\mathfrak{K}_0$ die Eigengewichtsbelastung des Knotenpunkts σ im Obergurt verstanden. Fassen wir nun die einzelnen Stabkategorien ins Auge.

Diagonalen. Unter Voraussetzung der Hauptdiagonale m allein seien die Grenzbeanspruchungen derselben gleich A_m und $-A_m'$ ermittelt worden. Da die Hauptdiagonale nur wirksam bleibt, so lange sie Zug erhält, so sind deren Grenzbeanspruchungen:

(5) $$D_m = A_m, \qquad D_m = 0,$$

und da die Gegendiagonale stets in Wirkung tritt, wenn die Hauptdiagonale Druck bekäme, so folgen ihre Grenzbeanspruchungen nach 1) 2):

(6) $$D_m' = A_m', \qquad D_m' = 0.$$

Verticalen. Für die Beanspruchung der Verticale m haben wir im Falle von Fig. 204

(7) $$V_m = -(S' - S)\frac{1}{l},$$

und im Falle von Fig. 205

(8) $$V_m' = (S' - S)\frac{1}{l}.$$

Dabei haben S, S' dieselbe Bedeutung wie in 1) 2), jedoch bezüglich der Schnitte s in Fig 204 und Fig. 205. Für die Verticalen der ersten Trägerhälfte kann V_m nach 7) einen grösseren negativen Werth annehmen als V_m nach 8); denn jede Belastung der Knotenpunkte vor s, durch welche man $S' - S$ in 8) möglichst weit ins

Negative treiben will, kann symmetrisch zur Trägermitte übertragen werden, womit $S' - S$ in 7) ebenso gross wird, während zur Vergrösserung dieses negativen Werthes für die Verticalen der ersten Trägerhälfte noch Knotenpunkte übrig bleiben. Für die mittlere Verticale bei gerader Felderzahl müssen sich natürlich der Symmetrie wegen die Grenzwerthe aus 5) und 6) gleich gross ergeben. Es folgt daraus, dass für alle Verticalen der ersten Trägerhälfte, einschliesslich eventuell der mittleren, die grössten negativen V_m in Fällen gleicher Anordnung der anstossenden Diagonalen für Fig. 204 eintreten und sich also bei der angenommenen Berechnung schon ergeben haben.

Es ist nun noch zu entscheiden, welche Minimaldruckbeanspruchungen (oder Maximalzugbeanspruchungen) die durch Gegendiagonalen beeinflussten Verticalen erleiden, und ob nicht noch grössere Druckbeanspruchungen als für Fig. 204 und 205 dann entstehen, wenn in den anliegenden Feldern Diagonalen verschiedener Anordnung wirken. Für die Diagonalen der ersten Trägerhälfte hat man im Falle von Fig. 204

$$V_m + \frac{h}{d_{m+1}} D_{m+1} + K_0 = 0, \qquad \text{min druck } V_m = -\text{min } K_0,$$

im Falle von Fig. 205

$$V'_m + \frac{h}{d_m} D'_m + K_0 = 0, \qquad \text{min druck } V_0' = -\text{min } K_0,$$

im Falle von Fig. 206, welcher z. B. für V_4 in Fig. 208 eintritt,

$$(V_m) + K_0 = 0, \qquad \text{max druck } V_m = -\text{max } K_0,$$
$$\text{min druck } (V_m) = -\text{min } K_0.$$

Der Fall Fig. 207 kommt nicht vor, für die Verticale, bei welcher die Gegendiagonalen beginnen, schon deshalb nicht, weil eine der angedeuteten Diagonalen nicht vorhanden ist, für die übrigen Verticalen nicht, weil sonst, wenn r_m die Summe der in Verticale m angreifenden Lasten bezeichnet, sein müsste:

$$r_m + \frac{h}{d_m} D'_m + \frac{h}{d_{m+1}} D_{m+1} = 0, \quad D_{m+1} = -\left(r_m + \frac{h}{d_m} D'_m\right) \frac{d_{m+1}}{h},$$

was bei positivem D'_m ein negatives D_{m+1} ergibt, während alle Diagonalen nur Zug aushalten können.

Hat sich also bei der angenommenen Berechnung der ersten Trägerhälfte die grösste Druckbeanspruchung einer Verticale mit anliegender Gegendiagonale gleich $-B_m$ ergeben, so sind die wirklichen Grenzbeanspruchungen dieser Verticale:

(9) $V_m = - B_m$ oder $- \max K_0$, $V_m = - \mathfrak{K}_0$,

unter $\mathfrak{K}_0$ die vom Eigengewichte allein herrührende Belastung K_0 des Knotenpunkts m im Obergurt verstanden.

Gurtungen. Im Felde m der ersten Trägerhälfte wirkt das Hauptsystem, wenn D_m positiv, d. h. $S' > S$ ist. Für die Belastungen, welchen die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen entsprechen, pflegt dies der Fall zu sein: bei gleichmässig vertheilter bewegter Last, weil dann alle erwähnten Grenzbeanspruchungen für Totalbelastung des ganzen Trägers eintreten und hierfür

$$D_m = (l - e_m - e_{m-1}) \cdot \frac{q d_m}{2h}$$

positiv ist; bei bewegten Radlastzügen, weil diese in den für jene Grenzbeanspruchungen massgebenden Zusammensetzungen und Stellungen einer auf die ganze Trägerlänge gleichmässig vertheilten Last annähernd äquivalent sind. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen treten für Eigengewicht allein ein und entsprechen demgemäss ebenfalls dem Hauptsystem.

Zusammenfassung. *Hat man für den Parallelträger der vorläufigen Anordnung Fig. 209 oder 210 die Beanspruchungen der ersten Trägerhälfte einschliesslich der mittleren Verticale oder des mittleren Feldes berechnet* (nach den Formeln für oben liegende X-Gurtung) *und dabei für eine Anzahl Diagonalen positive und negative Grenzbeanspruchungen* A_m *und* $- A_m'$ *erhalten, so sind bei Anordnung von Gegendiagonalen deren Grenzbeanspruchungen durch 6), die der Hauptdiagonalen durch 5) bestimmt. Die Verticalen, welche Feldern mit Gegendiagonalen anliegen, erhalten die Grenzbeanspruchnngen 9), wobei die der vorläufigen Berechnung entsprechende Maximaldruckbeanspruchung* B_m *dann massgebend ist, wenn nicht ausnahmsweise* $\max K_0$ *grösser sein sollte. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen bleiben ungeändert und ebenso alle Beanspruchungen für Eigengewicht allein, mit Ausnahme derjenigen der mittleren Verticale bei gerader Felderzahl, welche durch 4) bestimmt ist.*

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so bedeuten K_0, $\mathfrak{K}_0$ für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Belastung des oberen Knotenpunkts m, für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Summe jener Knotenpunktslast und der in Verticale m zwischen den Gurten angreifenden Fahrbahnlast. — (Beispiele 41—48, 101, 102.)

§ 51. **Zugdiagonalen beim Schwedlerträger.**

Für einen Schwedlerträger mit auf die Knotenpunkte des Untergurts wirkender Fahrbahnlast sei die erste Trägerhälfte einschliesslich der mittleren Verticale oder des mittleren Feldes (bei gerader bezw. ungerader Felderzahl) nach den Formeln für oben liegende X-Gurtung berechnet. Es sollen die Aenderungen der Grenzbeanspruchungen festgestellt werden, welche durch die Anordnung von Gegendiagonalen in den Feldern mit parallelen Gurtungen bedingt sind.

Die im vorigen § für den Parallelträger gefundenen Regeln gelten auch für das Parallelträgerstück des Schwedlerträgers. Nur für die Verticalen, welche den Trägertheil mit parallelen Gurtungen begrenzen, ist eine besondere Untersuchung nöthig und es genügt dabei, die auf der ersten Trägerhälfte liegende Grenzverticale ins Auge zu fassen.

Es seien V_m, D_{m+1} die Beanspruchungen dieser Grenzverticale m und anstossenden Diagonale $m+1$, wenn im Felde $m+1$ die Hauptdiagonale widerstehend gedacht wird (Fig. 211), dann haben wir nach § 22, 5) in dem Falle, dass daselbst die Gegendiagonale wirkt (also D_{m+1} negativ ist, Fig. 212), die Beanspruchung der Verticale m

$$(1)\qquad (V_m) = V_m + \frac{h}{d} D_{m+1}.$$

Da für Eigengewicht allein nach § 34, 6) oder nach § 31, 16) mit $\varepsilon = \infty$

$$(2)\qquad \mathfrak{D}_{m+1} = (n - 2m - 1)\frac{g\lambda d}{2h}$$

positiv ist, so wirkt in diesem Belastungsfalle die Hauptdiagonale $m+1$ und bleibt auch die Eigengewichtsbeanspruchung der Grenzverticale m wie für oben liegende X-Gurtung bestimmt.

Bezeichnen S, S' die statischen Momente der Knotenpunktslasten von 0 bis m in Hinsicht des Auflagers 0 und von $m+1$ bis n in Hinsicht des Auflagers l, abzüglich der Beiträge des Eigengewichts, so folgen aus § 31, 10):

$$(3)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + [(n - m + \nu) S + (m - \nu) S'] \frac{1}{\nu l},$$

$$(4)\qquad D_{m+1} = \mathfrak{D}_{m+1} + (S' - S)\frac{d}{lh},$$

und damit aus 1):

$$(5)\qquad (V_m) = \mathfrak{V}_m + \frac{h}{d}\mathfrak{D}_{m+1} + [(n - m) S + m S'] \frac{1}{\nu l}.$$

Nach § 16 drückt $u = (m - \nu)\lambda$ die Abscisse des Durchschnitts der Richtungslinien von x_m und z_{m+1} aus, und da dieser bei jeder Form des Schwedlerträgers vor Verticale m liegt, so ist ν positiv und tragen nach 5) alle Verkehrslasten in positivem Sinne zu (V_m) bei. Damit kann aber des positiven $\mathfrak{D}_{m+1}$ wegen (V_m) in negativem Sinne schon den Werth $\mathfrak{B}_m$ nicht erreichen, während V_m denselben für Eigengewicht allein annimmt und in den gewöhnlichen Fällen $\nu > m$ (horizontaler Untergurt, Linsenform u. s. w.) zufolge 3) durch Belastung der Knotenpunkte $m + 1$ bis n noch weiter in negativem Sinne wachsen kann. Es behält also die negative Maximalbeanspruchung der Grenzverticale m den für oben liegende X-Gurtung bereits festgestellten Werth.

Wir haben nun noch die negative Minimalbeanspruchung oder positive Maximalbeanspruchung der Grenzverticale festzustellen. Dieselbe kann bei wirkender Hauptdiagonale oder Gegendiagonale $m + 1$ eintreten. Berücksichtigt man jedoch, dass die negativen D_{m+1} im ersten Felde mit Gegendiagonalen stets klein sind, so liesse sich bei ihrem Eintreten nach 1) etwas zu ungünstig $(V_m) = V_m$ setzen und demgemäss auch die zweite Grenzbeanspruchung wie für oben liegende X-Gurtung berechnet beibehalten.

Im Folgenden soll jedoch die zweite Grenzbeanspruchung der Verticale m für alle Fälle genau festgestellt werden, in welchen sich die Richtungslinien des Obergurts im Felde m und des Untergurts im Felde $m + 1$ ausserhalb der Spannweite schneiden und demgemäss $\nu > m$ ist. Der positive Werth von V_m wird alsdann nach 3) um so grösser, je grösser S und je kleiner S' ist. Da indess die Beanspruchung unserer Grenzverticale nur solange durch 3) ausgedrückt bleibt, als im Felde $m + 1$ die Hauptdiagonale wirkt und dies nach 4) beim Anwachsen der Differenz $S - S'$ nur zutrifft, bis der Werth

$$S - S' = \frac{lh}{d}\,\mathfrak{D}_{m+1} = n\,(n - 2m - 1)\,\frac{g\lambda^2}{2}$$

erreicht ist, so folgt durch Substitution in 3) als Ausdruck der positiven Maximalbeanspruchung V_m:

$$(6) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m + \left[S + (\nu - m)\,(n - 2m - 1)\,\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\nu\lambda}\,.$$

Um den Grenzwerth zu erhalten, hat man hierin S möglichst gross zu machen, womit nach der vorletzten Gleichung auch S' gross wird. Es befindet sich im Allgemeinen Verkehrslast auf den Knotenpunkten von 0 bis m und auf solchen von $m + 1$ bis n, jedoch ist

dem Einflusse der letzteren Last in 6) zugleich mit dem der ersteren Rechnung getragen.

Das grösste positive (V_m) entsteht nach 5), wenn gleichzeitig S und S' möglichst gross sind, vorausgesetzt, dass dann die Gegendiagonale im Felde $m+1$ wirkt, also D_{m+1} negativ ist. Bei möglichst grossen S, S' ist stets $S' > S$; denn jede Knotenpunktslast von 0 bis m, durch welche man S vergrössern will, lässt sich symmetrisch zur Trägermitte von n bis $n-m$ ebenfalls anbringen, womit S' um gleich viel wächst, während dann noch die Knotenpunktslasten von $m+1$ bis $n-m$ zur Vergrösserung von S' übrig bleiben. Da nun für $S' > S$ nach 4) D_{m+1} positiv ist, so wirkt bei möglichst grossen S, S' im Felde $m+1$ die Hauptdiagonale und wir müssen, um das grösste positive (V_m) zu erhalten, die Belastung soweit modificiren, dass kein positives D_{m+1} mehr entsteht. Die geringste Modification, welche dies herbeiführen kann, ist nach 4) 2) bestimmt durch

$$S - S' = \frac{lh}{d}\mathfrak{D}_{m+1} = n(n-2m-1)\frac{g\lambda^2}{2},$$

es folgt damit nach 5) als Ausdruck der positiven Maximalbeanspruchung (V_m):

$$(V_m) = \mathfrak{V}_m + \frac{h}{d}\mathfrak{D}_{m+1} + \left[S - m(n-2m-1)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\nu\lambda},$$

und durch Einsetzen von 2):

$$(7) \qquad (V_m) = \mathfrak{V}_m + \left[S + (\nu - m)(n-2m-1)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\nu\lambda}.$$

Auch hier haben wir die Belastung so zu wählen, dass S möglichst gross wird, und es stimmen dann die grössten positiven oder kleinsten negativen V_m, (V_m) überein, wie es nach 1) sein muss, da beide für $D_{m+1} = 0$ eintreten.

Für gleichmässig vertheilte bewegte Last von p per Längeneinheit, also Verkehrslasten $p\lambda$ der Knotenpunkte erhält man das grösste erreichbare S:

$$S = p\lambda[\lambda + 2\lambda + \cdots + m\lambda] = m(m+1)\frac{p\lambda^2}{2},$$

und damit aus 6) die positive Maximalbeanspruchung der Grenzverticale m:

$$(8) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[m(m+1) + (\nu - m)(n-2m-1)\frac{g}{p}\right]\frac{p\lambda}{2\nu}.$$

Für bewegte Radlastzüge ergibt sich diese Grenzbeanspruchung bei Belastung durch Zug II von 0 bis m, Vorderrad O bei Verticale m:

$$(9) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\sum_0^m Pa + (\nu - m)(n-2m-1)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\nu\lambda},$$

oder mit Zug I von 0 bis $m+1$, Rad O bei Verticale m:

$$(10)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\sum_0^m Pa + m\sum_m^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\right.$$
$$\left. + (v - m)(n - 2m - 1)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{v\lambda}.$$

Diese letzte Formel führt, wie es sein muss, mit. $P = p\,d\,a$ wieder auf 8). Wenn jedoch V_m ohne Gegendiagonalen für Zug II berechnet wurde, kann man consequenter Weise ohne Weiteres nach 9) rechnen.

Zusammenfassung: *Hat man die erste Hälfte eines Schwedlerträgers einfachen Systems nach den Formeln für oben liegende X-Gurtung berechnet, so besteht bezüglich des Einflusses der Gegendiagonalen auf das Parallelträgerstück die am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgesprochene Regel. Eine Ausnahme macht nur die Grenzverticale desselben, für welche bei unten liegender Fahrbahn die negative Grenzbeanspruchung ungeändert bleibt, während die positive Grenzbeanspruchung im Falle* $v > m$ (gewöhnliche Schwedlerträger, Linsenträger u. s. w.) *für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge durch 8) bezw. 9) oder 10) bestimmt ist, aber bei etwas zu ungünstiger Auffassung für alle Formen Schwedlerträger auch wie für oben liegende X-Gurtung beibehalten werden kann.* (Die positive Grenzbeanspruchung bei *oben* liegender Fahrbahn wäre aus § 54 zu entnehmen.) *Sonstige Aenderungen von Beanspruchungen kommen nicht in Betracht.*

Die vorstehende Regel gilt auch für andere Träger mit oben liegender X-Gurtung (auf der ersten Trägerhälfte) und einem eingeschalteten Parallelträgerstück, innerhalb dessen allein Gegendiagonalen nöthig sind. Fig. 213 zeigt ein Beispiel derselben. — (Beispiele 59—61.)

§ 52. Zugdiagonalen bei beliebigen Gurtungsformen.

Wir setzen voraus, dass die Stäbe zur Trägermitte symmetrisch angeordnet sind, auf der ersten Trägerhälfte

$$(1)\qquad \varepsilon \geqq \frac{m(n-m)}{n-2m+1}$$

ist (ε nicht kleiner als beim Parabelträger mit gleicher Felderzahl n) und das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die ganze Trägerlänge gilt. Nach § 31, 16) hat man dann die Beanspruchung der Diagonale m durch das Eigengewicht allein:

$$\mathfrak{D}_m = \pm\left(n - 2m + 1 - m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2},$$

worin das obere und untere Vorzeichen bezw. oben liegender und unten liegender Gurtung entsprechen. Da nun unter Voraussetzung 1)

$$(2)\qquad \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}$$

auf der ersten Trägerhälfte positv ist, so wirkt für Eigengewicht allein das System mit oben liegender X-Gurtung auf der ersten und unten liegender X-Gurtung auf der zweiten Trägerhälfte. Es bleiben also nur noch die Grenzbeanspruchungen festzustellen, wobei wir uns auf die erste Trägerhälfte beschränken können.

Diagonalen. Für diese wurde das Nöthige bereits in § 49 allgemein abgeleitet. Haben sich unter der Voraussetzung, dass im Felde m die Hauptdiagonale wirksam ist, deren Grenzbeanspruchungen gleich A_m und $-A_m'$ ergeben, unter A_m, A_m' Absolutwerthe verstanden, dann sind die Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonale m:

$$(3)\qquad D_m = A_m, \qquad\qquad D_m = 0,$$

und diejenigen der Gegendiagonale m:

$$(4)\qquad D_m' = A_m'\,\frac{d_m'}{d_m}, \qquad\qquad D_m' = 0.$$

Sind beide Grenzbeanspruchungen der allein vorhanden gedachten Hauptdiagonale m positiv, dann ist im Felde m keine Gegendiagonale nöthig.

Gurtungen. Die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen treten bei Belastung durch das Eigengewicht allein ein, entsprechen also dem Hauptsystem. Die oberen Grenzbeanspruchungen im Falle gleichmässig vertheilter bewegter Last entstehen für Totalbelastung des ganzen Trägers und weil dann

$$D_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{D}_m$$

mit 2) positiv ist, so sind bei gleichmässig vertheilter bewegter Last auch die oberen Grenzbeanspruchungen für das Hauptsystem zu berechnen. Da schliesslich im Falle bewegter Radlastzüge die für die oberen Grenzbeanspruchungen massgebenden Belastungen einer auf die ganze Trägerlänge gleichmässig vertheilten Last annähernd äquivalent sind, so kann hier wieder die Berechnung der oberen Grenzbeanspruchungen für das Hauptsystem vorgenommen werden.

Verticalen. Eine vollständig scharfe Ableitung der Grenzbeanspruchungen für alle Fälle würde hier sehr umständlich sein und

existirt nicht. In § 49 wurde angegeben, wie die Stabkräfte und ihre Grenzwerthe bei beliebigen Trägern einfachen Systems mit Gegendiagonalen bestimmt werden können. Danach lässt sich das Zutreffen etwaiger Annahmen controliren.

Die Grenzbeanspruchungen einer Verticale m, wenn in beiden anliegenden Feldern die Hauptdiagonalen wirken (X-Gurtung oben), oder die Gegendiagonalen wirken (X-Gurtung unten), sind im III. Abschnitte ausgedrückt. Die ungünstigste der so bestimmten zwei negativen Grenzbeanspruchungen ist in allen praktischen Fällen die wirkliche negative Grenzbeanspruchung der Verticale m mit anliegenden Gegendiagonalen. Für $v > m$ entsteht die erste derselben, wenn die Verkehrslast von l nach 0 hin vorrückend die Knotenpunkte nach Schnitt s in Fig. 214, 215 belastet, womit in den Feldern m und $m + 1$ die Hauptdiagonalen wirken, die zweite, wenn die Verkehrslast von 0 nach l hin vorrückend die Knotenpunkte vor Schnitt s in Fig. 214, 215 belastet, womit in den Feldern m und $m + 1$ etwa vorhandene Gegendiagonalen wirken. Da übrigens hiernach mit Rücksicht auf die zur Trägermitte symmetrische Anordnung der Stäbe die negative Grenzbeanspruchung einer Verticale $n - m$ der zweiten Trägerhälfte bei oben liegender X-Gurtung gleich der negativen Grenzbeanspruchung der Verticale m auf der ersten Trägerhälfte bei oben liegender Z-Gurtung ist, so können wir für $v > m$ die wirklichen negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen auch aus den für oben liegende X-Gurtung allein berechneten entnehmen.

Neben den vorstehend allein in Betracht gezogenen Fällen Fig. 214, 215 sind noch die Fälle Fig. 216 und 217 denkbar, für welche die Beanspruchung der Verticale m ist:

$$(5) \qquad (V_m) = -g_0\lambda - K_0 - (2\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{o}_{m+1})\frac{X_m}{o_m},$$

$$(6) \qquad (V_m') = g_u\lambda + K_u + (2\mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m-1} - \mathfrak{u}_{m+1})\frac{X_m'}{u_m}.$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{u}_m$ die Ordinaten des Knotenpunkts m im Obergurt und Untergurt (Ursprung der Coordinaten beliebig, positive Richtung senkrecht nach oben), K_0, K_u die Verkehrsbelastungen dieser Knotenpunkte, $g_0\lambda$, $g_u\lambda$ ihre Eigengewichtsbelastungen und o_m, u_m die Längen des oberen und unteren Gurtungsstabes im Felde m. Man kann sich in vielen Fällen schon aus vorstehenden Gleichungen überzeugen, dass für Fig. 216 und 217 keine grösseren negativen Beanspruchungen der Verticale m als für Fig. 214 und 215

entstehen, wobei zu beachten, dass X_m, Z_m bezw. negativ und positiv sind, dass der Klammerausdruck in 5) bei geradem Obergurt gleich Null, bei nach Aussen gebogenem positiv, der in 6) aber bei geradem Untergurt gleich Null, und bei nach aussen gebogenem negativ ist. Aber selbst wenn eine der beiden Gleichungen eine grössere negative Beanspruchung liefern könnte, als gleichen Diagonalenstellungen in den Feldern m und $m+1$ entsprechen, so würde dieselbe nur dann gelten, wenn bei der betreffenden Belastung die Diagonalen Fig. 216 bezw. 217 auch wirksam wären, was nach § 49 controlirt werden kann, aber für die üblichen Träger und Belastungen nicht vorkommt.

Es bleibt jetzt noch die positive Grenzbeanspruchung (positive Maximalbeanspruchung oder negative Minimalbeanspruchung) der Verticalen mit anliegenden Gegendiagonalen festzustellen. Wir werden die betreffenden Formeln in §§ 53, 54 geben und fassen zur Erleichterung des Ueberblicks das Verfahren bei Berechnung symmetrischer Träger mit Gegendiagonalen, bei welchen die Bedingung 1) erfüllt, das Eigengewicht gleichmässig vertheilt und $v > m$ ist, in Folgendem zusammen.

Man berechne die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein und die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen so, als wenn das Hauptsystem (mit oben liegender X-Gurtung auf der ersten Trägerhälfte, unten liegender auf der zweiten) *allein vorhanden wäre. Diejenigen Felder, für welche sich Diagonalenbeanspruchungen verschiedenen Vorzeichens ergeben, erhalten Gegendiagonalen. Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen in denselben sind durch 3) 4) bestimmt. Sodann berechne man unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung die negativen Grenzbeanspruchungen der Verticalen vom Auflager 0 an bis zu der nach der Seite von 0 hin gelegenen Verticale des letzten Feldes mit Gegendiagonale. Für die Verticalen ohne anschliessende Gegendiagonalen sind diese Grenzwerthe endgültig beizubehalten, für je zwei symmetrisch zur Trägermitte gelegene Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen der ungünstigste der beiden berechneten Grenzwerthe* (welcher fast immer der ersten Trägerhälfte entspricht). *Die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen ergeben sich, wenn keine Gegendiagonalen anschliessen, aus den Gleichungen für das Hauptsystem und im Falle anschliessender Gegendiagonalen aus den in §§ 53, 54 abgeleiteten Formeln* (welche übrigens günstigere Werthe liefern, als bei einfachen Diagonalen und oben liegender X-Gurtung entstehen, sodass mit Rücksicht auf alle die rechnungsmässige Wirkung der

Gegendiagonalen beeinflussenden Fehlerquellen auch die Verwendung der letzterwähnten Werthe zulässig wäre).

Anstatt bei Berechnung der Diagonalen wie oben angegeben zu verfahren, kann man auch die positiven Grenzbeanspruchungen unter Voraussetzung oben liegender X-Gurtung von 0 aus nach l hin soweit berechnen, als sich positive Werthe dafür ergeben. Mit Rücksicht auf die symmetrische Anordnung der Stäbe sind damit die oberen Grenzbeanspruchungen der Hauptdiagonalen und Gegendiagonalen bestimmt, da der für ein Feld $n - m$ der zweiten Trägerhälfte erhaltene Werth für die Gegendiagonale im Felde m der ersten Trägerhälfte gilt. Die unteren Grenzbeanspruchungen aller Diagonalen in Feldern mit Gegendiagonalen sind gleich Null. — (Beispiele 68—74.)

§ 53. Positive Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen. Fahrbahn unten.

Die im vorigen Paragraphen erwähnten Voraussetzungen werden beibehalten. Wir bestimmen zunächst die positive Grenzbeanspruchung einer Verticale m der ersten Trägerhälfte, wenn in beiden anliegenden Feldern die X-Gurtung oben liegt. Nach § 31 ist in letzterem Falle die Beanspruchung der Verticale bei jeder Belastung:

$$V_m = \mathfrak{V}_m + [(n + \nu - m)\, S - (\nu - m)\, S']\, \frac{1}{\nu l}, \tag{1}$$

worin S, S' die statischen Momente der von der Verkehrslast allein herrührenden Knotenpunktslasten von 0 bis Schnitt s in Hinsicht des Auflagers 0 und von Schnitt s bis l in Hinsicht des Auflagers l bedeuten. Da $\nu > m$ vorausgesetzt ist (der Fall $\nu > m$ kommt höchstens bei Dachbindern vor, bei welchen aber keine Gegendiagonalen üblich sind), so wird V_m um so grösser, je grösser S und je kleiner S'. Gehen wir nun von einer Belastung aus, für welche bei möglichst grossem S das System Fig. 214 wirkt, dann kann ein Wachsen von V_m in positivem Sinne nur durch Verminderung von S' eintreten. Da indessen das System Fig. 214 nur so lange wirksam bleibt, als D_m, D_{m+1} positiv sind und diese Grössen durch die Knotenpunktslasten von Feld $m - 1$ bis l bezw. von Feld m bis l positive Beiträge erhalten, so dürfen wir zur Bestimmung des grössten positiven V_m das Moment S' der Knotenpunktslasten von s bis l nur solange abnehmen lassen, bis eine der Grössen D_m, D_{m+1} beim Werthe Null anlangt. Derjenigen der beiden Beanspruchungen,

welche zuerst beim Werthe Null anlangt, muss S' entsprechen. Nur wenn auch für dies S' ein negativer Beitrag der Verkehrslast zu V_m entstünde, würde $\mathfrak{V}_m$ der grösste positive Werth von V_m sein.

Wir fassen hier den Fall ins Auge, dass die Fahrbahnlast auf Knotenpunkt m des Untergurts wirkt. Dann pflegt mit abnehmendem S' zuerst D_{m+1} gleich Null zu werden (§ 55). Bezeichnen wir also den Werth von ε für das Feld $m+1$ zur Unterscheidung von dem des Feldes m durch δ und berücksichtigen, dass die von der Verkehrslast herrührenden Knotenpunktslasten vor und nach Schnitt s auch vor und nach Feld $m+1$ liegen, so hat man nach § 31 aus

$$D_{m+1} = \left[n - 2m - 1 - (m+1)\frac{n-m-1}{\delta}\right]\frac{d_{m+1}}{h_m}\frac{g\lambda}{2}$$
$$- \left[(n + \delta - m - 1)\, S - (\delta - m - 1)\, S'\right]\frac{d_{m+1}}{\delta l h_m} = 0,$$

für den positiven Grenzwerth von V_m:

$$S' = \frac{n+\delta-m-1}{\delta-m-1}\, S - \frac{1}{\delta-m-1}\left[(n-2m-1)\,\delta\right.$$
$$\left. - (m+1)(n-m-1)\right]\frac{gl^2}{2n},$$

und damit aus 1) jenen Grenzwerth selbst:

$$(2)\quad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\frac{\delta-\nu-1}{\lambda}\, S\right.$$
$$\left. + \Big((n-2m-1)\,\delta - (m+1)(n-m-1)\Big)(\nu - m)\frac{g\lambda}{2}\right]\frac{1}{\nu(\delta-m-1)},$$

worin S möglichst gross zu wählen und nach § 31, 16)

$$(3)\qquad \mathfrak{V}_m = -\left(n - 2m + \frac{g_x - g_s}{g} - m\,\frac{n-m}{\nu}\right)\frac{g\lambda}{2},$$

vom Eigengewicht allein herrührt. Wie in § 51 hat eine für gleichmässig vertheilte bewegte Last

$$(4)\qquad S = m(m+1)\frac{p\lambda^2}{2},$$

für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis Verticale m, Vorderrad O bei m,

$$(5)\qquad S = \sum_0^m Pa,$$

oder häufig noch etwas ungünstiger bei Belastung durch Zug I von 0 bis Verticale $m+1$, Rad O bei m

$$(6)\qquad S = \sum_0^m Pa + m \sum_m^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a),$$

welcher Ausdruck mit $P = pda$ wieder auf 4) führt. Wenn jedoch V_m ohne Gegendiagonalen für Zug II berechnet wurde, kann man auch mit Gegendiagonalen ohne Weiteres den Werth 5) verwenden. (Vergl. die Bemerkung am Schlusse des § 25).

Wir wollen nun Formel 2) noch spezialisiren.

Für den *Parallelträger* und das Parallelträgerstück des *Schwedlerträgers* hat man mit $\nu = \delta = \infty$ und 3) allgemein

$$(7)\qquad V_m = -g_x\lambda,$$

jedoch für die *Grenzverticale des Schwedlerträgers* mit $\delta = \infty$

$$(8)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[S + (n - 2m - 1)(\nu - m)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\lambda\nu},$$

übereinstimmend mit §§ 50, 51.

Für den *Parabelträger* wird mit

$$\nu = \frac{m(n-m)}{n - 2m - \omega}, \qquad \delta = \frac{(m+1)(n-m-1)}{n-2m-1}$$

allgemein

$$(9)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\omega+1}{m+1}\frac{S}{m\lambda},$$

und bei gleichmässig vertheilter bewegter Last

$$(10)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\omega+1}{2}p\lambda,$$

worin ω durch § 17, 23) bestimmt und nach § 41, 5)

$$(11)\qquad \mathfrak{V}_m = \left(\frac{g_z - g_x}{g} + \omega\right)\frac{g\lambda}{2}.$$

Man hat also insbesondere für den parabolischen *Segmentträger* mit horizontalem Untergurt (Z-Gurt) wegen $\omega = 1$ allgemein

$$(12)\qquad V_m = g_z\lambda + \frac{2}{m+1}\frac{S}{m\lambda},$$

und bei gleichmässig vertheilter bewegter Last

$$(13)\qquad V_m = g_z\lambda + p\lambda,$$

sowie für den parabolischen *Linsenträger* wegen $\omega = 0$ allgemein

$$(14)\qquad V_m = \frac{g_z - g_x}{2} + \frac{1}{m+1}\frac{S}{m\lambda},$$

und bei gleichmässig vertheilter bewegter Last

$$(15)\qquad V_m = \frac{g_z - g_x}{2}\lambda + \frac{p\lambda}{2}.$$

Etwas zu ungünstig lässt sich entsprechend 13) 15) auch bei Berechnung mit bewegten Radlastzügen setzen: für den parabolischen Segmentträger

$$(16) \qquad V_m = g_s \lambda + K_u,$$

und für den parabolischen Linsenträger

$$(17) \qquad V_m = \frac{g_s - g_u}{2} \lambda + \frac{K_u}{2},$$

unter K_u die grösstmögliche Verkehrsbelastung des Knotenpunktes m im Untergurt verstanden. Die positiven Grenzbeanspruchungen aller Verticalen sind damit gleich gross.

Für den *Halbparabelträger* folgt mit

$$\delta = \frac{(m+1)(n-m-1) - \frac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m - 1}$$

allgemein

$$(18) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[(\delta - \nu - 1)S + (\nu - m)\frac{g l^2}{8f} h_0\right] \frac{1}{\nu \lambda (\delta - m - 1)},$$

welche Gleichung mit $h_0 = 0$ auf den Ausdruck für den Parabelträger, mit $\delta = \nu = \infty$, $f = 0$ aber zunächst auf einen unbestimmten Ausdruck führt, der dem Parallelträger entspricht.

Für die Verticale 1 eines Segmentträgers mit horizontalem Untergurt und beliebig geformtem Obergurt hat man mit

$$m = 1, \qquad \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = 1,$$

$$(19) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{S}{\lambda} = g_s \lambda + K_u,$$

ganz wie ohne Vorhandensein von Gegendiagonalen.

Der positive Grenzwerth von V_m pflegt in allen praktischen Fällen die positive Grenzbeanspruchung der Verticale m überhaupt zu sein, was man nach § 49 controliren oder sich wie folgt klar zu machen suchen kann. Lassen wir nach Erreichung des Werthes 2) mit $D_{m+1} = 0$ das Moment S' noch weiter abnehmen, so wird D_{m+1} negativ, wir behalten zunächst den mit $D_{m+1} = 0$ begonnenen Fall Fig. 216, aber der negative Werth von X_m nimmt ab und damit nach § 52, 5) der positive Werth von (V_m). Das Gleiche würde durch Verringerung von S bewirkt, sodass der positive Grenzwerth von V_m auch den positiven Grenzwerth von (V_m) darstellt, wie sich schon in §§ 50, 51 für den Parallelträger und Schwedlerträger ergeben hat. Wird bei weiterer Entlastung von Schnitt s bis l auch

auch D_m negativ, so tritt der Fall Figur 215 ein, es gilt die Formel

$$V_m' = \mathfrak{B}_m' - [n + v - m)S - (v - m)S'] \frac{1}{vl},$$

worin $v, \mathfrak{B}_m'$ unten liegender X-Gurtung und S, S' bei sonst gleicher Bedeutung wie oben dem Schnitte s in Fig. 215 entsprechen. Um den positiven Werth von V_m' zu vergrössern, müssten wir S' abnehmen lassen, womit aber sofort D_m wieder positiv würde. Wollten wir jedoch die Vergrösserung des positiven V_m' durch Verkleinerung von S erreichen, so würden wir uns der Belastung durch Eigengewicht allein nähern, für welche das Hauptsystem Fig. 214 wirkt. Man sieht dabei schon, dass der Fall Fig. 217 für gewöhnlich nicht erreichbar ist, wie es sich auch in § 50 für den Parallelträger ergeben hat. Wollten wir ihn von der Belastung durch Eigengewicht allein aus erreichen, so wäre zwischen 0 und Feld $m - 1$ Last aufzubringen, womit D_m negativ wird. Alsdann pflegt aber auch D_{m+1} negativ zu sein. Fügen wir nun zwischen Feld $m + 1$ und l Lasten hinzu, um D_{m+1} positiv zu machen, so ändert sich auch D_m in positivem Sinne und erreicht mit zunehmendem S' (beim Uebergang vom Negativen zum Positiven) ebenso vor D_{m+1} den Werth Null, wie dieses oben bei abnehmendem S' (beim Uebergang vom Positiven zum Negativen) zuerst bei Null ankam.

Die positive Grenzbeanspruchung der Verticale m entspricht nach Obigem zwar dem System Fig. 214, aber einer günstigeren Belastung als ohne Vorhandensein von Gegendiagonalen. Infolge der Letzteren werden die positiven Grenzbeanspruchungen der Verticalen günstiger als bei einfachen Diagonalen und oben liegender X-Gurtung.

§ 54. **Positive Grenzbeanspruchungen der Verticalen mit anschliessenden Gegendiagonalen. Fahrbahn nicht unten.**

Dass die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten des Obergurts angreift, kommt, abgesehen vom Parallelträger, der in § 50 erledigt wurde, verhältnissmässig selten vor. Eine scharfe Bestimmung der Kräfte in den Verticalen mit anliegenden Gegendiagonalen für alle Fälle würde hier noch umständlicher als bei unten liegender Fahrbahn sein und ist nirgends vorgenommen worden.

Das im ersten Absatze des vorigen Paragraphen Gesagte gilt auch hier. Dagegen kann nun mit abnehmendem S' sowohl D_m als D_{m+1} zuerst gleich Null werden. Im ersten Falle, welcher bei den

den Parabelträgern naheliegenden Formen vorkommt, folgt mit Rücksicht darauf, dass die Verkehrsbelastungen der Knotenpunkte vor und nach Schnitt s auch vor und nach Feld m liegen, aus

$$D_m = \left[n - 2m + 1 - m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right]\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}$$
$$-\left[(n+\varepsilon-m)S - (\varepsilon - m)S'\right]\frac{d_m}{\varepsilon\, l\, h_{m-1}} = 0,$$

für den positiven Grenzwerth von V_m:

$$S' = \frac{n+\varepsilon-m}{\varepsilon-m}\,S - \frac{1}{\varepsilon-m}\left[(n-2m+1)\varepsilon - m(n-m)\right]\frac{gl^2}{2n},$$

und damit nach § 53, 1) dieser Grenzwerth selbst:

$$(1)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\frac{\varepsilon-\nu}{\lambda}\,S\right.$$
$$\left. + \Big((n-2m+1)\varepsilon - m(n-m)\Big)(\nu - m)\,\frac{g\lambda}{2}\right]\frac{1}{\nu(\varepsilon-m)},$$

vorausgesetzt, dass nicht auch bei diesem S' die Verkehrslast noch negativ zu V_m beiträgt. Die Formel 1) gilt also insbesondere für $\nu \leqq \varepsilon$, während

$$(2)\qquad \text{für } \nu > \varepsilon, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m$$

zu sein pflegt, worin wie in 1) und den folgenden Formeln $\mathfrak{V}_m$ durch § 53, 3) bestimmt ist. Der Fall $\nu < \varepsilon$ (Schnitt der Richtungen des Obergurtstabes m und Untergurtstabes $m+1$ weniger weit links von Verticale m ats Schnitt beider Gurtungsrichtungen m) tritt z. B. bei Sichelträgern ein, kommt aber bei Balkenbrücken nicht vor.

Den zweiten Fall, dass D_{m+1} zuerst gleich Null wird, hat man bei den dem Parallelträger naheliegenden Formen. Denken wir uns bei der Entlastung zum Zwecke der Verkleinerung von S' beim Knotenpunkte m begonnen, dessen Belastung dem gesuchten positiven Grenzwerth V_m am stärksten entgegenwirkt, so liegen wieder die Verkehrsbelastungen der Knotenpunkte vor und nach Schnitt s auch vor und nach Feld $m+1$, sodass wir ganz wie in § 53 den positiven Grenzwerth erhalten:

$$(3)\quad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[\frac{\delta-\nu-1}{\lambda}\,S\right.$$
$$\left. + \Big((n-2m-1)\delta - (m+1)(n-m-1)\Big)(\nu - m)\,\frac{g\lambda}{2}\right]\frac{1}{\nu(\delta-m-1)},$$

worin S möglichst gross zu wählen ist.

Da die Verkehrslast jetzt auf die Knotenpunkte des Obergurts wirkt, so hat man in 1) 3) für gleichmässig vertheilte bewegte Last

$$(4)\qquad S = p\lambda\,[\lambda + 2\lambda + \cdot\ \cdot + (m-1)\lambda] = m(m-1)\frac{p\lambda^2}{2},$$

für bewegte Radlastzüge bei Belastung durch Zug II von 0 bis Verticale $m-1$, Vorderrad O bei $m-1$,

$$(5)\qquad S = \sum_0^{m-1}{}' Pa,$$

häufig jedoch noch etwas ungünstiger bei Belastung durch Zug I von 0 bis Verticale m, Rad O bei $m-1$,

$$(6)\qquad S = \sum_0^{m-1}{}' Pa + (m-1)\sum_{m-1}^{m}{}' P(m\lambda - a),$$

welche Formel mit $P = pda$ wieder auf 4) führt. Wenn jedoch V_m ohne Gegendiagonalen für Zug II berechnet wurde, kann man aus den hierfür massgebenden Gründen auch mit Gegendiagonalen ohne Weiteres den Werth 5) verwenden. Die Formeln 1) 3) können wieder spezialisirt werden.

Für den *Parallelträger* und das Parallelträgerstück des *Schwedlerträgers* folgt aus 3) mit $\delta = \nu = \infty$ übereinstimmend mit § 50

$$(7)\qquad V_m = -g_x\lambda,$$

für die *Grenzverticale des Schwedlerträgers*

$$(8)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \left[S + (n - 2m - 1)(\nu - m)\frac{g\lambda^2}{2}\right]\frac{1}{\nu\lambda},$$

worin nur S einen andern Werth als in § 51 hat.

Für den *Parabelträger* wird mit

$$\varepsilon = \frac{m(n-m)}{n - 2m + 1}, \qquad \nu = \frac{m(n-m)}{n - 2m + \omega}$$

für $\nu \leq \varepsilon$, also beispielsweise für Sichelträger, allgemein

$$(9)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\omega - 1}{m + 1}\,\frac{S}{m\lambda},$$

und bei gleichmässig vertheilter bewegter Last

$$(10)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\omega - 1}{2}\,p\lambda,$$

worin $\mathfrak{V}_m$ durch § 50, 11) bestimmt ist. Für den parabolischen *Segmentträger* mit horizontalem Untergurt, welcher bei oben angreifender Fahrbahnlast als Dachbinder vorkommt, wird hiernach mit $\omega = 1$

$$(11)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m = g_x\lambda.$$

Bei horizontalem Obergurt ist $\omega = -1$, $\nu > \varepsilon$ und nach 2)

$$V_m = \mathfrak{V}_m = -g_x\lambda, \tag{12}$$

ebenso für den parabolischen *Linsenträger* mit $\omega = 0$, $\nu > \varepsilon$

$$V_m = \mathfrak{V}_m = \frac{g_s - g_x}{2}\lambda. \tag{13}$$

Auch für Paulische Segmentträger mit horizontalem Obergurt und Paulische Linsenträger kann 2) Verwendung finden.

Für den *Halbparabelträger* folgt mit dem im vorigen § angeführten δ aus 3) allgemein:

$$V_m = \mathfrak{V}_m + [(\delta - \nu - 1)S + (\nu - m)\frac{gl^2}{8f}h_0]\frac{1}{\nu\lambda(\delta - m - 1)}. \tag{14}$$

Je nach der Annäherung an den Parabelträger mit abnehmendem $h_0 : h$ könnte allerdings 2) zutreffender sein, da aber 3) grössere positive Werthe als 1) liefert, so thut man immer gut, in zweifelhaften Fällen von dieser Gleichung und ihren Spezialformeln auszugehen. Für den Parabelträger würde 3) allgemein ergeben

$$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{\omega + 1}{m + 1}\frac{S}{m\lambda},$$

und bei gleichmässig vertheilter bewegter Last

$$V_m = \mathfrak{V}_m + \frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{\omega+1}{2}p\lambda,$$

also bei horizontalem Untergurt mit $\omega = 1$ anstatt 11)

$$V_m = g_s\lambda + \frac{m-1}{m+1}p\lambda,$$

bei horizontalem Obergurt mit $\omega = -1$ wie oben

$$V_m = -g_x\lambda,$$

und beim Linsenträger mit $\omega = 0$ anstatt 13)

$$V_m = \frac{g_s - g_x}{2}\lambda + \frac{m-1}{m+1}\frac{p\lambda}{2}.$$

Dies sind extreme Fälle der Abweichung.

Auch wenn die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte des Obergurts wirkt, pflegt der positive Grenzwerth von V_m die positive Grenzbeanspruchung der Verticale m überhaupt zu sein, was man in ähnlicher Weise wie am Schlusse des vorigen § verfolgen oder nach der Andeutung in § 49 controliren kann. Der Schlussabsatz des § 53 kann hier wiederholt werden.

Greift die *Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten* in Verticale m an, dann gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Formeln des § 53, für das Verticalenstück von Fahrbahn bis

Untergurt die oben abgeleiteten Beziehungen. Ersteres verhält sich ganz, als wenn die Fahrbahnlast im Untergurt angriffe, Letzteres ebenso als wenn sie im Obergurt angriffe.

§ 55. Bedingung für die Diagonalenbeanspruchung Null. †

Bei Ableitung des positiven Grenzwerths V_m in den zwei letzten Paragraphen mussten wir wissen, welche der Beanspruchungen D_m, D_{m+1} mit abnehmendem S' zuerst den Werth Null erreicht. Im Folgenden handelt es sich um die Beantwortung dieser Frage.

S, S' seien die statischen Momente der von der Verkehrslast herrührenden Knotenpunktslasten von 0 bis Schnitt s (Fig. 214) in Hinsicht des Auflagers 0 und von Schnitt s bis l in Hinsicht des Auflagers l, der Werth von ε für das Feld $m+1$ sei durch δ bezeichnet. Es wird nun mit abnehmendem S' diejenige der Grössen D_m, D_{m+1} zuerst Null werden, für welche beim Eintritt des Werthes Null unser S' noch am grössten ist (bei gleich gebliebenem S). Wenn nun K_0, K_u die Verkehrsbelastungen des oberen und unteren Knotenpunktes m bedeuten, so hat man nach § 31 für jede Belastung

$$D_m = \left[n - 2m + 1 - m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right]\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{g\lambda}{2}$$
$$-\left[(n-m+\varepsilon)(S-m\lambda K_u) + (m-\varepsilon)(S'-(n-m)\lambda K_u)\right]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},$$

und ebenso

$$D_{m+1} = \left[n - 2m - 1 - (m+1)\,\frac{n-m-1}{\delta}\right]\frac{d_{m+1}}{h_m}\,\frac{g\lambda}{2}$$
$$-\left[(n-m-1+\delta)(S+m\lambda K_0)\right.$$
$$\left.+ (m+1-\delta)(S'-(n-m)\lambda K_0)\right]\frac{d_{m+1}}{\delta l h_m}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt für $D_m = 0$:

$$S' = \frac{n+\varepsilon-m}{\varepsilon-m}\,S - \frac{\varepsilon}{\varepsilon-m}\,lK_u - \left[\frac{n-2m+1}{\varepsilon-m}\,\varepsilon - m\,\frac{n-m}{\varepsilon-m}\right]\frac{gl^2}{2n},$$

und aus der zweiten für $D_{m+1} = 0$:

$$S_1' = \frac{n+\delta-m-1}{\delta-m-1}\,S - \frac{\delta-1}{\delta-m-1}\,lK_0$$
$$-\left[\frac{n-2m-1}{\delta-m-1}\,\delta - (m+1)\,\frac{n-m-1}{\delta-m-1}\right]\frac{gl^2}{2n}.$$

Durch Subtraction erhält man:

$$(1)\qquad S_1' - S' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - m}\, l K_u - \frac{\delta - 1}{\delta - m - 1}\, l K_0 - \frac{\delta - \varepsilon - 1}{\delta - m - 1}\,\frac{n}{\varepsilon - m}\, S + \left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon - m} - m\,\frac{m+1}{\varepsilon - m}\,\frac{\delta - \varepsilon - 1}{\delta - m - 1}\right]\frac{g l^2}{2n}.$$

Damit ist das verlangte Kriterium gegeben. Es wird D_{m+1} oder D_m zuerst gleich Null, je nachdem in vorstehender Gleichung der Ausdruck rechts positiv oder negativ ist.

Fahrbahn unten. In diesem Falle ist $K_0 = 0$. Für gleichmässig vertheilte bewegte Last, durch welche bei geeigneter Wahl der p stets auch bewegte Radlastzüge ersetzt werden können, hat man für den positiven Grenzwerth von V_m nach § 53, 4)

$$S = m(m+1)\frac{p\lambda^2}{2}, \qquad K_u = p\lambda,$$

womit 1) die Form annimmt

$$(2)\qquad S_1' - S' = \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon - m} - m\,\frac{m+1}{\varepsilon - m}\,\frac{\delta - \varepsilon - 1}{\delta - m - 1}\right)\frac{q l^2}{2n}.$$

Wir erhalten beispielsweise für den Parallelträger mit $\varepsilon = \delta = \infty$

$$(3)\qquad S_1' - S' = \frac{q l^2}{n},$$

für den Parabelträger mit ε, δ nach § 17, 21)

$$(4)\qquad S_1' - S' = 0,$$

für die Grenzverticale des Schwedlerträgers mit $\delta = \infty$

$$(5)\qquad S_1' - S = \frac{2\varepsilon - m(m+1)}{\varepsilon - m}\,\frac{q l^2}{2n},$$

welcher Werth in praktischen Fällen ebenfalls positiv zu sein pflegt. (Für den in Beispiel 59 berechneten Schwedlerträger sind $m = 3$, $\varepsilon = 15$ und damit der Bruch gleich 1,5).

Fahrbahn oben. Hier hat man $K_u = 0$, und wenn die Verkleinerung von S' mit Entlastung des Knotenpunktes m beginnt (§ 54) auch $K_0 = 0$. Bei gleichmässig vertheilter bewegter Last und entsgrechenden Radlastzügen ist nach § 54, 4) für den positiven Grenzwerth von V_m

$$S = m(m-1)\frac{p\lambda^2}{2},$$

womit aus 1) wird

$$(6)\qquad S_1' - S' = \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - m}\cdot\frac{2g}{q} - \left(m - 1 + \frac{2g}{q}\right)\frac{m}{\varepsilon - m}\,\frac{\delta - \varepsilon - 1}{\delta - m - 1}\right]\frac{q l^2}{2n}.$$

Wir erhalten beispielsweise für den Parallelträger mit $\varepsilon = \delta = \infty$

(7) $$S_1' - S' = \frac{gl^2}{n},$$

also positiv, dagegen für den Parabelträger mit ε, δ nach § 17, 21)

(8) $$S_1' - S' = -\frac{n-m}{m+1}\,\frac{pl^2}{n},$$

negativ. Für die Grenzverticale des Schwedlerträgers wird mit $\delta = \infty$

(9) $$S_1' - S' = \left(\frac{2g}{q} - m\,\frac{m-1}{\varepsilon - m}\right)\frac{ql^2}{2n},$$

welcher Werth positiv ist (für den in Beispiel 59 behandelten Schwedlerträger ist mit $m = 3$, $\varepsilon = 15$ und $g:q = 3:10$ der Klammerausdruck gleich 0,1), oder etwas zu ungünstig (§ 54) als positiv angenommen werden kann.

§ 56. Zugdiagonalen bei beliebigen Balkenfachwerken.

Wir wollen nun noch solche Balkenfachwerke besprechen, welche sich nicht nach den Angaben der §§ 50 — 53 beurtheilen lassen, wobei wir insbesondere continuirliche Balkenfachwerke im Auge haben. Dabei handelt es sich nur um allgemeine Andeutungen, mit welchen man sich erst zu beschäftigen braucht, wenn Veranlassung dazu vorhanden ist. Die am Schlusse des § 49 erwähnte Berücksichtigung des Einflusses der Gegendiagonalen bei Fachwerken beliebiger Art bleibt selbstverständlich auch hier gültig.

Diagonalen. Für die Diagonalen ist in § 49 alles Nöthige festgestellt. Von den zwei in einem Felde möglichen Diagonalen würde für jede bestimmte Belastung die eine, wenn allein vorhanden, gezogen, die andere, wenn allein vorhanden, gedrückt. Haben sich nun unter Annahme nur einer Diagonale deren Grenzbeanspruchungen von verschiedenem Vorzeichen ergeben, so ist in dem betreffenden Felde eine zweite Diagonale nöthig. Die erst erwähnte Diagonale erhält als untere Grenzbeanspruchung Null und als obere die berechnete positive Grenzbeanspruchung, die zweite Diagonale erhält ebenfalls die untere Grenzbeanspruchung Null und die obere gleich dem Absolutwerthe der berechneten negativen Grenzbeanspruchung multiplicirt mit dem Längenverhältniss der zweiten und ersten Diagonale. Bei Belastung durch das Eigengewicht allein wirkt diejenige der beiden Diagonalen, für welche in diesem Falle eine positive Beanspruchung entsteht. Wir bezeichneten sie als Hauptdiagonale, die

andere als Gegendiagonale des betreffenden Feldes. Alles dies gilt auch für Bogenfachwerke.

Gurtungen. Hat man die Grenzbeanspruchungen X_m, Z_m der Gurtungen unter Voraussetzung nur einer Diagonale im Felde m berechnet, so bleibt jede bestimmte dieser Grenzbeanspruchungen bei Anwendung von Zugdiagonalen dann gültig, wenn in dem Belastungsfalle, in welchem sie eintritt, die erst erwähnte Diagonale wirkt, d. h. wenn deren Beanspruchung dann positiv wird. In diesem Falle hat man also die Grenzbeanspruchung des Obergurtstabes bezw. Untergurtstabes m,

a) wenn die X-Gurtung im Felde m oben angenommen war,

$$(1)\qquad O_m = X_m, \qquad U_m = Z_m,$$

b) wenn die X-Gurtung im Felde m unten angenommen war,

$$(2)\qquad O_m = Z_m, \qquad U_m = X_m,$$

Zeigt sich jedoch, dass im fraglichen Belastungsfalle die zweite Diagonale wirkt, so folgt die gesuchte Grenzbeanspruchung des Obergurtstabes bezw. Untergurtstabes aus § 18, 2) mit $H = 0$,

a) wenn die X-Gurtung im Felde m oben angenommen war,

$$(3)\qquad O_m = -\frac{o_m}{u_m} Z_m, \qquad U_m = -\frac{u_m}{o_m} X_m,$$

b) wenn die X-Gurtung im Felde m unten angenommen war,

$$(4)\qquad O_m = -\frac{o_m}{u_m} X_m, \qquad U_m = -\frac{u_m}{o_m} Z_m.$$

Liegen beispielsweise die Gurtungsstäbe des Feldes m zu einer beliebigen Horizontalen symmetrisch (Parallelträger, Linsenträger u. s. w.), so werden mit $u_m = o_m$,

a) wenn die X-Gurtung im Felde m oben angenommen war,

$$(5)\qquad O_m = -Z_m, \qquad U_m = -X_m,$$

b) wenn die X-Gurtung im Felde m unten angenommen war,

$$(6)\qquad O_m = -X_m, \qquad U_m = -Z_m.$$

Will man die Untersuchung, welche Diagonale im fraglichen Belastungsfalle wirkt, vermeiden und im Allgemeinen zu ungünstig rechnen (nach den Trägerenden hin allerdings vielfach wesentlich zu ungünstig), so kann man im Falle a) die ungünstigste der durch 1) und 3) oder 5), im Falle b) die ungünstigste der durch 2) und 4) oder 6) bestimmten Beanspruchungen des betreffenden Stabes annehmen.

Wenn die unter Voraussetzung nur einer Diagonale erhaltene

Grenzbeanspruchung eines Gurtungsstabes m in einem Belastungsfalle eintritt, für welchen die fragliche Diagonale Druck erhielte, so könnte man sich allerdings noch fragen, ob nicht doch eine ungünstigere Grenzbeanspruchung als 3) — 6) bestimmen dann entsteht, wenn man die Belastung nur soweit gegen den berechneten Grenzwerth hin ungünstiger werden lässt, als eben ohne Negativwerden der Diagonalenbeanspruchung möglich ist. Es ist aber nicht der Fall, denn der ungünstigsten so erreichbaren Belastung entspricht $D_m = 0$, in diesem Augenblicke kann ebensogut die zweite Diagonale als wirksam gelten, und da die Grenzbeanspruchung beim Wirken derselben durch 3) — 6) bestimmt ist, so muss diese Beanspruchung ungünstiger als für $D_m = 0$ sein.

Verticalen. Ueber die Feststellung der genauen Grenzbeanspruchungen der Verticalen kann am wenigsten Allgemeines gesagt werden, sie ist auch gewöhnlich am umständlichsten, gelingt aber in wichtigen Fällen mit Rücksicht auf die Art und Form des Trägers, wie wir schon gesehen haben. Fast in allen vorkommenden Fällen sind die Maximaldruckbeanspruchungen die numerisch grössten Grenzbeanspruchungen, und sie treten ein, wenn die Hauptdiagonalen wirken, abgesehen von derjenigen Verticale, bei welcher die Stellung der Hauptdiagonalen wechselt. Für diese pflegt die Maximaldruckbeanspruchung einzutreten, wenn auf einer Seite die Hauptdiagonale, auf der andern die Gegendiagonale wirkt. Die numerisch kleinere Grenzbeanspruchung kommt nur bei der neueren Dimensionenberechnung in Betracht. Natürlich sind etwas zu ungünstige Annahmen immer gestattet, bei kleinen Trägern schon deshalb, weil die Verticalen aus constructiven Rücksichten (Anschluss der Querträger etc.) ohnehin vielfach stärker gemacht werden, als der Berechnung entsprechen würde, auch nicht immer garantirt werden kann, dass die Gegendiagonalen genau so wirken wie die Theorie annimmt.

Es werde beispielsweise noch ein beliebiger Parallelträger ins Auge gefasst. K_0, K_u seien die Belastungen der Knotenpunkte m des Obergurts und Untergurts. Dann verlangt das Gleichgewicht an diesen Knotenpunkten für das System Fig. 204

$$(7) \qquad V_m + K_0 + \frac{h}{d} D_{m+1} = 0, \qquad V_m - K_u + \frac{h}{d} D_m = 0,$$

für das System Fig. 205

$$(8) \qquad V_m + K_0 + \frac{h}{d} D'_m = 0, \qquad V_m - K_u + \frac{h}{d} D'_{m+1} = 0,$$

und für das System Fig. 206

$$V_m + K_0 = 0, \qquad V_m - K_u + \frac{h}{d}(D_m + D'_{m+1}) = 0. \tag{9}$$

Für das System Fig. 207 müsste sein

$$V_m + K_0 + \frac{h}{d}(D'_m + D_{m+1}) = 0, \qquad V_m - K_u = 0,$$

doch kann dieser Fall nicht vorkommen, da sonst, wie die Subtraction der letzten Gleichungen ergibt,

$$K_0 + K_u + \frac{h}{d}(D'_m + D_{m+1}) = 0$$

wäre, was mindestens eine der beiden Diagonalbeanspruchungen negativ voraussetzt. Aus den ersten Gleichungen 7) — 9) erhalten wir beim Verschwinden der darin auftretenden Diagonalenbeanspruchung die eine Grenzbeanspruchung der Verticale m

$$\text{min druck } V_m = - \text{min } K_0 = - \mathfrak{K}_u. \tag{10}$$

Die zweiten Gleichungen 7) — 9) würden zwar noch ungünstiger $V_m = K_u$ liefern, die Bedingungen, unter welchen dieser Grenzwerth einträte ($D_m = 0$ für Fig. 204, $D'_{m+1} = 0$ für Fig. 205, $D_m = D'_{m+1} = 0$ für Fig. 206) können jedoch nicht zutreffen, weil wir damit den unmöglichen Fall Fig. 207 erhielten. Als Maximaldruckbeanspruchung dürfen wir den ungünstigsten aus 1) — 3) folgenden Werth annehmen, welcher in Ausnahmsfällen nur um etwas zu ungünstig sein könnte.

Bei continuirlichen Trägern kommt es vor, dass bis in die Endfelder Gegendiagonalen nöthig sind. Wir haben dann für die Endverticale je nach der Diagonale, welche wirkt,

$$V_0 + K_0 + \frac{h}{d} D_1 = 0, \tag{11}$$

$$V_0 + K_0 = 0, \tag{12}$$

wonach auch hier die eine Grenzbeanspruchung durch 10) bestimmt ist, während die andre aus vorstehenden Gleichungen folgt, welche übrigens wegen $D_0 = 0$ den ersten Gleichungen 7) — 9) entsprechen.

Wir haben beim Ansatze von 7) — 9) den Diagonalenlängen keine Indices gegeben, weil bei gleicher Feldlänge alle d gleich gross sind. Selbstverständlich lassen sich bei ungleich langen Feldern ganz entsprechende Gleichungen anschreiben (§ 50).

V. Abschnitt.

Continuirliche Gelenkträger.

Balkenträger auf mehr als zwei Stützen heissen continuirliche Balkenträger. Sollen dieselben durch Einschalten von Zwischengelenken von statisch bestimmter Trägerart werden, so muss die Anzahl der Zwischengelenke gleich der Anzahl der Zwischenstützen sein. Wie die Zwischengelenke auf die verschiedenen Oeffnungen zu vertheilen sind, ist aus § 2 zu entnehmen. Die Figuren 218—227 zeigen richtige Anordnungen von 2—5 Oeffnungen.

Das Princip der continuirlichen Gelenkträger wurde früher erkannt als gewöhnlich angenommen wird (vergl. The Engineer 1881 I. S. 375). Insbesondere haben denselben *A. Ritter* und *Köpke* schon 1862 ihre Aufmerksamkeit zugewandt (*Ritter*, Eiserne Dach- und Brückenconstructionen, Hannover 1863, Abschnitt IX). *Gerber* ist selbständig wieder darauf gekommen, und ihm hat man die erste constructive Ausbildung der Gelenkträger und ihre Einführung in die Praxis zu verdanken (Beschreibung des 1866 genommenen, seit 1868 infolge Nichterneuerung erloschenen Patents in der Zeitschr. d. bair. Ing. u. Arch. Vereins 1870. Erste Ausführungen: Strassenbrücke über die Regnitz bei Bamberg, drei Oeffnungen von 28,8 m, 45,1 m, 28,8 m Spannweite, zwei Zwischengelenke in der Mittelöffnung, Obergurte horizontal, Untergurt schwach nach oben gekrümmt, vollendet im März 1867; Strassenbrücke über den Main bei Hassfurt, drei Oeffnungen von 23,9 m, 37,9 m, 23,9 m, zwei Zwischengelenke in der Mittelöffnung, Gurtungen symmetrisch zu einer Horizontale bei den Trägerenden und Zwischengelenken zusammentreffend, vollendet im Mai 1867; Strassenbrücke über die Donau bei Vilshofen, fünf Oeffnungen von 51,6 m, 51,6 m, 65,4 m, 51,6 m, 51,6 m, zwei Zwischengelenke in der Mittelöffnung, je eines in den beiden äussern Oeffnungen, Parallelträger, vollendet 1872 u. s. w.). Seitdem sind continuirliche Gelenkträger von verschiedenen Constructeuren angewandt worden, auch bei Eisenbahnbrücken (Luhebrücke der

Wittenberg-Buchholzer Bahn, drei Oeffnungen von 13,653 m, 14,124 m, 13,653 m, zwei Zwischengelenke in der Mittelöffnung, Blechträger, vollendet 1873; Warthebrücke bei Posen, fünf Oeffnungen von 38 m, 36 m, 45 m, 36 m, 38 m, zwei Zwischengelenke in der Mittelöffnung, je eines in den beiden äussersten Oeffnungen, Parallelträger in der zweiten und vierten Oeffnung mit anschliessenden Consoln, auf welchen Paulische Träger mit horizontalem Untergurte ruhen, vollendet 1875; Kentuckybrücke der Cincinnati-Southernbahn, drei Oeffnungen von je 114,3 m und einem Zwischengelenke in den zwei äussern Oeffnungen, Parallelträger, vollendet 1877). Die Träger der Luhebrücke scheinen die kleinsten continuirlichen Gelenkträger und gleichzeitig die einzigen mit voller Wand geblieben zu sein. Will man auch die Träger der Forthbrücke mit den grössten Spannweiten der Erde (210,23 m, Pfeilerfeld 44,20 m, 521,20 m, Pfeilerfeld 79,25 m, 521,20 m, Pfeilerfeld 44,20 m, 210,23 m, Unterstützungen an den Enden des Trägers und der Pfeilerfelder, je zwei Gelenke in beiden grössten Oeffnungen, Eisenbahnbrücke, im Bau begriffen) als continuirliche Gelenkträger von statisch bestimmter Art ansehen, so muss das mittlere Pfeilerfeld von 79,25 m Länge als eine Oeffnung für sich betrachtet werden (bei 4 Zwischengelenken 4 Zwischenstützen), entsprechend der schon 1863 von *Ritter* gewählten Anordnung, während die 44,2 m langen äusseren Pfeilerfelder auf die anschliessenden Oeffnungen zu vertheilen sind. Fasst man dagegen auch die beiden äussern Pfeilerfelder als besondere Oeffnungen auf, so tritt statische Unbestimmtheit der Trägerart, d. h. der äussern Kräfte des Trägers ein (§ 2). Um diese zu heben, hat man bei der Niagarabrücke (58,625 m, Pfeilerfeld 7,5 m, 141 m, Pfeilerfeld 7,5 m, 58,625 m, Unterstützungen an den Enden des Trägers und der Pfeilerfelder, zwei Zwischengelenke in der mittleren Oeffnung, Eisenbahnbrücke, vollendet 1883) die Pfeilerfelder ohne Diagonalen hergestellt, womit aber eine andre Trägerart als die hier betrachtete entstanden ist. Als Dachbinder hat der continuirliche Gelenkträger bis jetzt keine Anwendung gefunden, obgleich er unter geeigneten Verhältnissen auch bei Dächern in Betracht kommen kann.

Wir werden nun die Theorie der continuirlichen Gelenkträger in ähnlicher Weise wie im dritten Abschnitte diejenige der einfachen Balkenträger geben. Wo nicht ausdrücklich Gegentheiliges bemerkt ist (§ 60), wird vorausgesetzt, dass nur verticale äussere Kräfte wirken.

§ 57. Beliebige Belastung beliebiger Systeme.

Form und System des Trägers können beliebig sein, sodass die Beziehungen dieses und der beiden folgenden Paragraphen auch für statisch unbestimmte Fachwerke und vollwandige Träger gelten. Bei Betrachtung irgend einer Oeffnung des Trägers wird die verticale Ordinatenaxe durch das Auflager links gelegt, womit die Abscisse des Auflagers rechts gleich der Spannweite l ist. Durch die Auflager 0 und l denken wir uns Schnitte 0 und l von beliebiger Form gelegt. Dann hat man das Moment der äusseren Kräfte links eines beliebigen Schnittes s zwischen den Schnitten 0 und l in Hinsicht eines beliebigen Drehpunkts der Abscisse u nach § 8, 2):

$$M_s = \frac{l-u}{l}(M+S) + \frac{u}{l}(M'+S'), \tag{1}$$

worin S, S' die Momente der zwischen den Schnitten 0 und s bezw. s und l auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht der Auflager 0 und l und M, M' die Werthe von M_s für $s=0$, $u=0$ und $s=l$, $u=l$. Greifen die Lasten K_1, K_2, ... bei den Abscissen e_1, e_2, ... am Träger an, dann hat man:

$$S = \sum_0^s Ke, \qquad S' = \sum_s^l K(l-e). \tag{2}$$

Wirken irgendwelche Lasten P_1, P_2, ... bei a_1, a_2, ... zunächst auf ein System von Zwischenträgern und bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so liefert § 10, 2) für diese P:

$$\left\{\begin{aligned} S &= \sum_0^c Pa + \frac{c}{v-c}\sum_c^v P(v-a), \\ S' &= \sum_v^l P(l-a) + \frac{l-v}{v-c}\sum_c^v P(a-c), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

vorausgesetzt, dass alle Componenten der P zwischen den Schnitten 0 und l auf den Träger übertragen werden. Dies nehmen wir an.

Jede Oeffnung l, welche ein Zwischengelenk enthält, weist entweder noch ein zweites Zwischengelenk auf oder doch ein Endgelenk (Trägerende). Wir bezeichnen die Abscissen dieser Gelenke durch r, t, wobei $r < t$ (Fig. 228), und haben dann für geeignete Schnitte r, t durch die Gelenke in Hinsicht der Letzteren nach 1) 2)

$$M_r = \frac{l-r}{l}\Big[M + \sum_0^r Ke\Big] + \frac{r}{l}\Big[M' + \sum_r^l K(l-e)\Big] = 0,$$

$$M_t = \frac{l-t}{l}\Big[M + \sum_0^t Ke\Big] + \frac{t}{l}\Big[M' + \sum_t^l K(l-e)\Big] = 0.$$

Hieraus folgen die Stützenmomente:

$$(4)\qquad \begin{cases} M = -\sum_0^r Ke - \frac{r}{t-r}\sum_r^t K(t-e), \\ M' = -\sum_t^l K(l-e) - \frac{l-t}{t-r}\sum_r^t K(e-r). \end{cases}$$

Wenn M, M' von indirect wirkenden Lasten P herrühren und bei den Abscissen r, t Unterstützungspunkte der Fahrbahn liegen, so darf man in 4) die Momente der P für diejenigen der K setzen (§ 10), womit entstehen

$$(5)\qquad \begin{cases} M = -\sum_0^r Pa - \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a), \\ M' = -\sum_t^l P(l-a) - \frac{l-t}{l-r}\sum_r^t P(a-r). \end{cases}$$

Da ebenso viel Zwischengelenke als Zwischenstützen vorhanden sind, so lassen sich sämmtliche Momente aus Formeln der vorstehenden Art berechnen. Für eine Anfangsöffnung mit Zwischengelenk hat man $r = 0$, $M = 0$, für eine Endöffnung mit Zwischengelenk $t = l$, $M' = 0$. Nachdem die Stützenmomente bekannt sind, lassen sich alle Gleichungen des § 7 verwenden. Für eine zwischen den Punkten 0 und l auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit liefern die Gleichungen 5) mit $P = p\,da$:

$$(6)\qquad M = -rt\frac{p}{2}, \qquad M' = -(l-r)(l-t)\frac{p}{2}.$$

Im Folgenden kommt es darauf an, die Momente M_s für beliebige Schnitte s sowie die Stützenreactionen durch lauter gegebene Grössen auszudrücken. Mit den Momenten M_s sind für Fachwerke einfachen Systems auch die Beanspruchungen der Stäbe bestimmt (§ 15).

Oeffnungen mit Zwischengelenken. Das Trägerstück zwischen den beiden Gelenken wirkt ganz wie ein gewöhnlicher Balkenträger mit einem verschiebbaren und einem unverschiebbaren Gelenkauflager

und kann also nach den Formeln des III. Abschnittes berechnet werden, wobei natürlich die Spannweite gleich $t - r$ zu setzen ist. Den Trägertheil von t bis l könnte man nach den von 0 bis r gültigen Formeln beurtheilen, wenn vorübergehend die Reihenfolge der Oeffnungen vertauscht gedacht oder die Ordinatenaxe durch das Auflager rechts gelegt würde. Wir werden jedoch hier nur das Trägerstück zwischen den Gelenken ausser Betracht lassen.

Durch Substitution von 2) 4) in 1) erhält man, wenn s zwischen den Schnitten 0 und r liegt,

$$(7) \qquad M_s = \sum_s^r K(u - e) + \frac{u - r}{t - r} \sum_r^t K(t - e),$$

und wenn s zwischen den Schnitten t und l liegt

$$(8) \qquad M_s = \sum_t^s K(e - u) + \frac{t - u}{t - r} \sum_r^t K(e - r).$$

Um die von indirect wirkenden Lasten P herrührenden Momente M_s durch die P selbst auszudrücken, verwenden wir in 1) die Formeln 3) 5), oder einfacher wir setzen in 7) 8) die Momente der P für diejenigen der K (§ 10). Auf beide Arten folgen für s zwischen 0 und r

$$(9) \qquad M_s = \frac{u - v}{v - c} \sum_c^v P(a - c) + \sum_v^r P(u - a) + \frac{u - r}{t - r} \sum_r^t P(t - a),$$

und für s zwischen t und l

$$(10) \qquad M_s = \frac{c - u}{v - c} \sum_c^v P(v - a) + \sum_t^c P(a - u) + \frac{t - u}{t - r} \sum_r^t P(a - r).$$

Die Influenzlinie einer Einwirkung B entsteht, wenn an jeder Stelle a die Ordinate b gleich dem Factor gemacht wird, mit welchem P für diese Lage a im allgemeinen Ausdrucke für B multiplicirt ist. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten, in welchen Lasten P auf den Träger übertragen werden, verläuft die Influenzlinie geradlinig (§ 11). Zur Verzeichnung der Influenzlinie von M_s hat man demnach folgende Verfahren.

Schnitt s zwischen 0 und s (Fig. 229—231). Man trage bei den Abscissen v und r bezw. $u - v = vv_1$ und $u - r = rr_1$ als Ordinaten an und verbinde die Punkte c und v_1, v_1 und r_1, r_1 und t durch gerade Linien; dann ist cv_1r_1t die Influenzlinie für M_s. Lasten

ausserhalb der Strecke ct sind ohne Einfluss. Eine andre Construction durch Antragen von u bei 0 ist aus Fig. 229 ersichtlich.

Schnitt s zwischen t und l (Fig. 232—234). Man trage bei den Abscissen c und t bezw. $c - u = cc_1$ und $t - u = tt_1$ als Ordinaten an und verbinde die Punkte v und c_1, c_1 und t_1, t_1 und r durch gerade Linien; dann ist $r t_1 c_1 v$ die Influenzlinie für M_s. Lasten ausserhalb der Strecke rv sind ohne Einfluss. Eine andre Construction durch Antragen von $l - u$ bei l ist aus Fig. 234 ersichtlich.

Für eine zwischen den Punkten 0 und l auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit liefern die Formeln 9) 10) mit $P = p\,da$ oder die Influenzlinien wegen $B = pF$ (§ 11) das Moment in Schnitten s zwischen 0 und r

$$M_s = [(u - v)(r - c) + (u - r)(t - v)]\frac{p}{2}, \tag{11}$$

und das Moment in Schnitten s zwischen t und l

$$M_s = [(t - u)(c - r) + (c - u)(v - t)]\frac{p}{2}. \tag{12}$$

Für eine Anfangsöffnung mit Zwischengelenk ist $r = 0$, für eine Endöffnung mit Zwischengelenk $t = l$.

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. Für jeden Schnitt s zwischen den Schnitten 0 und l hat man nach 1) 2)

$$M_s = \frac{l-u}{l}\left[M + \sum_0^s Ke\right] + \frac{u}{l}\left[M' + \sum_s^l K(l-e)\right], \tag{13}$$

worin nach 4)

$$\left\{\begin{aligned} M &= -\left[\sum_t^l K(l-e) + \frac{l-t}{t-r}\sum_r^t K(e-r)\right]_{\mathfrak{v}},\\ M' &= -\left[\sum_0^r Ke + \frac{r}{t-r}\sum_r^t K(t-e)\right]_{\mathfrak{n}}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

wenn die Indices $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{n}$ andeuten, dass sich die Klammerausdrücke auf die Verhältnisse in der Oeffnung vor der betrachteten Oeffnung l und die Verhältnisse in der Oeffnung nach l beziehen. Soll wieder das von indirect wirkenden Lasten P herrührende Moment durch die P selbst ausgedrückt werden, so verwenden wir 3) 5) in 1) oder setzen in 13) 14) die Momente der P für diejenigen der K (§ 10) und erhalten

$$(15)\quad M_s = \frac{l-u}{l}\Big[M + \sum_0^c Pa\Big] + \Big(\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\Big)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ \frac{u}{l}\Big[M' + \sum_v^l P(l-a)\Big]$$

$$(16)\qquad \text{mit} \quad z = \frac{v-u}{cl - u(l-v+c)}\, cl$$

und den Stützenmomenten

$$(17)\quad \begin{cases} M = -\Big[\sum_t^l P(l-a) + \frac{l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r)\Big]_{\mathfrak{v}}, \\ M' = -\Big[\sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\Big]_{\mathfrak{n}}. \end{cases}$$

Auf Grund vorstehender Gleichungen ergibt sich folgendes Verfahren zur Verzeichnung der Influenzlinie von M_s (Fig. 235—237).

Man trage bei 0 und l bezw. $u = 00_1$ und $l - u = ll_1$ als Ordinaten an, ziehe eine Gerade von 0_1 aus durch l bis zum Schnitte r_1 des Perpendikels bei r in $l_{\mathfrak{n}}$ und eine andre von l_1 aus durch 0 bis zum Schnitte t_1 des Perpendikels bei t in $l_{\mathfrak{v}}$, errichte in l bei c, v Perpendikel bis zu den Schnitten c_1, v_1 mit $0\,l_1$ und $l\,0_1$ und verbinde durch Gerade in l die Punkte c_1, v_1, in $l_{\mathfrak{v}}$ die Punkte r, t_1, in $l_{\mathfrak{n}}$ die Punkte t, r_1; dann ist $r\,t_1\,c_1\,v_1\,r_1\,t$ die Influenzlinie für M_s. Lasten links des Punkts r in $l_{\mathfrak{v}}$ und rechts des Punktes t in $l_{\mathfrak{n}}$ sind ohne Einfluss.

Für eine zwischen den Punkten 0 und l auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit liefert 15) mit $P = pda$ oder die Influenzlinie wegen $B = pF$

$$(18)\qquad M_s = \big[u(l-c-v) + cv\big]\frac{p}{2} + \frac{l-u}{l}M + \frac{u}{l}M',$$

worin, wenn sich auch in $l_{\mathfrak{v}}$ von r bis l und in $l_{\mathfrak{n}}$ von 0 bis t irgendwelche gleichmässig vertheilte Lasten befinden, nach 6)

$$(19)\qquad M = -\Big[(l-r)(l-t)\frac{p}{2}\Big]_{\mathfrak{v}}, \qquad M' = -\Big[rt\frac{p}{2}\Big]_{\mathfrak{n}}.$$

Für eine Anfangsöffnung ohne Zwischengelenk ist $M = 0$, für eine Endöffnung ohne Zwischengelenk $M' = 0$.

Stützenreactionen. Beziehen sich Grössen und Ausdrücke mit den Indices 1, 2 auf die erste und zweite der fraglichen Stütze nachfolgende Oeffnung l_1 und l_2, solche mit den Indices a, b auf die

erste und zweite ihr vorhergehende Oeffnung l_a, l_b und bedeuten V, V' wie immer die Verticalreactionen gegen den Trägertheil zwischen den Schnitten 0 und l, dann ist die ganze Reaction einer beliebigen Stütze

$$R = V_a' + V_1.$$

Die Schnitte l der Oeffnung l_a und 0 der Oeffnung l_1 sind dabei zusammenfallend gedacht. Nach Einsetzen von § 8, 5) 6) wird

$$(20) \quad R = \frac{1}{l_a}\Big[M - M' + \sum_0^l Ke\Big]_a + \frac{1}{l_1}\Big[M' - M + \sum_0^l K(l-e)\Big]_1.$$

Da die Oeffnungen mit und ohne Zwischengelenke alterniren, so enthalten entweder l_1, l_b Zwischengelenke, l_2, l_a nicht, oder es besitzen l_2, l_a Zwischengelenke und l_1, l_b nicht. Die Stützenmomente sind, wie oben gezeigt, durch die Verhältnisse in den Oeffnungen mit Zwischengelenken bestimmt. Aus 20) mit 4) folgt wegen

$$M_a = M_b', \qquad M_a' = M_1,$$

für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(21) \quad R = \frac{1}{l_a}\sum_0^r K(l_a + e) + \frac{l_a + r}{t - r}\sum_r^t K(t-e)\Big]_1$$
$$+ \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^l Ke\Big]_a - \frac{1}{l_a}\Big[\frac{l-t}{t-r}\sum_r^t K(e-r) + \sum_t^l K(l-e)\Big]_b,$$

und wegen

$$M_1 = M_a', \qquad M_1' = M_2$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(22) \quad R = \frac{1}{l_1}\Big[\frac{l_1 + l - t}{t - r}\sum_r^t K(e-r) + \sum_t^l K(l_1 + l - e)\Big]_a$$
$$+ \frac{1}{l_1}\Big[\sum_0^l K(l-e)\Big]_1 - \frac{1}{l_1}\Big[\sum_0^r Ke + \frac{r}{t-r}\sum_r^t K(t-e)\Big]_2.$$

Rührt die Stützenreaction von indirect wirkenden Lasten P her, so darf man in vorstehenden Gleichungen die statischen Momente der P für diejenigen der K setzen, wonach für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(23)\quad R = \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^r P(l_a + a) + \frac{l_a + r}{t - r}\sum_r^t P(t - a)\Big]_1$$

$$+ \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^l P a\Big]_a - \frac{1}{l_a}\Big[\frac{l - t}{t - r}\sum_r^t P(a - r) + \sum_t^l P(l - a)\Big]_b,$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(24)\quad R = \frac{1}{l_1}\Big[\frac{l_1 + l - t}{t - r}\sum_r^t P(a - r) + \sum_t^l P(l_1 + l - a)\Big]_a$$

$$+ \frac{1}{l_1}\Big[\sum_0^l P(l - a)\Big]_1 - \frac{1}{l_1}\Big[\sum_0^r P a + \frac{r}{t - r}\sum_r^t P(t - a)\Big]_2.$$

Die Indices der Klammerausdrücke in 21) — 24) deuten an, auf welche Oeffnungen sich die nicht durch besondere Indices gekennzeichneten Grössen in den Klammern beziehen. Auf Grund der beiden letzten Formeln können wir aussprechen:

Um die Influenzlinie der Reaction R irgend einer Stütze zu erhalten (Fig. 238 u. 239), trage man bei derselben $P = 1$ als Ordinate an, ziehe durch deren Endpunkt und das entferntere Auflager der anliegenden Oeffnung ohne Zwischengelenk eine Gerade bis zu den Perpendikeln durch die links und rechts zunächst folgenden Zwischengelenke und verbinde die Durchschnittspunkte dieser Perpendikel mit den ausserhalb der Letzteren gelegenen Gelenken ihrer Oeffnungen. Die Lasten links und rechts dieser Gelenke sind ohne Einfluss.

Soll die Stützenreaction für Lasten bestimmt werden, welche mit p per Längeneinheit auf die ganze Länge je einer Oeffnung gleichmässig vertheilt sind und bedeutet F vorübergehend die Influenzfläche innerhalb einer Oeffnung, dann hat man mit Rücksicht auf Fig. 238 und 239 für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(25)\qquad R = (pF)_b + (pF)_a + (pF)_1,$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(26)\qquad R = (pF)_a + (pF)_1 + (pF)_2.$$

Setzt man die Werthe der F nach Fig. 238 und 239 mit Beachtung ihrer Vorzeichen ein, so folgt für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(27)\qquad R = \frac{(l_a + r_1)\,t_1 + l_a r_1}{2 l_a}\,p_1 + \frac{l_a}{2}\,p_a - \frac{(l_b - r_b)(l_b - t_b)}{2 l_a}\,p_b,$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$28)\qquad R = \frac{(l_1 + l_a - t_a)(l_a - r_a) + l_1(l_a - t_a)}{2l_1} p_a + \frac{l_1}{2} p_1 - \frac{r_2 t_2}{2 l_1} p_2,$$

und hieraus wenn p in den drei zu R beitragenden Oeffnungen von gleichem Werthe ist, für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(29)\qquad R = [(l_a + r_1)(l_a + t_1) - (l_b - r_b)(l_b - t_b)] \frac{p}{2l_a},$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(30)\qquad R = [(l_1 + l_a - r_a)(l_1 + l_a - t_a) - r_2 t_2] \frac{p}{2l_1}.$$

Für eine Anfangsstütze hat man in allen Ausdrücken der Stützenreactionen $l_a = l_b = 0$, für eine Endstütze $l_1 = l_2 = 0$, für eine erste Zwischenstütze $l_b = 0$, für eine letzte Zwischenstütze $l_2 = 0$.

In den zwei folgenden Paragraphen handelt es sich darum, die Grenzwerthe der M_s und R bei Einwirkung bewegter Lasten festzustellen. Wir setzen dabei voraus, dass alle Lasten K oder P zwischen den Endgelenken auf den Träger kommen und bei den Abscissen $0,\ r,\ t,\ l$ jeder Oeffnung Unterstützungspunkte der Fahrbahn liegen, in welchem Falle die Schnitte $0,\ r,\ t,\ l$ vertical geführt und alle Summengrenzen in obigen Gleichungen mit Ausnahme von s als Abscissen angesehen werden können. Mit den Grenzbeanspruchungen von M_s sind für Fachwerke einfachen Systems auch die Grenzbeanspruchungen der Stäbe bestimmt (§ 15).

§ 58. Gleichmässig vertheilte bewegte Last bei beliebigen Systemen.

Es seien $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{R}$ die Beiträge der festen Last zu M_s, R und p die bewegte Last per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Erstere lassen sich aus § 57 für alle Fälle entnehmen. Da die bewegte Last auf einer Strecke den Beitrag pF liefert, unter F die Influenzfläche der betreffenden Strecke verstanden, so ergeben sich die Grenzwerthe der M_s, R sehr leicht mit Hülfe der in § 57 bestimmten Influenzflächen, wie dies in § 12c allgemein besprochen und in § 24 für den gewöhnlichen Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern gezeigt wurde. Wir werden im Folgenden nur die Resultate anführen.

Oeffnungen mit Zwischengelenken. (Für eine Anfangsöffnung ist $r = 0$, für eine Endöffnung $t = l$). Der einfache Balkenträger zwischen den beiden Gelenken ist nach den Formeln des III. Abschnitts zu berechnen. Dagegen erhalten wir für Schnitte s zwischen 0 und r, wenn der Drehpunkt innerhalb der Strecke vr liegt (Fig. 230),

$$(1)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + (u-c)(u-v)\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s - (r-u)(t-u)\frac{p}{2},$$

und wenn u ausserhalb der Strecke vr liegt (Fig. 229, 231),

$$(2)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + [(u-v)(r-c) + (u-r)(t-v)]\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s.$$

Für Schnitte s zwischen t und l folgen, wenn u innerhalb der Strecke tc liegt (Fig. 233),

$$(3)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + (c-u)(v-u)\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s - (u-r)(u-t)\frac{p}{2},$$

und wenn u ausserhalb der Strecke vr liegt (Fig. 232, 234),

$$(4)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + [(t-u)(c-r) + (c-u)(v-t)]\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s.$$

Will man die feste Last innerhalb der betrachteten Oeffnung gleichmässig vertheilt und nur auf diejenigen Knotenpunkte wirkend annehmen, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so hat man nach § 57, 11) 12) für Schnitte s zwischen 0 und r

$$(5)\qquad \mathfrak{M}_s = [(u-v)(r-c) + (u-r)(t-v)]\frac{g}{2},$$

und für Schnitte s zwischen t und l

$$(6)\qquad \mathfrak{M}_s = [(t-u)(c-r) + (c-u)(v-t)]\frac{g}{2}.$$

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. (Für eine Anfangsöffnung ist $l_{\mathfrak{v}} = 0$, für eine Endöffnung $l_{\mathfrak{n}} = 0$). Beziehen sich Klammerausdrücke mit dem Index $\mathfrak{v}$ auf die Verhältnisse in der der betrachteten Oeffnung l unmittelbar vorhergehenden Oeffnung $l_{\mathfrak{v}}$, solche mit dem Index $\mathfrak{n}$ auf die Verhältnisse in der l unmittelbar folgenden Oeffnung $l_{\mathfrak{n}}$, so hat man mit

$$(7)\qquad N = \left[(l-r)(l-t)\frac{p}{2}\right]_{\mathfrak{v}}, \qquad N' = \left[rt\frac{p}{2}\right]_{\mathfrak{n}}$$

für Schnitte s zwischen den Schnitten 0 und l, wenn der Drehpunk u innerhalb der Oeffnung liegt (Fig. 236),

$$(8)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l-c-v) + cv]\frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s - \frac{l-u}{l}N - \frac{u}{l}N',$$

und wenn der Drehpunkt u ausserhalb l liegt (Fig. 235, 237),

$$(9)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{2l}(l-z)(l-v)p - \frac{l-u}{l}N, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{2l}czp - \frac{u}{l}N', \end{cases}$$

oder wenn die Abscisse

$$(10) \qquad z = \frac{v-u}{cl - u(l-v+c)}\, cl$$

des Grenzpunkts der posisiven und negativen Beitragsstrecken eingesetzt wird,

$$(11) \qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{u(c-u)(l-v)^2}{l(c-u)+u(v-c)} \dfrac{p}{2} - \dfrac{l-u}{l} N, \\ M_s = \mathfrak{M}_s - \dfrac{(l-u)(v-u)c^2}{l(c-u)+u(v-c)} \dfrac{p}{2} - \dfrac{u}{l} N'. \end{cases}$$

Soll die feste Last innerhalb der Oeffnungen l, l_v, l_n als gleichmässig vertheilt und in l nur auf diejenigen Knotenpunkte wirkend gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, dann hat man nach § 57, 18) 19)

$$(12) \qquad \mathfrak{M}_s = \Big[u(l-c-v)+cv\Big]\frac{g}{2} - \frac{l-u}{2l}\Big[(l-r)(l-t)g\Big]_v - \frac{u}{2l}\Big[r\,tg\Big]_n.$$

An Stelle von 9) oder 10) kann man etwas einfachere Näherungsformeln erhalten, wenn man in 9) einmal etwas zu klein $c = z$, das andre Mal etwas zu gross $z = v$ setzt (vergl. § 24), nämlich

$$(13) \qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{u}{2l}(l-c)(l-v)\,p - \dfrac{l-u}{l} N, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{l-u}{2l} c v p - \dfrac{u}{l} N'. \end{cases}$$

Bei bestimmtem p liefern diese Formeln zu ungünstige Grenzwerthe.

Stützenreactionen. (Für die Anfangsstütze ist $l_a = l_b = 0$, für die Endstütze $l_1 = l_2 = 0$, für die erste Zwischenstütze $l_b = 0$, für die letzte Zwischenstütze $l_2 = 0$.) Wenn sich Grössen vom Index a und b auf die erste und zweite der fraglichen Stütze vorangehende Oeffnung l_a und l_b, Grössen mit dem Index 1 und 2 auf die erste und zweite jener Stütze nachfolgende Oeffnung l_1 und l_2 beziehen, so hat man für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenke (Fig. 238)

$$(14) \qquad \begin{cases} R = \mathfrak{R} + \dfrac{(l_a+r_1)t_1 + l_a r_1}{2l_a} p_1 + \dfrac{l_a}{2} p_a, \\ R = \mathfrak{R} - \dfrac{(l_b-r_b)(l_b-t_b)}{2l_a} p_b, \end{cases}$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk (Fig. 239)

$$(15) \qquad \begin{cases} R = \mathfrak{R} + \dfrac{(l_1+l_a-t_a)(l_a-r_a) + l_1(l_a-t_a)}{2l_1} p_a + \dfrac{l_1}{2} p_1, \\ R = \mathfrak{R} - \dfrac{r_2 t_2}{2l_1} . p_2 . \end{cases}$$

Werden die p der drei zu R beitragenden Oeffnungen gleich gross angenommen, dann folgt für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(16)\qquad \begin{cases} R = \mathfrak{R} + (l_a + r_1)(l_a + t_1)\,\dfrac{p}{2\,l_a}, \\ R = \mathfrak{R} - (l_b - r_b)(l_b - t_b)\,\dfrac{p}{2\,l_a}, \end{cases}$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(17)\qquad \begin{cases} R = \mathfrak{R} + (l_1 + l_a - r_a)(l_1 + l_a - t_a)\,\dfrac{p}{2\,l_1}, \\ R = \mathfrak{R} - \dfrac{r_2\,t_2}{2\,l_1}\,p. \end{cases}$$

Will man die feste Last innerhalb jeder Oeffnung als gleichmässig vertheilt ansehen, so liefern § 57, 27) 28) für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(18)\qquad \mathfrak{R} = \frac{(l_a + r_1)\,t_1 + l_a\,r_1}{2\,l_a}\,g_1 + \frac{l_a}{2}\,g_a - \frac{(l_b - r_b)(l_b - t_b)}{2\,l_a}\,g_b,$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(19)\qquad \mathfrak{R} = \frac{(l_1 + l_a - t_a)(l_a - r_a) + l_1\,(l_a - t_a)}{2\,l_1}\,g_a + \frac{l_1}{2}\,g_1 - \frac{r_2\,t_2}{2\,l_1}\,g_2.$$

Werden die g der drei zu R beitragenden Oeffnungen gleich gross angenommen, so folgt für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk

$$(20)\qquad \mathfrak{R} = [(l_a + r_1)(l_a + t_1) - (l_b - r_b)(l_b - t_b)]\,\frac{g}{2\,l_a},$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk

$$(21)\qquad \mathfrak{R} = [(l_1 + l_a - r_a)(l_1 + l_a - t_a) - r_2\,t_2]\,\frac{g}{2\,l_1}.$$

§ 59. **Bewegte Radlastzüge bei beliebigen Systemen.**

Für die Beiträge $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{R}$ der festen Last zu M_s, R gilt alles in § 58 Gesagte. In den nachfolgenden Gleichungen beziehen sich die $\sum$ nur auf die bewegte Last. Die Ableitung der Grenzwerthe erfolgt (wie in § 25 beim gewöhnlichen Balkenträger) für verschiedene mögliche Lastsysteme auf dem Träger nach Anleitung von § 12 b, worauf die Bedingungen für die ungünstigsten Stellungen bestimmter Lastsysteme nach § 12 a gegeben werden. Mit Hülfe dieser Bedingungen könnten auch die nach dem ersteren Verfahren erhaltenen Laststellungen controlirt und eventuell corrigirt werden, was jedoch praktisch im Allgemeinen nicht nöthig sein wird.

Oeffnungen mit Zwischengelenken. (Für eine Anfangsöffnung ist $r = 0$, für eine Endöffnung $t = l$). Der einfache Balkenträger zwischen den beiden Gelenken ist nach den Formeln des III. Abschnitts zu berechnen.

Für Schnitte s zwischen 0 und r hat man nach § 57, 9) bei beliebiger Belastung

$$(1)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u-v}{v-c}\sum_c^v P(a-c) + \sum_v^r P(u-a)$$
$$+ \frac{u-r}{t-r}\sum_r^t P(t-a).$$

Auf Grund dieser Gleichung und der in § 57 ermittelten Influenzlinien ergeben sich die Grenzwerthe von M_s bei verschiedenen möglichen Lastsystemen wie folgt. Wenn der Drehpunkt u innerhalb der Strecke vr liegt (Fig. 230):

Belastung durch Zug I von c bis u, Rad O bei v,

$$(2)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u-v}{v-c}\sum_c^v P(a-c) + \sum_v^u P(u-a),$$

Belastung durch Zug I von u bis t, Rad O bei r,

$$(3)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s - \sum_u^r P(a-u) - \frac{r-u}{t-r}\sum_r^t P(t-a);$$

wenn der Drehpunkt u ausserhalb der Strecke vr liegt (Fig. 229 u. 231):

Belastung durch Zug I von c bis t, Rad O bei v für $u > r$, bei r für $u < v$, M_s nach 1),

Belastung durch die feste Last allein, $M_s = \mathfrak{M}_s$.

Für Schnitte s zwischen t und l hat man nach § 57, 10) bei jeder Belastung

$$(4)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{t-u}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^c P(a-u)$$
$$+ \frac{c-u}{v-c}\sum_c^v P(v-a).$$

Die Grenzwerthe von M_s bei verschiedenen möglichen Lastsystemen ergeben sich hieraus mit Rücksicht auf die Influenzlinien des § 57

wie folgt. Wenn der Drehpunkt u innerhalb der Strecke tc liegt (Fig. 233):

Belastung durch Zug I von u bis v, Rad O bei c,

$$(5)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \sum_u^c P(a-u) + \frac{c-u}{v-c}\sum_c^v P(v-a),$$

Belastung durch Zug I von r bis u, Rad O bei t,

$$(6)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s - \frac{u-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) - \sum_t^u P(u-a);$$

wenn der Drehpunkt u ausserhalb der Strecke tc liegt (Fig. 232 u. 234):

Belastung durch Zug I von r bis v, Rad O bei t für $u > c$, bei c für $u < t$, M_s nach 4),

Belastung durch die feste Last allein, $M_s = \mathfrak{M}_s$.

Bewegt sich ein bestimmtes Lastsystem auf dem Träger, so ergibt sich die Aenderung des Moments M_s durch eine Verschiebung um da für Schnitte s zwischen 0 und r nach 1)

$$(7)\qquad dM_s = \left(\frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P + \frac{t-u}{t-r}\sum_r^t P - \sum_c^t P\right) da,$$

und für Schnitte s zwischen t und l nach 4)

$$(8)\qquad dM_s = \left(\sum_r^v P - \frac{u-r}{t-r}\sum_r^t P - \frac{v-u}{v-c}\sum_c^v P\right) da.$$

Daher hat man als Bedingung für Maxima und Minima von M_s, wenn s zwischen 0 und r liegt,

$$(9)\qquad \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P + \frac{t-u}{t-r}\sum_r^t P = \sum_c^t P,$$

und wenn s zwischen t und l liegt,

$$(10)\qquad \frac{u-r}{t-r}\sum_r^t P + \frac{v-u}{v-c}\sum_c^v P = \sum_r^v P.$$

In diesen Gleichungen beziehen sich die Summen rechts auf alle Strecken, deren Belastung einen Einfluss auf M_s ausübt (Fig. 229 bis 234). Das Maximum oder Minimum tritt bei derjenigen Stellung ein, für welche die Summe links den Werth rechts durchschreitet.

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. (Für eine Anfangsöffnung ist $l_v = 0$, für eine Endöffnung $l_n = 0$). Beziehen sich Klammerausdrücke

mit dem Index $\mathfrak{v}$ auf die Verhältnisse in der einer betrachteten Oeffnung l vorhergehenden Oeffnung $l_{\mathfrak{v}}$, solche mit dem Index $\mathfrak{n}$ auf die Verhältnisse in der l nachfolgenden Oeffnung $l_{\mathfrak{n}}$, so hat man für Schnitte s zwischen 0 und l nach § 57, 15)—17)

$$(11)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\left[\sum_0^c Pa - N\right] + \left[\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right]\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ \frac{u}{l}\left[\sum_v^l P(l-a) - N'\right],$$

worin

$$(12)\qquad \begin{cases} N = \left[\frac{l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^l P(l-a)\right]_{\mathfrak{v}}, \\ N' = \left[\sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\right]_{\mathfrak{n}}, \end{cases}$$

$$(13)\qquad z = \frac{v-u}{cl-u(l-v+c)}\,cl.$$

Mit Rücksicht auf die in § 57 bestimmten Influenzlinien erhält man hiernach die Grenzwerthe von M_s bei verschiedenen möglichen Lastsystemen wie folgt. Wenn der Drehpunkt u innerhalb der Spannweite l liegt (Fig. 236):

Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei c für $z > v$ bei v für $z < c$,

$$(14)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a),$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug I in $l_{\mathfrak{n}}$, Rad O bei r,

$$(15)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s - \frac{l-u}{l}N - \frac{u}{l}N';$$

wenn der Drehpunkt u ausserhalb der Spannweite l liegt (Fig. 235 u. 237):

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug II in l von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(16)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a) - \frac{l-u}{l}N,$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{n}}$, Rad O bei r, und einen Zug II in l von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa - \frac{u}{l} N'. \tag{17}$$

Bezüglich der Fälle, für welche hier Belastung der Oeffnung l durch Zug II vorgesehen wurde, lässt sich Analoges wie am Schlusse des § 25 sagen. Es kann also unter Umständen auch hier Zug I noch etwas ungünstiger wirken und insbesondere dann, wenn $c = 0$ oder $v = l$ ist, sodass für einen Grenzwerth die Oeffnung l gar keine Verkehrslast erhält. Will man darauf Rücksicht nehmen, so ist von der Formel 11) für beliebige Belastung oder von den entsprechenden Formeln für bestimmte Trägersysteme auszugehen.

Bewegt sich ein bestimmtes Lastsystem auf dem Träger, so erzeugt jede Verschiebung desselben um da eine Aenderung dM_s des Moments, für welche nach 11) 12)

$$\frac{dM_s}{da} = \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{u}{l}\sum_0^l P \tag{18}$$

$$+ \frac{l-u}{l}\left[\sum_r^l P - \frac{l-r}{t-r}\sum_r^t\right]_{\mathfrak{v}} - \frac{u}{l}\left[\sum_0^t P - \frac{t}{t-r}\sum_r^t P\right]_{\mathfrak{n}}.$$

Für Maxima und Minima von M_s ist die rechte Seite dieser Formel gleich Null zu setzen. Da indessen die Lasten in $l_{\mathfrak{v}}$ und $l_{\mathfrak{n}}$ stets in entgegengesetztem Sinne zu M_s beitragen wie diejenigen auf den angrenzenden Strecken in l, so wird man, wenn angängig, in den einzeln Oeffnungen getrennte Lastsysteme verwenden und für sich placiren. Gleichung 18) liefert für Verschiebungen da eines Lastsystems in l

$$dM_s = \left(\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{u}{l}\sum_0^l P\right) da, \tag{19}$$

für Verschiebungen da eines Lastsystems in $l_{\mathfrak{v}}$

$$dM_s = \frac{l-u}{l}\left(\sum_r^l P - \frac{l-r}{t-r}\sum_r^t P\right)_{\mathfrak{v}} da, \tag{20}$$

und für Verschiebungen da eines Lastsvstems in $l_{\mathfrak{n}}$

$$dM_s = \frac{u}{l}\left(\frac{t}{t-r}\sum_r^t P - \sum_0^t P\right)_{\mathfrak{n}} da. \tag{21}$$

Für die Stellungen, welchen Maxima und Minima der betreffenden

Beiträge entsprechen, müssen die Klammerausdrücke 19), 20) oder 21) gleich Null sein, womit den Gleichungen 9) 10) analoge Bedingungen entstehen.

Stützenreactionen. (Für die Anfangsstütze ist $l_a = l_b = 0$, für die Endstütze $l_1 = l_2 = 0$, für die erste Zwischenstütze $l_b = 0$, für die letzte Zwischenstütze $l_2 = 0$). Im Folgenden deuten die Indices a, b und 1, 2 der Klammerausdrücke an, dass sich die nicht durch besondere Indices gekennzeichneten Grössen in den Klammern auf die erste und zweite der fraglichen Stütze vorhergehende Oeffnung bezw. die erste und zweite ihr nachfolgende Oeffnung beziehen.

Für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk hat man nach § 57, 23) bei beliebiger Belastung

$$(22)\quad R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^r P(l_a + a) + \frac{l_a + r}{t - r}\sum_r^t P(t-a)\Big]_1 + \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^l Pa\Big]_a - \frac{1}{l_a}\Big[\frac{l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^l P(l-a)\Big]_b$$

Hiernach ergeben sich mit Rücksicht auf die Influenzlinie Fig. 238 folgende Grenzwerthe.

Belastung durch einen Zug I in l_a und l_1, Rad O bei r in l_1 (für eine Endstütze Belastung der Oeffnung l_a durch Zug II, Vorderrad O bei l),

$$(23)\quad R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^r P(l_a+a) + \frac{l_a+r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\Big]_1 + \frac{1}{l_a}\Big[\sum_0^l Pa\Big]_a,$$

Belastung durch einen Zug I in l_b, Rad O bei t,

$$(24)\quad R = \mathfrak{R} - \frac{1}{l_a}\Big[\frac{l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^l P(l-a)\Big]_b.$$

Für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk ergibt § 57, 24) bei beliebiger Belastung

$$(25)\quad R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_1}\Big[\frac{l_1+l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^l P(l_1+l-a)\Big]_a + \frac{1}{l_1}\Big[\sum_0^l P(l-a)\Big]_1 - \frac{1}{l_1}\Big[\sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\Big]_2.$$

Mit Rücksicht auf die Influenzlinie Fig. 239 ergeben sich hiernach die Grenzwerthe wie folgt.

Belastung durch einen Zug I in l_a und l_1, Rad O bei t in l_a (für eine Anfangsstütze Belastung der Oeffnung l_1 durch Zug II, Rad O bei 0),

$$(26)\qquad R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_1}\left[\frac{l_1+l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^l P(l_1+l-a)\right]_a$$
$$+ \frac{1}{l_1}\left[\sum_0^l P(l-a)\right]_1,$$

Belastung durch einen Zug I in l_2, Rad O bei r,

$$(27)\qquad R = \mathfrak{R} - \frac{1}{l_1}\left[\sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\right]_2.$$

Bewegt sich ein bestimmtes Lastsystem auf dem Träger, so bewirkt jede Verschiebung um da eine Aenderung dR von R, welche nach 22) 25) wie folgt bestimmt ist. Für l_1 mit oder l_a ohne Zwischengelenk:

$$(28)\qquad \frac{dR}{da}l_a = \left(\sum_0^t P - \frac{l_a+t}{t-r}\sum_r^t P\right)_1 + \left(\sum_0^l P\right)_a$$
$$- \left(\frac{l-r}{t-r}\sum_r^t P - \sum_r^l P\right)_b,$$

wofür wir auch schreiben können

$$(29)\qquad \frac{dR}{da}l_a = \sum_{r_b}^{t_1} P - \left(\frac{l-r}{t-r}\sum_r^t P\right)_b - \left(\frac{l_a+t}{t-r}\sum_r^t P\right)_1;$$

für l_1 ohne oder l_a mit Zwischengelenk:

$$(30)\qquad \frac{dR}{da}l_1 = \left(\frac{l_1+l-r}{t-r}\sum_r^t P - \sum_r^l P\right)_a - \left(\sum_0^l P\right)_1$$
$$- \left(\sum_0^t P - \frac{t}{t-r}\sum_r^t P\right)_2,$$

das heisst auch

$$(31)\qquad \frac{dR}{da}l_1 = \left(\frac{l_1+l-r}{t-r}\sum_r^t P\right)_a + \left(\frac{t}{t-r}\sum_r^t P\right)_2 - \sum_{r_a}^{t_2} P.$$

Für die Stellungen, welchen Maxima und Minima von R entsprechen, müssen in diesen Gleichungen die Ausdrücke rechts gleich Null sein, womit den Gleichungen 9) 10) analoge Bedingungen entstehen. Die erste Summe rechts in 29) und die letzte Summe rechts in 31) beziehen

sich auf alle Strecken, deren Belastung einen Einfluss auf R ausübt (Fig. 238 u. 239). Da nicht alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu R beitragen, so würden bei Anwendung von 28) 29) wenn angängig Lastsysteme zu wählen sein, von welchen sich das eine möglichst nur auf l_a und l_1, das andere nur auf l_2 erstreckt (Fig. 238), bei Anwendung von 30) 31) aber Systeme, von welchen das eine möglichst auf l_a und l_1, das andre auf l_b beschränkt ist (Fig. 239), wie dies auch oben für verschiedene mögliche Lastsysteme angenommen wurde.

§ 60. **Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Allgemeines.**

Die Spannweite l einer betrachteten Oeffnung sei durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale. Die l begrenzenden Auflager können gleich oder verschieden hoch liegen. Für alle Arten solcher Träger wurden schon in §§ 16, 18 Gleichungen für die Stabkräfte gegeben, welche sich für den vorliegenden Fall leicht spezialisiren lassen.

Eine Diagonale kann nach der Seite von 0 hin ansteigen oder abfallen. Diejenige Gurtung, welche man der Diagonale m nach der Seite von 0 hin folgend trifft, nannten wir X-Gurtung, die andere Z-Gurtung. Ausserdem wurden die in Fig. 69 und 70 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt, sodass x_m, z_m, d_m, h_m die Längen derjenigen Stäbe bedeuten, welche durch X_m, Z_m, D_m, V_m beansprucht sind. Unter diesen Voraussetzungen gelten in allen das angenommene Trägersystem betreffenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender X-Gurtung. Wir fanden in § 16 wenn sich das Moment M_s der äussern Kräfte für X_m, Z_m, D_m auf einen Schnitt s durch die Stäbe x_m, z_m, d_m, für V_m auf einen Schnitt s durch x_m, h_m, z_{m+1} bezieht,

$$(1)\qquad X_m = \mp M_s \frac{x_m}{\lambda h_m}, \quad \text{Abscisse des Drehpunkts } u = m\lambda,$$

$$(2)\qquad Z_m = \pm M_s \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \quad \text{„ „ „ } u = (m-1)\lambda,$$

$$(3)\qquad D_m = \mp M_s \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \quad \text{„ „ „ } u = (m-\varepsilon)\lambda,$$

$$(4)\qquad V_m = \pm M_s \frac{1}{\nu \lambda}, \quad \text{„ „ „ } u = (m-\nu)\lambda.$$

Hierin hat man nach § 16

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} \tag{5}$$

und wenn $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ die Ordinaten der Knotenpunkte m in X-Gurtung und Z-Gurtung bezeichnen,

$$v = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}}, \tag{6}$$

(7) speziell bei horizontaler X-Gurtung: $v = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m}$,

(8) „ „ Z-Gurtung: $v = \varepsilon$,

(9) „ symmetrischen Gurtungen: $v = \frac{2h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}}$,

unter symmetrischen Gurtungen solche verstanden, welche zu einer beliebigen Horizontalen symmetrisch liegen.

Die bisherigen Gleichungen gelten für beliebig gerichtete Activkräfte. Setzen wir nun lediglich verticale Activkräfte (Lasten) voraus, so bestehen nach § 18, 2) mit $H = 0$ die Beziehnungen

$$\left\{\begin{aligned}
X_m &= \mp [(n-m)(M+S) + m(M'+S')] \frac{x_m}{l h_m}, \\
Z_m &= \pm [(n-m+1)(M+S) + (m-1)(M'+S')] \frac{z_m}{l h_{m-1}}, \\
D_m &= \mp [(n-m+\varepsilon)(M+S) + (m-\varepsilon)(M'+S')] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \\
V_m &= \pm [(n-m+v)(M+S) + (m-v)(M'+S')] \frac{1}{v l}.
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

worin M, $M_{,}$ die Momente der äusseren Kräfte links verticaler Schnitte unmittelbar rechts von Auflager 0 und links von Auflager l in Hinsicht dieser Auflager, S das Moment der Knotenpunktslasten zwischen den Schnitten 0 und s in Hinsicht des Auflagers 0, S' das Moment der Knotenpunktslasten zwischen den Schnitten s und l in Hinsicht des Auflagers l. Diese Grössen sind in § 57 für alle Fälle ausgedrückt. Nach § 18, 3) 4) hat man für jede bestimmte Belastung weiter

$$\frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_m}{z_m} + \frac{D_m}{d_m} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{X_m}{x_m} + \frac{Z_{m+1}}{z_{m+1}} = 0, \tag{12}$$

und endlich sind nun die M_s und ihre Grenzwerthe durch die Gleichungen der §§ 57—59 bestimmt.

Die Höhenlage der Fahrbahn ist ohne Einfluss auf die Beanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen, wohl aber von Einfluss auf die Beanspruchungen der Verticalen. Bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Verticalen, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so haben wir:

für X_m, Z_m, D_m

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \tag{13}$$

für V_m, wenn die Fahrbahnlast angreift

a) im Knotenpunkte m der X-Gurtung,

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \tag{14}$$

b) im Knotenpunkt m der Z-Gurtung,

$$c = m\lambda, \qquad v = (m+1)\lambda. \tag{15}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung gerade so zu berechnen, als ob die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angriffe, das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung ebenso, als wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angriffe.

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Oeffnung l angenommen und bezeichnen g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ aber die vom Eigengewicht allein herrührenden Werthe von M, M', dann hat man nach § 18, 10) mit $\mathfrak{H} = 0$ die Beanspruchungen der Stäbe durch das Eigengewicht allein

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X}_m &= \mp\left[m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\mathfrak{M} + m\mathfrak{M}'\right]\frac{x_m}{lh_m},\\
\mathfrak{Z}_m &= \pm\left[(m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+1)\mathfrak{M}\right.\\
&\qquad\qquad\left. + (m-1)\mathfrak{M}'\right]\frac{z_m}{lh_{m-1}},\\
\mathfrak{D}_m &= \mp\left[\varepsilon\left(m\frac{n-m}{\varepsilon} - n + 2m - 1\right)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+\varepsilon)\mathfrak{M}\right.\\
&\qquad\qquad\left. + (m-\varepsilon)\mathfrak{M}'\right]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},\\
\mathfrak{V}_m &= \pm\left[\nu\left(m\frac{n-m}{\nu} - n + 2m - \frac{g_x - g_z}{g}\right)\frac{gl^2}{2n}\right.\\
&\qquad\qquad\left. + (n-m+\nu)\mathfrak{M} + (m-\nu)\mathfrak{M}'\right]\frac{1}{\nu l}.
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist das Eigengewicht der Fahrbahn einzurechnen bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x, bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_z. Soll das Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so ist analog wie in § 31 zu verfahren ($g_x = g$, $g_z = 0$ oder $g_x = 0$, $g_z = g$).

Alle bis jetzt angeführten Formeln gelten nicht nur für continuirliche Gelenkfachwerke, sondern für beliebige Balkenfachwerke des angenommenen Systems. Dabei ist zugelassen, dass die Stellung der Diagonalen in verschiedenen Feldern verschieden ist, die X-Gurtung also bald oben, bald unten liegt. Nur die Formeln für V_m, $\mathfrak{V}_m$ sind im Allgemeinen an die Voraussetzung gebunden, dass sich zu beiden Seiten der Verticale m Felder von gleicher Länge λ mit Diagonalen gleicher Stellung befinden, wobei jedoch die Diagonale auch mit einem Gurtungsstabe zusammen fallen kann (Fig. 72, 73). Drücken wir nun noch die Eigengewichtsbeanspruchungen speziell für continuirliche Gelenkträger aus.

Oeffnungen mit Zwischengelenken. Es seien die Abscissen der Gelenkpunkte

$$r = \varrho\lambda, \qquad t = \tau\lambda, \tag{17}$$

dann hat man nach § 57, 6)

$$\mathfrak{M} = -\varrho\tau\frac{g\lambda^2}{2}, \qquad \mathfrak{M}' = -(n-\varrho)(n-\tau)\frac{g\lambda^2}{2}, \tag{18}$$

und mit diesen Werthen nach obigen Gleichungen 16)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X}_m &= \pm(\varrho-m)(\tau-m)\frac{x_m}{h_m}\frac{g\lambda}{2},\\
\mathfrak{Z}_m &= \mp(\varrho-m+1)(\tau-m+1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2},\\
\mathfrak{D}_m &= \pm\left[\varrho+\tau-2m+1+\frac{(\varrho-m)(\tau-m)}{\varepsilon}\right]\frac{d_m}{h_{m-1}}\frac{g\lambda}{2},\\
\mathfrak{V}_m &= \mp\left[\varrho+\tau-2m+\frac{g_x-g_z}{g}+\frac{(\varrho-m)(\tau-m)}{\nu}\right]\frac{g\lambda}{2}.
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Die für die Grenzbeanspruchungen nothwendige Unterscheidung der Strecken $0r$, rt, tl kann also für die Eigengewichtsbeanspruchungen unterbleiben. Für eine Anfangsöffnung mit Zwischengelenk ist $\varrho = 0$, für eine Endöffnung mit Zwischengelenk $\tau = n$.

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. Nach § 57, 6) hat man, wenn sich Klammerausdrücke mit dem Index $\mathfrak{v}$ auf die l unmittelbar vor-

hergehende Oeffnung, solche mit dem Index $\mathfrak{n}$ auf die l unmittelbar folgende Oeffnung beziehen,

$$(20) \qquad \mathfrak{M} = -\left[(l-r)(l-t)\frac{g}{2}\right]_{\mathfrak{v}}, \qquad \mathfrak{M}' = -\left[rt\frac{g}{2}\right]_{\mathfrak{n}},$$

und speziell wenn die Feldlängen in $l_{\mathfrak{v}}$ und $l_{\mathfrak{n}}$ gleich λ wie in l sind

$$(21) \qquad \mathfrak{M} = -\frac{\lambda^2}{2}\left[(n-\varrho)(n-\tau)g\right]_{\mathfrak{v}}, \qquad \mathfrak{M}' = -\frac{\lambda^2}{2}\left[\varrho\tau g\right]_{\mathfrak{n}}.$$

Mit diesen Werthen gelten die Gleichungen 16). Für eine Anfangsöffnung ohne Zwischengelenk ist $\mathfrak{M} = 0$, für eine Endöffnung ohne Zwischengelenk $\mathfrak{M}' = 0$.

§ 61. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die Grenzwerthe der Stabkräfte ergeben sich aus § 60, 1) — 4) durch Einsetzen der in § 58 ausgedrückten Grenzwerthe von M_s, wobei die Werthe § 60, 13) — 15) von c, u zu berücksichtigen sind. Ganz analog wurde schon in § 32 beim gewöhnlichen Balkenträger verfahren. Wie dort können die Ausdrücke für die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder je nach der Form des Trägers und damit der Lage des Drehpunkts u (oder der Werthe von $m-\varepsilon$, $m-\nu$) verschieden ausfallen. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ lassen sich aus § 60 entnehmen. Für die Grenzwerthe der Stützenreactionen gelten die Formeln des § 58.

Oeffnungen mit Zwischengelenken. (Für eine Anfangsöffnung ist $\varrho = 0$, für eine Endöffnung $\tau = n$). Das einfache Balkenfachwerk zwischen den beiden Gelenken ist nach den Formeln des III. Abschnitts zu berechnen (doch gelten für die Gurtungen auch die folgenden Formeln), wir beschränken uns auf die Stäbe vor dem ersten Gelenke bei $r = \varrho\lambda$ und nach dem zweiten Gelenke bei $t = \tau\lambda$. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen erhält man allgemein

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm (\varrho - m)(\tau - m)\frac{x_m}{h_m}\frac{p\lambda}{2}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp (\varrho - m + 1)(\tau - m + 1)\frac{z_m}{h_{m-1}}\frac{p\lambda}{2}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m;$$

dagegen die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m-\varepsilon$ für $m < \varrho$ zwischen m und ϱ oder für $m > \tau$ zwischen τ und $m-1$ liegt,

$$(3)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm (1-\varepsilon)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp (m-\varepsilon-\varrho)(\tau+\varepsilon-m)\dfrac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \end{cases}$$

und wenn $m-\varepsilon$ für $m<\varrho$ nicht zwischen m und ϱ oder für $m>\tau$ nicht zwischen τ und $m-1$ liegt,

$$(4)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[\varrho+\tau-2m+1+\dfrac{(\varrho-m)(\tau-m)}{\varepsilon}\right]\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m. \end{cases}$$

Für die Grenzbeanspruchungen der Verticalen kommt wie immer die Lage der Fahrbahn in Betracht. Liegt $m-\nu$ für $m<\varrho$ zwischen m und ϱ oder für $m>\tau$ zwischen τ und $m-1$, so hat man:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(5)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (1-\nu)\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm (m-\nu-\varrho)(\tau+\nu-m)\dfrac{p\lambda}{2\nu}, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(6)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm (\nu+1)\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm (m-\nu-\varrho)(\tau+\nu-m)\dfrac{p\lambda}{2\nu}. \end{cases}$$

Liegt $m-\nu$ für $m<\varrho$ nicht zwischen m und ϱ oder für $m>\tau$ nicht zwischen τ und $m-1$, dann folgen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(7)\quad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[\varrho+\tau-2m+1+\frac{(\varrho-m)(\tau-m)}{\nu}\right]\frac{p\lambda}{2}, \quad V_m = \mathfrak{V}_m,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(8)\quad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[\varrho+\tau-2m-1+\frac{(\varrho-m)(\tau-m)}{\nu}\right]\frac{p\lambda}{2}, \quad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Gleichungen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Gleichungen b).

Wird wie gewöhnlich das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Oeffnung l angenommen, dann folgen

aus 1) 2) 4) mit § 60, 19) die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen

$$(9) \qquad X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m,$$

und wenn $m-\varepsilon$ für $m<\varrho$ nicht zwischen m und ϱ oder für $m>\tau$ nicht zwischen τ und $m-1$ liegt, die oberen Grenzbeanspruchungen der Diagonale m

$$(10) \qquad D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m.$$

Will man sich das gleichmässig vertheilte Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte wirkend denken, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so hat man nach 7) 8) mit § 60, 19), wenn $m-\nu$ für $m<\varrho$ nicht zwischen m und ϱ oder für $m>\tau$ nicht zwischen τ und $m-1$ liegt, die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticale m

$$(11) \qquad V_m = \frac{q}{g}\mathfrak{V}_m.$$

In allen diesen Fällen treten die unteren Grenzbeanspruchungen für Eigengewicht allein ein.

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. (Für eine Anfangsöffnung ist $N=0$, für eine Endöffnung $N'=0$). Beziehen sich in

$$(12) \qquad N = \left[(l-r)(l-t)\frac{p}{2}\right]_v, \qquad N' = \left[rt\frac{p}{2}\right]_n$$

die Ausdrücke rechts auf die der betrachteten Oeffnung l vorangehende und nachfolgende Oeffnung, so folgen in der oben angeführten Weise die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung

$$(13) \qquad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m \pm [(n-m)N + mN']\dfrac{x_m}{lh_m}, \end{cases}$$

und diejenigen der Z-Gurtung

$$(14) \qquad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1)(n-m+1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp [(n-m+1)N + (m-1)N']\dfrac{z_m}{lh_{m-1}}. \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen ergeben sich, wenn $m-\varepsilon$ zwischen 0 und n liegt,

$$(15)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[n - 2m + 1 - \frac{m(n-m)}{\varepsilon}\right] \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[(n - m + \varepsilon) N + (m - \varepsilon) N\right] \frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}, \end{cases}$$

und wenn $m - \varepsilon$ nicht zwischen 0 und n liegt,

$$(16)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[\frac{(\varepsilon - m)(\varepsilon - 1)(n-m)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m} \frac{p\lambda}{2} + \frac{\varepsilon - m + n}{l} N\right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[\frac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m} \frac{p\lambda}{2} + \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon l} N'\right] \frac{d_m}{h_{m-1}}. \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen der Verticalen sind von der Lage der Fahrbahn abhängig.

Liegt $m - \nu$ zwischen 0 und n, so hat man:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(17)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[n - 2m + 1 - \frac{m(n-m)}{\nu}\right] \frac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[(n - m + \nu) N + (m - \nu) N'\right] \frac{1}{\nu l}, \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(18)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[n - 2m - 1 - \frac{m(n-m)}{\nu}\right] \frac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[(n - m + \nu) N + (m - \nu) N'\right] \frac{1}{\nu l}. \end{cases}$$

Liegt $m - \nu$ nicht zwischen 0 und n, dann folgen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(19)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[\frac{(\nu - m)(\nu - 1)(n-m)^2}{(n-1)\nu - n + m} \frac{p\lambda}{2} + \frac{\nu - m + n}{l} N\right] \frac{1}{\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\frac{(\nu - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\nu - n + m} \frac{p\lambda}{2} + \frac{\nu - m}{\nu l} N'\right], \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(20)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[\frac{(\nu - m)(n - m - 1)^2}{(n-1)\nu + m} \frac{p\lambda}{2} + \frac{\nu - m + n}{\nu l} N\right], \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\frac{(\nu - m + n)(\nu + 1)m^2}{(n-1)\nu + m} \frac{p\lambda}{2} + \frac{\nu - m}{l} N'\right] \frac{1}{\nu}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die

Gleichungen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Gleichungen b).

Näherungsformeln. (Vorausbestimmte Knotenpunktslasten). Werden für Oeffnungen ohne Zwischengelenke anstatt der genauen Formeln § 58, 11) für die Grenzwerthe von M, die Näherungsformeln § 58, 13 verwendet, so erhält man an Stelle der Formeln 16)

$$(21)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[(n-m)(n-m+1)(\varepsilon-m)\frac{p\lambda}{2} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\varepsilon-m+n}{\lambda} N\right] \frac{d_m}{n\varepsilon h_{m-1}}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[m(m-1)(\varepsilon-m+n)\frac{p\lambda}{2} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\varepsilon-m}{\lambda} N'\right] \frac{d_m}{n\varepsilon h_{m-1}}, \end{cases}$$

an Stelle der Formeln 19)

$$(22)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[(n-m)(n-m+1)(\nu-m)\frac{p\lambda}{2} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\nu-m+n}{\lambda} N\right] \frac{1}{n\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[m(m-1)(\nu-m+n)\frac{p\lambda}{2} + \frac{\nu-m}{\lambda} N'\right] \frac{1}{n\nu}, \end{cases}$$

und an Stelle der Formeln 20),

$$(23)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[(n-m)(n-m-1)(\nu-m)\frac{p\lambda}{2} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\nu-m+n}{\lambda} N\right] \frac{1}{n\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[m(m+1)(\nu-m+n)\frac{p\lambda}{2} + \frac{\nu-m}{\lambda} N'\right] \frac{1}{n\nu}. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen und der ungeändert gebliebenen ergeben sich dieselben Grenzwerthe, welche auf Grund vorausbestimmter Knotenpunktslasten $q\lambda$ und $g\lambda$ erhalten würden (§ 12 d).

Alle für Oeffnnngen ohne Zwischengelenke erhaltenen Formeln gehen mit $N = N' = 0$ in die entsprechenden Formeln des § 29 für einfache Balkenträger über. — (Beispiele 75, 78, 82.)

§ 62. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Bewegte Radlastzüge.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ lassen sich aus § 56 entnehmen. Die Stabkräfte für be-

liebige Belastung der Fahrbahn und ihre Grenzwerthe für bewegte Radlastzüge folgen aus § 60, 1) — 4) mit den in § 55 ausgedrückten Grenzwerthen der Momente M_t, wobei die Werthe § 60, 13) — 15) von c, v zu berücksichtigen sind. Ganz analog wurde in § 33 beim gewöhnlichen Balkenträger verfahren. Wie dort und im vorigen Paragraphen können die Ausdrücke für die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder je nach der Form des Trägers und damit der Lage des Drehpunkts u verschieden ausfallen. Für die Grenzwerthe der Stützenreactionen gelten die Formeln des § 59. Im Folgenden bedeuten die Grenzen der $\sum$ Abscissen.

Oeffnungen mit Zwischengelenken. (Für eine Anfangsöffnung sind $r = 0$, $\varrho = 0$, für eine Endöffnung $t = l$, $\tau = n$). Das einfache Balkenfachwerk zwischen den beiden Gelenken ist nach den Formeln des III. Abschnitts zu berechnen, wir beschränken uns auf die Stäbe vor dem ersten Gelenke bei $r = \varrho\lambda$ und nach dem zweiten Gelenke bei $t = \tau\lambda$.

Stäbe zwischen 0 *und* r. Für beliebige Belastung der Fahrbahn ergeben sich die Beanspruchungen der Gurtungen mit $c = (m - 1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(1)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm \left[\sum_v^t P(a - v) + \frac{\varrho - m}{\tau - \varrho}\sum_r^t P(t - a)\right]\frac{x_m}{\lambda h_m},$$

$$(2)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \left[\sum_c^r P(a - c) + \frac{\varrho - m + 1}{\tau - \varrho}\sum_r^t P(t - a)\right]\frac{z_m}{\lambda h_{m-1}},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen mit den gleichen c, v und $u = (m - \varepsilon)\lambda$,

$$(3)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[-\varepsilon\sum_c^v P(a - c) + \sum_v^r P(u - a)\right.$$
$$\left. + \frac{m - \varepsilon - \varrho}{\tau - \varrho}\sum_r^t P(t - a)\right]\frac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}},$$

und die Beanspruchungen der Verticalen

$$(4)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\frac{u - v}{\lambda}\sum_c^v P(a - c) + \sum_v^r P(u - a)\right.$$
$$\left. + \frac{m - \nu - \varrho}{\tau - \varrho}\sum_r^t P(t - a)\right]\frac{1}{\nu\lambda},$$

worin a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$c = (m - 1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \qquad u = (m - v)\lambda,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$c = m\lambda \qquad v = (m + 1)\lambda, \qquad u = (m - v)\lambda.$$

Für die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen hat man

$$(5) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

und für die oberen Grenzbeanspruchungen derselben:

Belastung durch Zug I von v bis t, Rad O bei r, X_m nach 1),
" " " I " c " t, " O " r, Z_m " 2).

Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m - \varepsilon$ zwischen m und ϱ oder $u = (m - \varepsilon)\lambda$ zwischen v und r liegt:

Belastung durch Zug I von c bis u, Rad O bei v (mitunter Zug II von c bis v, Vorderrad O bei v),

$$(6) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[-\varepsilon \sum_c^v P(a - c) + \sum_v^u P(u - a)\right] \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von u bis t, Rad O bei r (mitunter Zug II von r bis t, Vorderrad O bei r),

$$(7) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[\sum_u^r P(a - u) + \frac{\varrho - m + \varepsilon}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t - a)\right] \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}$$

Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m - \varepsilon$ nicht zwischen m und ϱ oder $u = (m - \varepsilon)\lambda$ nicht zwischen v und r liegt:

Belastung durch Zug I von c bis t, Rad O bei v für $u > r$, bei r für $u < v$, D_m nach 3),

Belastung durch Eigengewicht allein, $D_m = \mathfrak{D}_m$.

Grenzbeanspruchungen der Verticale m, wenn $u = (m - v)\lambda$ zwischen v und r liegt:

Belastung durch Zug I von c bis u, Rad O bei v (mitunter Zug II von c bis v, Vorderrad O bei v)

$$(8) \qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \left[\frac{u - v}{\lambda} \sum_c^v P(a - c) + \sum_v^u P(u - a)\right] \frac{1}{v\lambda},$$

Belastung durch Zug I von u bis t, Rad O bei r (mitunter Zug II von r bis t, Vorderrad O bei r)

(9) $$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[\sum_u^r P(a-u) + \frac{\varrho - m + \nu}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\right] \frac{1}{\nu\lambda}.$$

Grenzbeanspruchungen der Verticale m, wenn $u = (m - \nu)\lambda$ nicht zwischen v und r liegt:

Belastung durch Zug I von c bis t, Rad O bei v für $u > r$, bei r für $u < v$, V_m nach 4),

Belastung durch Eigengewicht allein, $V_m = \mathfrak{V}_m$.

Stäbe zwischen t und l. Bei beliebiger Belastung der Fahrbahn folgen die Beanspruchungen der Gurtungen mit $c = (m - 1)\lambda$, $v = m\lambda$,

(10) $$X_m = \mathfrak{X}_m \pm \left[\frac{m - \tau}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(a-r) + \sum_t^v P(v-a)\right] \frac{x_m}{\lambda h_m},$$

(11) $$Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \left[\frac{m - 1 - \tau}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(a-r) + \sum_c^t P(c-a)\right] \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen mit denselben c, v und $u = (m - \varepsilon)\lambda$,

(12) $$D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[\frac{\tau - m + \varepsilon}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(a-r) + \sum_t^c P(a-u) + (\varepsilon - 1) \sum_c^v P(v-a)\right] \frac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}},$$

und die Beanspruchungen der Verticalen

(13) $$V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\frac{\tau - m + \nu}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(a-r) + \sum_t^c P(a-u) + \frac{c-u}{\lambda} \sum_c^v P(v-a)\right] \frac{1}{\nu\lambda},$$

worin a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \qquad u = (m - \nu)\lambda,$$

b) wenn die Fahrbahnlast in Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$c = m\lambda, \qquad v = (m+1)\lambda, \qquad u = (m - \nu)\lambda.$$

Für die unteren Grenzbeanspruchungen der Gurtungen hat man wie oben

(14) $$X_m = \mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m$$

und für die oberen Grenzbeanspruchungen:

Belastung durch Zug I von r bis v, Rad O bei t, X_m nach 10),

" " " I " r " c, " O " t, Z_m " 11).

Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m-\varepsilon$ zwischen τ und $m-1$ oder $u=(m-\varepsilon)\lambda$ zwischen t und c liegt:

Belastung durch Zug I von r bis u, Rad O bei t (mitunter Zug II von r bis t, Vorderrad O bei t),

$$(15)\qquad D_m=\mathfrak{D}_m\pm\left[\frac{m-\varepsilon-\tau}{\tau-\varrho}\sum_r^t P(a-r)+\sum_t^u P(u-a)\right]\frac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von u bis v, Rad O bei c (mitunter Zug II von c bis v, Vorderrad O bei c),

$$(16)\qquad D_m=\mathfrak{D}_m\mp\left[\sum_u^c P(a-u)+(\varepsilon-1)\sum_c^v P(v-a)\right]\frac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}}\cdot$$

Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m-\varepsilon$ nicht zwischen τ und $m-1$ oder $u=(m-\varepsilon)\lambda$ nicht zwischen t und c liegt:

Belastung durch Zug I von r bis v, Rad O bei t für $u>c$,
bei c für $u<t$, D_m nach 12),

" " Eigengewicht allein, $D_m=\mathfrak{D}_m$.

Grenzbeanspruchungen der Verticale m, wenn $u=(m-v)\lambda$ zwischen t und c liegt:

Belastung durch Zug I von r bis u, Rad O bei t (mitunter Zug II von r bis t, Vorderrad O bei t),

$$(17)\qquad V_m=\mathfrak{B}_m+\left[\frac{m-v-\tau}{\tau-\varrho}\sum_r^t P(a-r)+\sum_t^u P(u-a)\right]\frac{1}{v\lambda},$$

Belastung durch Zug I von u bis v, Rad O bei c (mitunter Zug II von c bis v, Vorderrad O bei c),

$$(18)\qquad V_m=\mathfrak{B}_m\pm\left[\sum_u^c P(a-u)+\frac{c-u}{\lambda}\sum_c^v P(v-a)\right]\frac{1}{v\lambda}\cdot$$

Grenzbeanspruchungen der Verticale m, wenn $u=(m-v)\lambda$ nicht zwischen t und c liegt:

Belastung durch Zug I von r bis v, Rad O bei t für $u>c$,
bei c für $u<t$, V_m nach 13),

" " Eigengewicht allein, $V_m=\mathfrak{B}_m$.

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. (Für eine Anfangsöffnung ist $N = 0$, für eine Endöffnung $N' = 0$). Beziehen sich in

$$(19)\qquad \begin{cases} N = \left[\frac{l-t}{t-r}\sum_r^t P(a-r) + \sum_t^l P(l-a)\right]_v, \\ N' = \left[\sum_0^r Pa + \frac{r}{t-r}\sum_r^t P(t-a)\right]_u \end{cases}$$

die Ausdrücke rechts auf die der betrachteten Oeffnung l vorangehende und nachfolgende Oeffnung, so erhält man für beliebige Belastung der Fahrbahn die Beanspruchungen der Gurtungen mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$,

$$(20)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\left(\sum_0^v Pa - N\right)m + \left(\sum_v^l P(l-a) - N'\right)\right]\frac{x_m}{lh_m},$$

$$(21)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(n-m+1)\Big(\sum_0^c Pa - N\Big) + (m-1)\Big(\sum_c^l P(l-a) - N'\Big)\Big]\frac{z_m}{lh_{m-1}},$$

die Beanspruchungen der Diagonalen mit den gleichen c, v und $z = \frac{m-1}{(n-1)\varepsilon - n + m}\varepsilon l$,

$$(22)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(n-m+\varepsilon)\Big(\sum_0^c Pa - N\Big) + (n\varepsilon - \varepsilon - n + m)\sum_c^v P(z-a) - (\varepsilon - m)\Big(\sum_v^l P(l-a) - N'\Big)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}$$

und die Beanspruchungen der Verticalen

$$(23)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(n-m+\nu)\Big(\sum_0^c Pa - N\Big) + \Big(n\nu - \nu - mn + m + \frac{nc}{\lambda}\Big)\sum_c^v P(z-a) - (\nu - m)\Big(\sum_v^l P(l-a) - N'\Big)\Big]\frac{1}{\nu l},$$

worin a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \qquad z = \frac{m-1}{(n-1)v-n+m}\,vl,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$c = m\lambda, \qquad v = (m+1)\lambda, \qquad z = \frac{v+1}{(n-1)v+m}\,ml.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen ergeben sich wie folgt: Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei v,

$$X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{x_m}{lh_m}, \tag{24}$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug I in l_n Rad O bei r,

$$X_m = \mathfrak{X}_m \pm [(n-m)N + mN']\frac{x_m}{lh_m}, \tag{25}$$

Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei c,

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(n-m+1)\sum_0^c Pa + (m-1)\sum_c^l P(l-a)\right]\frac{z_m}{lh_{m-1}}, \tag{26}$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug I in l_n, Rad O bei r,

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp [(n-m+1)N + (m-1)N']\frac{z_m}{lh_{m-1}}. \tag{27}$$

Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m-\varepsilon$ zwischen 0 und n oder $u = (m-\varepsilon)\lambda$ zwischen 0 und l liegt:
Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[(n-m+\varepsilon)\sum_0^c Pa + (n\varepsilon-\varepsilon-n+m)\sum_c^v P(z-a) + (m-\varepsilon)\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}, \tag{28}$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug I in l_n, Rad O bei r,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \pm [(n-m+\varepsilon)N + (m-\varepsilon)N']\frac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}. \tag{29}$$

Grenzbeanspruchungen der Diagonale m, wenn $m-\varepsilon$ nicht zwischen 0 und n oder $u=(m-\varepsilon)\lambda$ nicht zwischen 0 und l liegt:
Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug II in l von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(30)\qquad D_m=\mathfrak{D}_m\pm\left[(\varepsilon-m+n)N+(\varepsilon-m)\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{n}}$, Rad O bei r, und einen Zug II in l von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(31)\qquad D_m=\mathfrak{D}_m\mp\left[(\varepsilon-m+n)\sum_0^c Pa+(\varepsilon-m)N'\right]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}\cdot$$

Grenzbeanspruchungen der Verticale m, wenn $m-v$ zwischen 0 und n oder $u=(m-v)\lambda$ zwischen 0 und l liegt:
Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei c für $z>v$, bei v für $z<c$,

$$(32)\qquad V_m=\mathfrak{V}_m\pm\left[(n-m+v)\sum_0^c Pa\right.$$
$$+\left(nv-v-mn+m+\frac{nc}{\lambda}\right)\sum_c^v P(z-a)$$
$$\left.+(m-v)\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{vl},$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug I in $l_{\mathfrak{n}}$, Rad O bei r,

$$(33)\qquad V_m=\mathfrak{V}_m\mp[(n-m+v)N+(m-v)N']\frac{1}{vl}\cdot$$

Grenzbeanspruchungen der Verticale m, wenn $m-v$ nicht zwischen 0 und n oder $u=(m-v)\lambda$ nicht zwischen 0 und l liegt:
Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{v}}$, Rad O bei t, und einen Zug II in l von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(34)\qquad V_m=\mathfrak{V}_m\mp\left[(v-m+n)N+(v-m)\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{vl},$$

Belastung durch einen Zug I in $l_{\mathfrak{n}}$, Rad O bei r, und einen Zug II in l von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(35)\qquad V_m=\mathfrak{V}_m\pm\left[(v-m+n)\sum_0^c Pa+(v-m)N'\right]\frac{1}{vl}\cdot$$

Wir haben für Oeffnungen mit und ohne Zwischengelenke die Werthe von c, v, z in den Formeln der V_m nur für die Fälle gegeben, dass die Fahrbahnlast in Knotenpunkten wirkt. Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Werthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Werthe b). Bezüglich der Verwendung von Zug I in Fällen, für welche oben Zug II vorgesehen ist, sei auf das in § 59 uumittelbar nach Gleichung 17) Gesagte verwiesen.

Alle für Oeffnungen ohne Zwischengelenke gegebenen Gleichungen gehen mit $N = N' = 0$ in die entsprechenden Formeln des § 33 für einfache Balkenträger über. — (Beispiele 79 u. 83.)

§ 63. Parallelträger. Einfaches System mit Verticalen. Allgemeines.

Die geometrische Anordnung dieser Träger wurde in § 17 besprochen. Für die Stabkräfte und ihre Grenzwerthe gelten die Beziehungen der §§ 60 — 62 mit

$$(1) \qquad h_m = h, \qquad x_m = z_m = x, \qquad \varepsilon = v = \infty$$

und wenn die Gurtungen horizontal sind

$$(2) \qquad x = \lambda, \qquad d_m = d.$$

Den letzten Fall fassen wir bei den Spezialisirungen dieses und der beiden folgenden Paragraphen allein ins Auge. Wie immer gelten die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren bei unten liegender X-Gurtung, unter X-Gurtung diejenige Gurtung verstanden, welche man einer Diagonale nach links hin folgend trifft.

Mit 1) 2) folgen aus § 60, 10) die Stabkräfte einer beliebigen Oeffnung l bei beliebiger Belastung

$$(3) \qquad \begin{cases} X_m = \mp [(n-m)(M+S) + m(M'+S')] \frac{1}{nh}, \\ Z_m = \pm [(n-m+1)(M+S) + (m-1)(M'+S')] \frac{1}{nh}, \\ D_m = \mp [M+S-M'-S'] \frac{d}{lh}, \\ V_m = \pm [M+S-M'-S'] \frac{1}{l}, \end{cases}$$

worin M, M', S, S' die in § 60 ewähnte Bedeutung haben und für alle Fälle in § 59 ausgedrückt sind. Nach § 60, 11) 12) bestehen für jede bestimmte Belastung die Gleichungen

$$(4) \qquad X_m + Z_m + \frac{\lambda}{d} D_m = 0, \qquad X_m + Z_{m+1} = 0,$$

während die Bedingung „Summe aller Verticalkräfte gleich Null" in Anwendung auf die Knotenpunkte m der X-Gurtung und Z-Gurtung liefert

$$(5) \qquad V_m + \frac{h}{d} D_{m+1} \pm K_x = 0, \qquad V_m + \frac{h}{d} D_m \mp K_s = 0,$$

unter K_x, K_s die Belastungen jener Knotenpunkte verstanden.

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Oeffnung l angesehen und bezeichnen g_x, g_s diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte m der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, sowie $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ die vom Eigengewichte allein herrührenden Stützenmomente M, M', dann hat man nach § 60, 16) die Stabkräfte durch das Eigengewicht allein

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp \left[m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\mathfrak{M} + m\mathfrak{M}'\right]\frac{1}{nh}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm \left[(m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+1)\mathfrak{M}\right. \\ \qquad\qquad \left. + (m-1)\mathfrak{M}'\right]\frac{1}{nh}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm \left[(n-2m+1)\frac{gl^2}{2n} - \mathfrak{M} + \mathfrak{M}'\right]\frac{d}{lh}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp \left[\left(n - 2m + \frac{g_x - g_s}{g}\right]\frac{gl^2}{2n} - \mathfrak{M} + \mathfrak{M}'\right]\frac{1}{l}. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist das Eigengewicht der Fahrbahn einzurechnen für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung in g_x, für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung in g_s. Soll das Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so ist analog wie in § 31 zu verfahren ($g_x = g$, $g_s = 0$ oder $g_x = 0$, $g_s = g$).

Oeffnungen mit Zwischengelenken. Sind wie bisher

$$(7) \qquad r = \varrho\lambda, \qquad t = \tau\lambda$$

die Abscissen der Gelenke, dann folgen aus § 60, 19) als spezielle Fälle von 6)

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \pm (\varrho - m)(\tau - m)\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{Z}_m = \mp (\varrho - m + 1)(\tau - m + 1)\frac{g\lambda^2}{2h}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm (\varrho + \tau - 2m + 1)\frac{g\lambda d}{2h}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp \left(\varrho + \tau - 2m + \frac{g_x - g_s}{g}\right)\frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Für eine Anfangsöffnung mit Zwischengelenk ist $\varrho = 0$, für eine Endöffnung mit Zwischengelenk $\tau = n$.

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewicht gelten die Gleichungen 6) mit den Ausdrücken § 60, 20) 21) von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$. Für eine Anfangsöffnung ohne Zwischengelenk ist $\mathfrak{M}=0$, für eine Endöffnung ohne Zwischengelenk $\mathfrak{M}'=0$.

§ 64. Parallelträger. Einfaches System mit Verticalen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ lassen sich aus § 63 entnehmen Die Grenzwerthe der Stabkräfte folgen aus § 61 mit $h_m = h$, $d_m = d$, $x_m = z_m = \lambda$, $\varepsilon = \nu = \infty$.

Oeffnungen mit Zwischengelenken. (Für eine Anfangsöffnung ist $\varrho = 0$, für eine Endöffnung $\tau = n$). Das einfache Balkenfachwerk zwischen den Gelenken ist nach den Formeln des § 35 zu berechnen, wir beschränken uns auf die Stäbe vor dem ersten Gelenke bei $r = \varrho\lambda$, und nach dem zweiten Gelenke bei $t = \tau\lambda$. Man erhält die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen:

$$(1)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \pm (\varrho - m)(\tau - m)\frac{p\lambda^2}{2h}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m,$$

$$(2)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp (\varrho - m + 1)(\tau - m + 1)\frac{p\lambda^2}{2h}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m,$$

$$(3)\quad D_m = \mathfrak{D}_m \pm (\varrho + \tau - 2m + 1)\frac{p\lambda d}{2h}, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m,$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(4)\quad V_m = \mathfrak{V}_m \mp (\varrho + \tau - 2m + 1)\frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(5)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp (\varrho + \tau - 2m - 1)\frac{p\lambda}{2}, \qquad V_m = \mathfrak{V}_m.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe b).

Wird wie gewöhnlich das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Oeffnung l angenommen, dann folgen aus 1) — 3) mit § 63, 8) die oberen Grenzbeanspruchungen der Gurtungen und Diagonalen

$$(6)\qquad X_m = \frac{q}{g}\mathfrak{X}_m, \qquad Z_m = \frac{q}{g}\mathfrak{Z}_m, \qquad D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m,$$

und will man sich dies Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte wirkend denken, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so ergeben 4) 5) mit § 63, 8) die oberen Grenzbeanspruchungen der Verticalen

$$(7)\qquad V_m = \frac{q}{g}\mathfrak{V}_m.$$

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. (Für eine Anfangsöffnung ist $N = 0$, für eine Endöffnung $N' = 0$). Mit den Ausdrücken § 61, 12) von N, N' sind die Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung

$$(8)\qquad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m \mp m(n-m)\dfrac{p\lambda^2}{2h}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m \pm [(n-m)N + mN']\dfrac{1}{nh}, \end{cases}$$

die Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung

$$(9)\qquad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1)(n-m+1)\dfrac{p\lambda^2}{2h}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp [(n-m+1)N + (m-1)N']\dfrac{1}{nh}, \end{cases}$$

die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen

$$(10)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[\dfrac{(n-m)^2}{n-1}\dfrac{p\lambda}{2} + \dfrac{N}{l}\right]\dfrac{d}{h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[\dfrac{(m-1)^2}{n-1}\dfrac{p\lambda}{2} + \dfrac{N'}{l}\right]\dfrac{d}{h}, \end{cases}$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$(11)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{B}_m \mp \left[\frac{(n-m)^2}{n-1}\frac{p\lambda}{2} + \frac{N}{l}\right], \\ V_m = \mathfrak{B}_m \pm \left[\frac{(m-1)^2}{n-1}\frac{p\lambda}{2} + \frac{N'}{l}\right], \end{cases}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$(12)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{B}_m \mp \left[\frac{(n-m-1)^2}{n-1}\frac{p\lambda}{2} + \frac{N}{l}\right], \\ V_m = \mathfrak{B}_m \pm \left[\frac{m^2}{n-1}\frac{p\lambda}{2} + \frac{N'}{l}\right]. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die Grenzwerthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Grenzwerthe b).

Für die Diagonalen und Verticalen können wir aus § 61, 21) bis 23) auch etwas zu ungünstige Näherungsformeln entnehmen, welche dieselben Grenzwerthe wie die Berechnung mittelst vorausbestimmter Knotenpunkte ergeben. Diese Formeln wie 8) — 12) gehen mit $N = N' = 0$ in die entsprechenden Formeln des § 35 für einfache Balkenträger über. — (Beispiele 76, 78, 80, 82.)

§ 65. Parallelträger. Einfaches System mit Verticalen. Bewegte Radlastzüge.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{B}_m$ sind aus § 63 zu entnehmen. Im Uebrigen folgen die Stabkräfte und ihre Grenzwerthe aus § 62 mit $h_m = h$, $d_m = d$, $x_m = z_m = \lambda$, $\varepsilon = v = \infty$. Die Grenzen des $\sum$ in den folgenden Gleichungen bedeuten Abscissen von Verticalen, und zwar hat man für X_m, Z_m, D_m immer

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda$$

und für V_m: a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung angreift,

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung angreift,

$$c = m\lambda, \qquad v = (m+1)\lambda.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung die

Werthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung die Werthe b).

Oeffnungen mit Zwischengelenken. (Für eine Anfangsöffnung sind $r = 0$, $\varrho = 0$, für eine Endöffnung $t = l$, $\tau = n$). Das einfache Balkenfachwerk zwischen den Gelenken ist nach den Formeln des § 36 zu berechnen, wir beschränken uns auf die Stäbe vor dem ersten Gelenke bei $r = \varrho\lambda$, und nach dem zweiten Gelenke bei $t = \tau\lambda$.

Stäbe zwischen 0 *und* r. Für beliebige Belastung der Fahrbahn hat man die Stabkräfte:

$$(1) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm \left[\sum_v^r P(a-v) + \frac{\varrho - m}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\right] \frac{1}{h},$$

$$(2) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \left[\sum_c^r P(a-c) + \frac{\varrho - m + 1}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\right] \frac{1}{h},$$

$$(3) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[\sum_c^v P(a-c) + \lambda \sum_v^r P + \frac{1}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\right] \frac{d}{\lambda h},$$

$$(4) \qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[\sum_c^v P(a-c) + \lambda \sum_v^r P = \frac{1}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(t-a)\right] \frac{1}{\lambda}.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Stäbe sind

$$(5) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m, \quad D_m = \mathfrak{D}_m, \quad V_m = \mathfrak{V}_m,$$

und die oberen ergeben sich wie folgt:

Belastung durch Zug I von v bis t, Rad O bei r, X_m nach 1)
" " " I " c " t, " O " r, Z_m " 2),
" " " I " c " t, " O " v (mitunter bei r), D_m nach 3)
" " " I " c " t, " O " v (mitunter bei r), V_m nach 4).

Stäbe zwischen t *und* l. Bei beliebiger Belastung der Fahrbahn hat man die Stabkräfte:

$$(6) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm \left[\frac{m - \tau}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(a-r) + \sum_t^v P(v-a)\right] \frac{1}{h},$$

$$(7) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \left[\frac{m - 1 - \tau}{\tau - \varrho} \sum_r^t P(a-r) + \sum_t^c P(c-a)\right] \frac{1}{h},$$

$$(8)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[\frac{1}{\tau-\varrho}\sum_r^t P(a-r) + \lambda \sum_t^c P + \sum_c^v P(v-a)\Big]\frac{d}{\lambda h},$$

$$(9)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[\frac{1}{\tau-\varrho}\sum_r^t P(a-r) + \lambda \sum_t^c P + \sum_c^v P(v-a)\Big]\frac{1}{\lambda}.$$

Die unteren Grenzbeanspruchungen der Stäbe sind durch 5) bestimmt und die oberen ergeben sich wie folgt:

Belastung durch Zug I von r bis v, Rad O bei t, X_m nach 6).
„ „ „ I „ r „ c, „ O „ t, Z_m „ 7),
„ „ „ I „ r „ v, „ O „ c (mitunter bei t), D_m nach 8),
„ „ „ I „ r „ v, „ O „ c (mitunter bei t), V_m nach 9).

Oeffnungen ohne Zwischengelenke. (Für eine Anfangsöffnung ist $N = 0$, für eine Endöffnung $N' = 0$). Mit den Ausdrücken § 62, 19) von N, N' gelten bei beliebiger Belastung der Fahrbahn folgende Gleichungen:

$$(10)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \Big[(n-m)\Big(\sum_0^v Pa - N\Big) + m\Big(\sum_v^l P(l-a) - N'\Big)\Big]\frac{1}{nh},$$

$$(11)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(n-m+1)\Big(\sum_0^c P - N\Big) + (m-1)\Big(\sum_c^l P(l-a) - N'\Big)\Big]\frac{1}{nh},$$

$$(12)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[\sum_0^c Pa + (n-1)\sum_c^v P(z-a) - \sum_v^l P(l-a) - N + N'\Big]\frac{d}{lh}, \\ \text{worin}\quad z = \frac{m-1}{n-1}\,l, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[\sum_0^c Pa + (n-1)\sum_c^v P(z-a) \right. \\ \qquad \left. - \sum_v^l P(l-a) - N + N'\right] \frac{1}{l}, \\ \text{worin} \quad z = \frac{c\lambda}{n-1}. \end{cases}$$

Grenzbeanspruchungen der Gurtungen:

Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei v,

$$(14)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

Belastung durch einen Zug I in l_v, Rad O bei t und einen Zug I in l_n, Rad O bei r,

$$(15)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \pm [(n-m)N + mN']\frac{1}{nh},$$

Belastung der Oeffnung l durch Zug I, Rad O bei c,

$$(16)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(n-m+1)\sum_0^c Pa + (m-1)\sum_c^l P(l-a)\right]\frac{1}{nh},$$

Belastung durch einen Zug I in l_v, Rad O bei t, und einen Zug I in l_n, Rad O bei r,

$$(17)\quad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp [(n-m+1)N + (m-1)N']\frac{1}{nh}.$$

Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

Belastung durch einen Zug I in l_v, Rad O bei t, und einen Zug II in l von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(18)\quad D_m = \mathfrak{D}_m \pm \left[N + \sum_v^l P(l-a)\right]\frac{d}{lh},$$

Belastung durch einen Zug I in l_n, Rad O bei r, und einen Zug II in l von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(19)\quad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[N' + \sum_0^c Pa\right]\frac{d}{lh}.$$

Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

Belastung durch einen Zug I in l_v, Rad O bei t, und einen Zug II in l von v bis l, Vorderrad O bis v,

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \left[N + \sum_v^l P(l-a)\right]\frac{1}{l}, \tag{20}$$

Belastung durch einen Zug I in l_{II}, Rad O bei r, und einen Zug II in l von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[N' + \sum_0^c Pa\right]\frac{1}{l}. \tag{21}$$

Bezüglich ausnahmsweiser Verwendung von Zug I in Fällen, für welche hier Zug II vorgesehen ist, kann auf das in § 59 unmittelbar nach Gleichung 17) Gesagte verwiesen werden.

Vorstehende Gleichungen 10) — 21) gehen mit $N = N' = 0$ in die entsprechenden Formeln des § 36 für einfache Balkenträger über. — (Beispiele 77, 79, 81, 83.)

VI. Abschnitt.

Bogenträger mit drei Gelenken.

Im Folgenden betrachten wir Bogenträger mit zwei Gelenkauflagern, deren äussere Kräfte durch Einschaltung eines Zwischengelenks statisch bestimmt gemacht sind. Die Auflagergelenke werden auch *Kämpfergelenke* genannt, während das Zwischengelenk bei symmetrischen Trägern in den Scheitel der Axe oder einer Gurtung gelegt wird und dann *Scheitelgelenk* heisst.

Die theoretischen Vortheile des Zwischengelenks sollen nach *Rziha* (Eisenbahn-Unter- und Oberbau II, Wien 1877, S. 265) schon der Engländer *Robeson* 1801 und die Franzosen *Salle* und *Couche* 1858 hervorgehoben haben. In Deutschland wurden Zwischengelenke selbstständig und aus allgemeineren Gesichtspunkten zuerst von *Köpke* empfohlen (Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Vereins zu Hannover 1860 S. 346 und 1861 S. 231; vergl. § 78 u. Eingang zum V. Abschnitte). Die ersten Bogen mit drei Gelenken sind nach *Rziha* 1864 bei der Brücke über die Wien in Wien als Blechträger zur Ausführung gekommen. Weiter folgten die Moltkebrücke über die Unterspree in Berlin (Strassen- und Eisenbahnbrücke mit drei innern Oeffnungen von 16,40 m und zwei äusseren Oeffnungen von 12,71 m Spannweite, vollendet 1865), die gusseiserne Radetzkybrücke von 30,6 m Spannweite in Laibach (1866), die Brücken über den Canal St. Denis bei La Vilette und im Parke der Butte Chaumont bei St. Denis (1867), die sechsgeleisige Eisenbahnbrücke von 19,5 m Spannweite der Pennsylvaniabahn bei Philadelphia (1869), die Stiegerbrücke von 30,3 m Spannweite in Wien (1869) und viele andre. Auch als Dachbinder hat der Bogen mit drei Gelenken Verwendung gefunden (Perronhalle der Berlin-Potsdam-Magdeburger Bahn in Magdeburg, Spannweite 27,5 m; Perronhalle der Ostbahn in Berlin, Spannweite 37,66 m; Retortenhaus der Continentalgasgesellschaft in Berlin, Spannweite 32,95 m u. s. w.).

Während der Dreigelenkbogen bei Dächern und Strassenbrücken

unbestritten vielfach zweckmässig ist, sind gegen seine Verwendung bei Eisenbahnbrücken auf Grund von Erfahrungen bei der Moltkebrücke (Deutsche Bauzeit. 1885 S. 525) und einer der Ulrichsstrassenunterführungen in Magdeburg (Deutsche Bauzeit. 1881 S. 351, 484) mancherlei Bedenken laut geworden. Jedenfalls bedingt der Kräftewechsel beim Ueberschreiten des Gelenkes durch concentrirte Lasten eine sorgfältige Durchbildung der Gelenkstelle (siehe hierüber *Backhaus*, Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ingenieure 1886 S. 741 — 745, 762 — 765, 773 — 774, wo unter Voraussetzung geeigneter Gelenkanordnung der Bogen mit drei Gelenken statisch unbestimmten Bogen gegenüber empfohlen wird), und wenn einerseits die durch das Zwischengelenk gewonnene statische Bestimmtheit der Trägerart den Vortheil mit sich bringt, dass gleichmässige Temperaturänderungen und kleine Bewegungen der Widerlager ohne Einfluss auf die Spannungen sind, so wird andrerseits durch die infolge solcher Temperaturänderungen und Widerlagerbewegungen entstehende Winkelbildung an der Gelenkstelle die Schwäche der Letzteren erhöht. Demnach ist bei Anwendung des Bogens mit drei Gelenken für Eisenbahnbrücken Vorsicht geboten und ebenso wie bei fehlenden Zwischengelenken auf möglichst unnachgiebige Widerlager zu sehen. Die Zwischenpfeiler der jetzt dem Abbruche geweihten Moltkebrücke konnten nicht als genügend unnachgiebig gelten.

Wir geben nun die Thorie der betrachteten Bogenträger in gleicher Ausbildung wie die vorausgegangene der einfachen und continuirlichen Balkenträger. Die abzuleitenden Formeln gelten auch für die im nächsten Abschnitte behandelten continuirlichen Bogenträger (Oeffnungen mit Zwischengelenk), wie sie z. B. bei festen Hängebrücken zur Verwendung kommen. Wo nicht ausdrücklich Gegentheiliges bemerkt ist, wird vorausgesetzt, dass neben den Stützenreactionen nur verticale äussere Kräfte wirken.

§ 66. Beliebige Belastung beliebiger Systeme.

Form und System des Trägers können beliebig sein, sodass die Beziehungen dieses und der beiden folgenden Paragraphen auch für statisch unbestimmte Fachwerke und vollwandige Träger gelten. Der Ursprung der Coordinaten liege im Kämpfergelenke links, für das Kämpfergelenke rechts seien l, k die Coordinaten, während d, f die Coordinaten des Zwischengelenks bezeichnen. Durch die Gelenke 0 und l denken wir uns Schnitte 0 und l so gelegt, dass links

des Ersteren und rechts des Letzteren nur die Stützenreactionen bleiben.

Gewöhnlicher Fall. Wir setzen nun zunächst voraus, dass die Kämpfergelenke in gleicher Höhe liegen und das dritte Gelenke sich in der Mitte der Spannweite befindet (Fig. 240), womit $k = 0$, $d = \frac{l}{2}$ werden. Für das Moment der äussern Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger in Hinsicht eines Drehpunktes der Coordinaten u, w hat man dann nach § 8, 13)

$$(1) \qquad M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - Hw,$$

worin S das Moment der zwischen den Schnitten 0 und s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht des Punktes 0 und S' das Moment der zwischen den Schnitten s und l auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht des Punktes l. Greifen die Lasten K_1, $K_2, \ldots$ bei den Abscissen e_1, $e_2, \ldots$ am Träger an, dann hat man

$$(2) \qquad S = \sum_0^s Ke, \qquad S' = \sum_s^l K(l-e),$$

und nach § 8, 15) die Verticalreactionen der Stützen

$$(3) \qquad V = \frac{1}{l} \sum_0^l K(l-e), \qquad V' = \sum_0^l Ke.$$

Wirken dagegen irgendwelche Lasten P_1, $P_2, \ldots$ bei a_1, $a_2, \ldots$ zunächst auf ein System von Zwischenträgern und bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der vom Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so hat man nach § 10 für diese P

$$(4) \qquad \begin{cases} S = \sum_0^c Pa + \frac{c}{v-c} \sum_c^v P(v-a), \\ S' = \sum_v^l P(l-a) + \frac{l-v}{v-c} \sum_c^v P(a-c), \end{cases}$$

während die entsprechenden Stützenreactionen sind

$$(5) \qquad V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a), \qquad V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Pa.$$

Es werde nun ein Schnitt d so durch das Zwischengelenk gelegt, dass das Moment der äussern Kräfte vor oder nach dem Schnitte in

Hinsicht des Gelenkpunktes gleich Null ist. Dann liefert 1) mit $s = d,\ u = d,\ w = f$

$$M_d = 0 = \frac{l-d}{l} S_d + \frac{d}{f} S_d' - Hf,$$

worin die Indices der S, S' andeuten, auf welchen speziellen Schnitt sich dieselben beziehen. Wir erhalten aus der letzten Gleichung wegen $d = \frac{l}{2}$ den Horizontalschub

$$H = \frac{1}{2f}(S_d + S_d') \tag{6}$$

oder ausgedrückt durch die K

$$H = \frac{1}{2f}\Big[\sum_0^d Ke + \sum_d^l K(l-e)\Big] \tag{7}$$

und entsprechend den Lasten P

$$H = \frac{1}{2f}\Big[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\Big]. \tag{8}$$

Im Folgenden führen wir als abkürzende Bezeichnungen ein

$$r = u + \frac{wl}{2f}, \qquad t = u - \frac{wl}{2f}. \tag{9}$$

Diese Ausdrücke lassen sich leicht interpretiren. In Fig. 241 sei m der gewählte Momentendrehpunkt der Coordinaten u, w. Zieht man nun durch m eine Parallele zur Verbindungsgeraden der zwei letzten Gelenke, so ist r die Abscisse des Durchschnitts derselben mit der Abscissenaxe und zieht man eine Parallele durch m zur Verbindungsgeraden der zwei ersten Gelenke, so ist t die Abscisse des Durchschnitts dieser mit der Abscissenaxe. Der Beweis liegt darin, dass in Fig. 241 die Strecke x von u bis r oder u bis t bestimmt ist durch

$$x : w = \frac{l}{2} : f, \qquad x = \frac{wl}{2f}.$$

Durch Substitution von 2) 7) in 1) erhält man für Schnitte s zwischen den Schnitten 0 und d

$$M_s = \frac{l-r}{l}\sum_0^s Ke + \frac{1}{l}\sum_s^d K(lu - re) + \frac{t}{l}\sum_d^l K(l-e), \tag{10}$$

während sich durch Substitution von 4) 8) für ebensolche Schnitte ergibt

$$(11)\quad \begin{cases} M_s = \frac{l-r}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{r}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) \\ \qquad + \frac{r}{l}\sum_v^d P(z'-a) + \frac{t}{l}\sum_d^l P(l-a) \\ \text{mit } z = \frac{u-v}{(u-c)l-(v-c)r}\, cl, \qquad z' = \frac{ul}{r}. \end{cases}$$

Da man jedes der beiden Trägerstücke zwischen dem Mittelgelenke und einem Kämpfer als erstes betrachten kann, so ist es überflüssig, auf die Schnitte s zwischen d und l einzugehen, umsomehr als in praktischen Fällen Symmetrie zur Verticallinie durch die Trägermitte zu bestehen pflegt und dann nur eine Trägerhälfte zu berechnen ist. Andernfalls würde man die Schnitte s für das zweite Trägerstück ganz wie hier diejenigen für das erste behandeln können. Nach 11) hat man

für $u =$	0	c	v	l
$z =$	$\frac{v}{1+\frac{w}{2f}\frac{v-c}{c}}$	$\frac{cl}{r}$	0	$\frac{c}{1+\frac{w}{2f}\frac{v-c}{l-v}}$
$z' =$	0	$\frac{cl}{r}$	$\frac{vl}{r}$	$\frac{l}{1+\frac{w}{2f}}.$

Ferner folgt aus 11) mit Rücksicht auf den Werth von r, dass sich ersetzen die Bedingungen

$$\text{„}z \text{ zwischen } c \text{ und } v\text{“ und „}w \text{ zwischen } \chi = \frac{l-u}{l}\,2f \text{ und } \psi = \frac{l-v}{v}\frac{u}{l}\,2f\text{“},$$

sowie die Bedingungen

$$\text{„}z' \text{ zwischen } v \text{ und } d\text{“ und „}w \text{ zwischen } \psi = \frac{l-v}{v}\frac{u}{l}\,2f \text{ und } \varphi = \frac{u}{l}\,2f.\text{“}$$

In Fig. 242 u. 243 ist angedeutet, welche Punkte Ordinaten gleich vorstehenden Ausdrücken haben. Die Construction ist leicht erkennbar und da wir keinen Gebrauch davon machen, so genüge zu bemerken, dass pu parallel der Verbindungsgeraden der beiden ersten Gelenke gezogen wurde.

Um die Influenzlinie einer Einwirkung B zu erhalten, haben wir an jeder Stelle a die Ordinate b gleich dem Factor zu machen, mit

welchem P für diese Lage a im allgemeinen Ausdrucke für B multiplicirt erscheint. Auf Grund von 11), 5) und 8) ergeben sich somit folgende Constructionen.

Influenzlinie für M_s (Fig. 244—247). Man trage bei 0 und l als Ordinaten an $00_1 = t$, $00_2 = u$, $ll_1 = l - r$, ziehe die Geraden $0l_1$ und $l0_1$, welche die Perpendikel in c und d bezw. bei c_1 und d_1 schneiden, verbinde d_1 mit 0_2, wobei das Perpendikel bei v im Punkte v_1 geschnitten wird und ergänze durch die Gerade $c_1 v_1$, dann ist $0 c_1 v_1 d_1 l$ die Influenzlinie für M_s.

Der Beitrag einer Last P zu M_s bei veränderlichem a ändert sein Vorzeichen bei $a = z$, wenn z zwischen c und v liegt und bei $a = z'$ wenn z' zwischen v und d liegt. Es ist also möglich, dass zwei Zeichenwechsel des Beitrags zu M_s stattfinden (Fig. 244), dass nur einer bei z (Fig. 245) oder nur einer bei z' eintritt (Fig. 246) oder schliesslich, dass gar kein Zeichenwechsel erfolgt (Fig. 247). Die r, t lassen sich aus 9) berechnen oder wie in Fig. 241 construiren. Werden sie construirt, so kann die Construction der Influenzlinie nach vorstehender Anleitung sofort angeschlossen werden wie in Fig. 247 für einen Fall angedeutet ist.

Influenzlinie für V (Fig. 248). Man trage bei 0 die Ordinate $00_1 = 1$ an, dann hat man in der Geraden $l0_1$ die Influenzlinie für V.

Influenzlinie für H (Fig. 249). Man trage bei d die Ordinate $dd_1 = \frac{l^2}{4f}$ an und verbinde d_1 mit 0 und l, dann ist $0\, d_1\, l$ die Influenzlinie für H.

Für eine zwischen den Punkten 0 und l auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit liefern die Gleichungen 5) 8) 11) mit $P = p da$ oder die Influenzlinien wegen $B = Fp$ (§ 11) oder auch 1) 5) 6) mit § 10, 5) 6)

$$(12) \qquad V = \frac{pl}{2}, \qquad H = \frac{pl^2}{8f},$$

$$(13) \qquad M_s = [u(l - c - v) + cv]\,\frac{p}{2} - Hw$$

$$= \left[u(l - c - v) + cv - \frac{wl^2}{4f}\right]\frac{p}{2}.$$

Allgemeinster Fall. Wir haben oben angenommen, dass die Kämpfergelenke in gleicher Höhe und das dritte Gelenk in der Mitte der Spannweite liegen. Im Uebrigen sind die erhaltenen Beziehungen an symmetrische Anordnung nicht gebunden. Lassen wir nun noch allgemeiner die Kämpfergelenke in beliebigen Höhen und das dritte

Gelenke an beliebiger Stelle zu (Fig. 250). Dann tritt nach § 8, 13) an Stelle von 1)

$$(1\,a)\qquad M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - H\left(w - \frac{k}{l} u\right),$$

und schliesst man nun ganz wie oben weiter, so ergeben sich an Stelle von 3)

$$(3\,a)\qquad V = \frac{1}{l}\sum_0^l K(l-e) + \frac{k}{l} H, \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Ke - \frac{k}{l} H,$$

an Stelle von 5)

$$(5\,a)\qquad V = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) + \frac{k}{l} H, \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^l Pa - \frac{k}{l} H,$$

an Stelle von 6)

$$(6\,a)\qquad H = \frac{(l-d)\,S_d + d\,S_d}{lf - dk},$$

an Stelle von 7)

$$(7\,a)\qquad H = \frac{(l-d)\sum_0^d Ke + d\sum_d^l K(l-e)}{lf - dk},$$

an Stelle von 8)

$$(8\,a)\qquad H = \frac{(l-d)\sum_0^d Pa + d\sum_d^l P(l-a)}{lf - dk},$$

an Stelle von 9)

$$(9\,a)\qquad r = \frac{(l-d)\,w + u\,(f-k)}{lf - dk}\,l, \qquad t = \frac{uf - dw}{lf - dk}\,l,$$

an Stelle von 12)

$$(12\,a)\qquad V = \left[1 + \frac{k}{l}\,\frac{d\,(l-d)}{lf - dk}\right]\frac{pl}{2}, \qquad H = \frac{d\,(l-d)}{lf - dk}\,\frac{pl}{2},$$

und an Stelle von 13)

$$(13\,a)\qquad M_s = [u\,(l-c-v) + cv]\,\frac{p}{2} - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H$$

$$= \left[u\,(l-c-v) + cv - d\,(l-d)\,\frac{r-t}{l}\right]\frac{p}{2},$$

während die Gleichungen 2) 4) 10) 11) ungeändert bleiben.

Für die Construction der Influenzlinie von M_s bleibt die oben gegebene Anweisung bestehen, doch sind nun r, t nach 9a) zu berechnen oder wie folgt zu construiren (Fig. 251). Man ziehe durch den Momentendrehpunkt m Parallelen zu den Verbindungsgeraden

der Gelenke d, l und der Gelenke d, 0 bis zu den Durchschnitten mit der Verbindungsgeraden der Gelenke 0 und l. Die Abscissen dieser Durchschnitte haben die Werthe r und t. Der Beweis ergibt sich mit Rücksicht auf Fig. 251, da

$$r-u:\left(w-\frac{k}{l}u\right)=l-d:\left(f-\frac{k}{l}d\right),$$

$$u-t:\left(w-\frac{k}{l}u\right)=d:\left(f-\frac{k}{l}d\right),$$

woraus die Formeln 9a) sofort folgen. — Um die Influenzlinie für V zu erhalten, trage man bei 0, d, l die Ordinaten

$$1\,,\qquad \frac{f(l-d)}{fl-dk},\qquad 0$$

an und verbinde die Endpunkte durch gerade Linien (Fig. 252). Schliesslich entsteht die Influenzlinie von H, wenn man bei d die Ordinate

$$\frac{d(l-d)}{fl-dk}$$

anträgt und vom Endpunkte derselben Gerade nach den Punkten 0 und l der Abscissenaxe zieht (Fig. 253). Mit $k=0$, $d=\frac{l}{2}$ gehen alle für den allgemeinsten Fall gegebenen Formeln und Constructionen in die oben für den gewöhnlichen Fall erhaltenen über.

Während die bis jetzt gefundenen Beziehungen beide Stützpunkte an beliebigen Stellen des Trägers zulassen und auch die verzeichneten Influenzlinien Lasten ausserhalb der Spannweite l berücksichtigen, fassen wir von nun an den allein wichtigen Fall ins Auge, dass alle Lasten zwischen den Verticallinien durch die Gelenke 0 und l angreifen. In den zwei folgenden Paragraphen handelt es sich darum, die Grenzwerthe von M_s, V, H bei Einwirkung bewegter Lasten festzustellen. Mit den Grenzwerthen von M_s sind für Fachwerke einfachen Systems auch die Grenzbeanspruchungen der Stäbe bestimmt (§ 15).

Bemerkungen betreffend Hängebogen. Die abgeleiteten Gleichungen und Constructionen gelten, wie schon erwähnt, für alle Formen und Systeme von Bogen mit drei Gelenken, wobei nur das über die Vorzeichen der verschiedenen Grössen Festgestellte zu beachten ist (§ 7). Der Horizontalschub H wurde als positiv angenommen, wenn er bei 0 von links nach rechts auf den Träger wirkt (drückend, Fig. 250). Die Abscissen haben wir von links nach rechts, die Ordinaten wie z. B. f, k von unten nach oben als positiv gerechnet. Somit ergeben

obige Gleichungen für Hängebogen des negativen f wegen auch ein negatives H, der Horizontalschub wirkt nach Aussen (ziehend, Fig. 254). Will man jedoch bei Hängebogen die Ordinaten von oben nach unten als positiv annehmen, so bleiben alle unsre Formeln und Constructionen dann ungeändert, wenn wir noch den Horizontalschub von Innen nach Aussen als positiv annehmen. So kann man es sich also in der Folge vorstellen, obgleich für die folgenden Ableitungen eine Entschliessung darüber nicht nothwendig ist.

§ 67. Gleichmässig vertheilte bewegte Last bei beliebigen Systemen.

Die Kämpfergelenke können in beliebigen Höhen und das Zwischengelenk an beliebiger Stelle der Spannweite liegen. Träger mit gleich hohen Kämpfergelenken und in der Mitte liegendem Zwischengelenk werden wir der Kürze halber symmetrische Träger nennen, obgleich auch in diesem Falle eine Voraussetzung über Form und System nicht gemacht wird. Als abkürzende Bezeichnungen führen wir ein

$$(1) \qquad \varphi = \frac{u}{l}\, 2f, \qquad \chi = \frac{l-u}{l}\, 2f, \qquad \psi = \frac{l-v}{v}\,\frac{u}{l}\, 2f.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Grössen ist in § 66 festgestellt.

Es seien $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{H}$ die Beiträge der festen Last zu M_s, V, H und p die bewegte Last per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Erstere lassen sich für alle Fälle aus § 66 entnehmen. Da die bewegte Last auf einer Fahrbahnstrecke den Beitrag pF liefert, wenn F die zur betreffenden Strecke gehörige Influenzfläche bedeutet, so ergeben sich die Grenzwerthe der M_s, V, H sehr einfach mittelst der in § 66 bestimmten Influenzlinien, wie dies in § 12 c allgemein besprochen wurde. Die Ordinaten cc_1, vv_1, dd_1 der Influenzlinie für M_s folgen aus den Proportionen

$$cc_1 : l - r = c : l\,,$$
$$vv_1 : u = z' - v : z',$$
$$dd_1 : t = l - d : l,$$

also mit Rücksicht auf § 66, 11)

$$cc_1 = \frac{l-r}{l}\, c\,, \qquad vv_1 = \frac{z'-v}{z'}\, u = \frac{z'-v}{l}\, r\,, \qquad dd_1 = \frac{l-d}{l}\, t.$$

Wie bei den Influenzlinien für M_s haben wir auch bei den dadurch bestimmten Grenzwerthen vier Fälle zu unterscheiden.

a) *z liegt zwischen c und v und z' zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w sowohl zwischen χ und ψ als zwischen ψ und φ.* Die Grenzwerthe von M_s folgen aus Fig. 244

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \left[z\,\frac{cc_1}{2} + (l - z')\,\frac{dd_1}{2}\right]p,$$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + (z' - z)\,\frac{vv_1}{2}\,p,$$

oder nach Einsetzen der Ordinatenwerthe

$$(2)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + [(l-r)\,cz + (l-z')(l-d)\,t]\,\dfrac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + r\,(z'-z)\,(z'-v)\,\dfrac{p}{2l}, \end{cases}$$

und speziell für symmetrische Träger mit Rücksicht auf die Werthe § 66, 9) 11) von r, t, z, z'

$$(3)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \left[\dfrac{(l-r)\,(u-v)\,c^2}{(u-c)\,l-(v-c)\,r} + \dfrac{t}{r}\,\dfrac{wl^2}{4f}\right]\dfrac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{(u-c)\,(lu-vr)^2}{(u-c)\,l-(v-c)\,r}\,\dfrac{p}{2r}. \end{cases}$$

b) *z liegt zwischen c und v, aber z' nicht zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ.* Die Grenzwerthe folgen aus Fig. 245

$$M_s = \mathfrak{M}_s + z\,\frac{cc_1}{2}\,p,$$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \left[(l-d)\,\frac{dd_1}{2} + (d-v)\,\frac{vv_1+dd_1}{2} + (v-z)\,\frac{vv_1}{2}\right]p,$$

oder nach Einsetzen der Ordinatenwerthe

$$(4)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + cz\,(l-r)\,\dfrac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + [(l-d)\,(l-v)\,t + (d-z)\,(z'-v)\,r]\,\dfrac{p}{2l}, \end{cases}$$

und speziell für symmetrische Träger mit Rücksicht auf § 66, 9) 11)

$$(5)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{(l-r)\,(u-v)\,c^2}{(u-c)\,l-(v-c)\,r}\,\dfrac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \left[(l-v)\,u - \dfrac{wl^2}{4f} - \dfrac{(u-v)\,(lu-vr)\,c}{(u-c)\,l-(v-c)\,r}\right]\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

c) *z liegt nicht zwischen c und v, aber z' zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ.* Die Grenzwerthe folgen aus Fig 246

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \left[c\,\frac{cc_1}{2} + (v-c)\,\frac{cc_1+vv_1}{2} + (z'-v)\,\frac{vv_1}{2}\right]p,$$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + (l-z')\,\frac{dd_1}{2}\,p,$$

oder nach Einsetzen der Ordinatenwerthe

$$(6)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + [(l-r)\,cv + (z'-c)\,(z'-v)\,r]\,\dfrac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + t\,(l-z')(l-d)\,\dfrac{p}{2l}, \end{cases}$$

und speziell für symmetrische Träger mit Rücksicht auf § 66, 9) 11)

$$(7)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \left[cv - u\,(c+v) - \dfrac{lu^2}{2}\right]\dfrac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \dfrac{t}{r}\,\dfrac{wl^2}{4f}\,\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

d) *z liegt nicht zwischen c und v und z' nicht zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w weder zwischen χ und ψ noch zwischen ψ und φ.* In diesem Falle tragen alle Lasten auf den Träger in gleichem Sinne zu M_s bei, die Grenzwerthe erhält man für Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein mit Rücksicht auf § 66, 13a) 9a)

$$(8)\quad M_s = \mathfrak{M}_s + \left[u\,(l-c-v) + cv - d\,(l-d)\,\frac{r-t}{l}\right]\frac{p}{2},\quad M_s = \mathfrak{M}_s,$$

und speziell für symmetrische Träger mit § 63, 9)

$$(9)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \left[u\,(l-c-v) + cv - \frac{wl^2}{4f}\right]\frac{p}{2},\qquad M_s = \mathfrak{M}_s.$$

Die Gleichungen 8) 9) gelten natürlich auch wenn die Punkte z und z' zusammenfallen und nicht zwischen c und d liegen. Liegt der Punkt $z = z'$ innerhalb der Strecke cd, so tritt einer der Fälle b) c) ein, man kann aber auch dann beide Fälle zusammenfassen, wie im Folgenden geschieht.

e) *Es sei $u = c$, womit $z = z'$, und liege z zwischen c und d oder auch bei symmetrischen Trägern w zwischen χ und φ.* Da alsdann die Linie $c_1\,v_1\,d_1$ in Fig. 245 oder 246 zu einer Geraden wird, so ergeben sich die Grenzwerthe von $\mathfrak{M}_s$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + z\,\frac{cc_1}{2}\,p,$$

$$M_s = \mathfrak{M}_s + (l-z)\,\frac{dd_1}{2}\,p,$$

oder nach Einsetzen der Ordinatenwerthe und von $z = z'$ nach § 66, 11)

$$(10)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + c^2 \dfrac{l-r}{r} \dfrac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + (l-d)(r-u) \dfrac{t}{r} \dfrac{p}{2}, \end{cases}$$

und speziell für symmetrische Träger

$$(11)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + c^2 \frac{l-r}{r} \frac{p}{2}, \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{t}{r} \frac{wl^2}{4f} \frac{p}{2}.$$

Kämpferreactionen. Wie die Influenzlinien zeigen, treten die Grenzwerthe von V und H bei Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein ein, wir erhalten die unteren Grenzwerthe

$$(12)\qquad V = \mathfrak{V}, \qquad H = \mathfrak{H},$$

und mit Rücksicht auf § 66, 12a) die oberen

$$(13)\qquad V = \mathfrak{V} + \left[1 + \frac{k}{l} \frac{d(l-d)}{lf-dk}\right] \frac{pl}{2}, \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{d(l-d)}{lf-dk} \frac{pl}{2},$$

sowie speziell für symmetrische Träger

$$(14)\qquad V = \mathfrak{V} + \frac{pl}{2}, \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{pl^2}{8f}.$$

Soll die feste Last mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Spannweite l gelten, dann hat man nach § 66, 12a)

$$(15)\qquad \mathfrak{V} = \left[1 + \frac{k}{l} \frac{d(l-d)}{lf-dk}\right] \frac{gl}{2}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{d(l-d)}{lf-dk} \frac{gl}{2},$$

und will man sich diese Last nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt denken, in welchen die Fahrbahnlast angreift, womit sie wie eine auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last wirkt, so wird nach § 66, 13a)

$$(16)\qquad \mathfrak{M}_s = \left[u(l-c-v) + cv - d(l-d) \frac{r-t}{l}\right] \frac{g}{2}.$$

Für den gewöhnlichen Fall symmetrischer Träger hat man statt 15) 16)

$$(17)\qquad \mathfrak{V} = \frac{gl}{2}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{gl^2}{8f},$$

$$(18)\qquad \mathfrak{M}_s = \left[u(l-c-v) + cv - \frac{wl^2}{4f}\right] \frac{g}{2}.$$

Näherungsformeln. Denkt man sich in den Fällen Fig. 244 u. 245 einmal etwas zu gross $z = v$, das andre Mal etwas zu klein $z = c$ gesetzt, so ergeben sich folgende, etwas zu ungünstige Näherungsformeln. An Stelle von 2)

$$(19)\qquad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + [(l-r)cv + (l-z')(l-d)t] \dfrac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + r(z'-c)(z'-v) \dfrac{p}{2l}, \end{cases}$$

an Stelle von 3)

$$(20)\quad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \left[(l-r)\,cv + \frac{t}{r}\,\frac{wl^3}{4f}\right]\frac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + (lu - cr)\,\frac{lu - vr}{r}\,\frac{p}{2l}, \end{cases}$$

an Stelle von 4)

$$(21)\quad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + cv(l-r)\,\frac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + [(l-d)(l-v)\,t + (d-c)(z'-v)\,r]\,\frac{p}{2l}, \end{cases}$$

und an Stelle von 5)

$$(22)\quad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + cv\,(l-r)\,\frac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + \left[(l-c)(l-v)\,u - (l^2 - 2cv)\,\frac{wl}{4f}\right]\frac{p}{2l}. \end{cases}$$

Bei Anwendung dieser Formeln wird die Berechnung der z vermieden.

§ 68. Bewegte Radlastzüge mit beliebigen Systemen.

Der erste Absatz des vorigen Paragraphen bleibt gültig und ebenso alles in Letzterem bezüglich der Beiträge $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{H}$ der festen Last zu M_s, V, H Gesagte. In den folgenden Gleichungen beziehen sich die $\sum$ nur auf die bewegten Lasten. Die Ableitung der Grenzwerthe erfolgt für verschiedene mögliche Lastsysteme nach der Anleitung § 12b, worauf die Bedingungen für die ungünstigsten Stellungen bestimmter Lastsysteme nach § 12a gegeben werden. Mit Hülfe der letzteren Bedingungen können auch die nach dem ersten Verfahren erhaltenen Laststellungen und Grenzwerthe corrigirt werden, was jedoch praktisch selten von Interesse ist.

Für beliebige Schnitte s zwischen 0 und d hat man nach § 66, 11) bei jeder Belastung

$$(1)\quad \begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-r}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{r}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a) \\ \qquad + \frac{r}{l}\sum_v^d P(z'-a) + \frac{t}{l}\sum_d^l P(l-a) \\ \text{mit}\quad z = \frac{u-v}{(u-c)\,l - (v-c)\,r}\,cl, \qquad z' = \frac{ul}{r}. \end{cases}$$

Wie bei den Influenzlinien von M_s sind auch für die entsprechenden

Grenzwerthe vier Fälle zu unterscheiden. Die Formeln ergeben sich immer mit Rücksicht auf 1).

a) *z liegt zwischen c und v und z' zwischen v und d oder auch bei symmetrischen Trägern w sowohl zwischen χ und ψ als zwischen ψ und φ.* Die Grenzwerthe ergeben sich mit Rücksicht auf Fig. 244 wie folgt.

Belastung durch einen Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, und einen Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(2)\qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{l-r}{l}\sum_0^c Pa + \frac{r}{l}\sum_z^d P(z'-a) + \frac{t}{l}\sum_d^l P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von v bis z', Vorderrad O bei v,

$$(3)\qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{r}{l}\sum_v^{z'} P(z'-a).$$

b) *z liegt zwischen c und v, aber z' nicht zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ.* Die Grenzwerthe ergeben sich mit Rücksicht auf Fig. 245 wie folgt.

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(4)\qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{l-r}{l}\sum_0^c Pa,$$

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(5)\qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{r}{l}\sum_v^d P(z'-a) + \frac{t}{l}\sum_d^l P(l-a).$$

c) *z liegt nicht zwischen c und v, aber z' zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwisehen ψ und φ.* Die Grenzwerthe ergeben sich mit Rücksicht auf Fig. 246 wie folgt.

Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$,

$$(6)\qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{l-r}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{r}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ \frac{r}{l}\sum_v^{z'} P(z'-a),$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(7) \qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{r}{l}\sum_{z'}^{d} P(z'-a) + \frac{t}{l}\sum_{d}^{l} P(l-a).$$

d) *z liegt nicht zwischen c und v, und z' nicht zwischen v und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w weder zwischen χ und ψ noch zwischen ψ und φ.* In diesem Falle tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu M_z bei, die Grenzwerthe ergeben sich mit Rücksicht auf Fig. 247 wie folgt.

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für z, $z' > c$, bei d für z, $z' < v$, bei v für z, z' auf verschiedenen Seiten der Strecke c, v, M_z nach 1),

Belastung durch Eigengewicht allein, $M_z = \mathfrak{M}_z$.

Diese letzten Grenzwerthe gelten natürlich auch, wenn die Punkte z und z' zusammenfallen und nicht zwischen c und d liegen. Liegt der Punkt $z = z'$ innerhalb der Strecke cd, so tritt einer der Fälle $b)$ $c)$ ein, man kann aber dann auch beide Fälle wie folgt zusammenfassen.

e) *Es sei $u = c$, womit $z = z'$, und liege z zwischen c und d, oder auch bei symmetrischen Trägern w zwischen χ und φ.* Da alsdann die Linie $c_1\ v_1\ d_1$ in Fig. 245 oder 246 zu einer Geraden wird, so ergeben sich die Grenzwerthe wie folgt.

Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c,

$$(8) \qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{l-r}{l}\sum_{0}^{c} Pa + \frac{r}{l}\sum_{c}^{z} P(z-a),$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d,

$$(9) \qquad M_z = \mathfrak{M}_z + \frac{r}{l}\sum_{z}^{d} P(z-a) + \frac{t}{l}\sum_{d}^{l} Pl-a).$$

Kämpferreactionen. Bei beliebiger Belastung hat man die Verticalreaction bei 0 und den Horizontalschub nach § 66, 5a) 8a)

$$(10) \qquad V = \mathfrak{V} + \sum_{0}^{d} P\left(1 - \frac{f-k}{lf-dk}\,a\right) + \frac{f}{lf-dk}\sum_{d}^{l} P(l-a),$$

$$(11) \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{(l-d)\sum\limits_{0}^{d} Pa + d\sum\limits_{d}^{l} P(l-a)}{lf-dk},$$

und speziell für symmetrische Träger

$$(12)\qquad V = \mathfrak{V} + \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a),$$

$$(13)\qquad H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2f}\Big[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\Big].$$

Wie diese Gleichungen oder die entsprechenden Influenzlinien in § 66 zeigen, tragen alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu V, H bei, wir erhalten die unteren Grenzwerthe für Eigengewicht allein $V = \mathfrak{V}$, $H = \mathfrak{H}$ und die oberen wie folgt.
Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderad O bei 0,
V nach 12) oder 10),
Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei d,
H nach 13) oder 11).

Bewegt sich ein bestimmtes System von Lasten in festen Entfernungen auf dem Träger, so bewirkt nach 1) 10) 11) jede Verschiebung um da eine Aenderung von M_s

$$(14)\qquad dM_s = \Big(\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{r}{l}\sum_0^d P - \frac{t}{l}\sum_d^l P\Big)\,da,$$

eine Aenderung von V

$$(15)\qquad dV = \frac{k}{lf-dk}\Big(\sum_0^d P - \frac{f}{k}\sum_0^l P\Big)\,da,$$

und eine Aenderung von H

$$(16)\qquad dH = \frac{l}{lf-dk}\Big(\sum_0^d P - \frac{d}{l}\sum_0^l P\Big)\,da.$$

Daher hat man als Bedingung für mathematische Maxima und Minima von M_s

$$(17)\qquad \sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^r P = \frac{r}{l}\sum_0^d P + \frac{t}{l}\sum_d^l P,$$

ferner von V

$$(18)\qquad \sum_0^d P = \frac{f}{k}\sum_0^l P,$$

und schliesslich von H

$$(19)\qquad \sum_0^d P = \frac{d}{l}\sum_0^l P.$$

Für symmetrische Träger tritt wegen $k = 0$ für keine Laststellung ein mathematisches Maximum oder Minimum von V ein, jede Verschiebung gegen 0 hin (da negativ) vergrössert V. Dasselbe gilt auch in andern Fällen.

Bemerkungen betreffend die Verwendung der Züge I und II. Wie schon aus § 12 zu schliessen, können in Fällen, für welche oben Belastung durch Zug II vorgesehen ist, unter Umständen etwas ungünstigere Grenzwerthe durch Belastung mit Zug I entstehen und umgekehrt. So würde z. B. im Falle a) als zweiter Grenzwerth an Stelle von 3) treten können:
Belastung durch Zug I von s bis s', Rad O bei v,

$$(20)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \left(\frac{r}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(s-a) + \frac{r}{l}\sum_v^l P(s'-a),$$

während im Falle b) mitunter ungünstiger als 5) sein wird:
Belastung durch Zug I von s bis l, Rad O bei v für $s' > d$, bei d für $s' < v$,

$$(21)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \left(\frac{r}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_s^v P(s-a) + \frac{r}{l}\sum_v^d P(s'-a)$$
$$+ \frac{t}{l}\sum_d^l P(l-a).$$

Aehnliche Möglichkeiten lagen auch bei Balkenträgern vor. Wer soweit vorgeschritten ist, darauf Rücksicht nehmen zu wollen, wird dies nach einem Blicke auf die in § 66 bestimmten Influenzlinien stets mit Leichtigkeit thun können, wobei natürlich Formel 1) oder entsprechende Spezialformeln für bestimmte Systeme als Ausgangspunkt zu dienen haben.. Nöthig wird eine solche Berücksichtigung nur selten sein, wenn die Züge I und II genügend ungünstig gewählt werden. Auch ist zu beachten, dass wir diejenigen Lasten, welche bei Belastung der einem bestimmten Grenzwerthe entsprechenden Beitragsstrecken auf Beitragsstrecken entgegengesetzten Sinnes kommen, immer unberücksichtigt gelassen haben, was zu ungünstig ist.

§ 69. Einfaches System mit Verticalen bei beliebigen Gurtungsformen. Beliebige feste und bewegte Last.

Die Spannweite l sei durch Verticalen in n Feldsr von gleicher Länge λ getheilt. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale. Die l begrenzenden Stützen können gleich oder verschieden

hoch liegen. Für alle Arten solcher Träger wurden schon in §§ 16, 18 Ausdrücke der Stabkräfte gegeben, in welchen jetzt $M = M' = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = 0$ und für den gewöhnlichen Fall gleicher Stützhöhen auch $k = 0$ zu setzen sind.

Eine Diagonale kann nach der Seite von 0 hin ansteigen oder abfallen. Diejenige Gurtung, welche man einer Diagonale nach der Seite von 0 hin folgend trifft, nannten wir X-Gurtung, die andere Z-Gurtung. Werden ausserdem die in Fig. 69 u. 70 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt, so gelten in allen das angenommene Trägersystem betreffenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren bei unten liegender X-Gurtung. Nach § 16 hat man, wenn sich das Moment M_s für X_m, Z_m, D_m auf einen Schnitt s durch das Feld m, für V_m auf einen Schnitt durch die Stäbe x_m, h_m, z_{m+1} bezieht und u, w die Coordinaten des Momentendrehpunkts bedeuten,

$$(1) \quad \begin{cases} X_m = \mp M_s \dfrac{x_m}{\lambda h_m} \\ \text{mit} \quad u = m\lambda, \qquad w = \mathfrak{z}_m, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} Z_m = \pm M_s \dfrac{z_m}{\lambda h_{m-1}} \\ \text{mit} \quad u = (m-1)\lambda, \qquad w = \mathfrak{x}_{m-1}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} D_m = \mp M_s \dfrac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}} \\ \text{mit} \quad u = (m-\varepsilon)\lambda, \qquad w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) \\ \qquad\qquad = \mathfrak{z}_m - \varepsilon(\mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_{m-1}), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} V_m = \pm M_s \dfrac{1}{\nu \lambda} \\ \text{mit} \quad u = (m-\nu)\lambda, \qquad w_\nu = \mathfrak{x}_m - \nu(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_{m-1}) \\ \qquad\qquad = \mathfrak{z}_m - \nu(\mathfrak{z}_{m+1} - \mathfrak{z}_m). \end{cases}$$

Hierin sind $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{z}_m$ die Ordinaten der Knotenpunkte m in X-Gurtung und Z-Gurtung, sowie

$$(5) \qquad \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \qquad \nu = \frac{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{z}_m}{\mathfrak{x}_m + \mathfrak{z}_m - \mathfrak{x}_{m-1} - \mathfrak{z}_{m+1}}.$$

Für horizontale X-Gurtung und horizontale Z-Gurtung wurden überdies die unten angeführten einfacheren Ausdrücke von ν gegeben.

Die bisherigen Gleichungen gelten für beliebig gerichtete Activkräfte. Setzen wir nun lediglich verticale Activkräfte (Lasten) vor-

aus, so bestehen neben den Gleichungen des § 18 für M_s, V, H und deren Grenzwerthe noch die in §§ 66—68 gegebenen Formeln, womit obige Gleichungen auch die Grenzwerthe der Stabkräfte für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge liefern. Dabei hat man nach § 18

für X_m, Z_m, D_m $\qquad c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda,$

für V_m, wenn die Fahrbahnlast angreift

a) im Knotenpunkte m der X-Gurtung,

$$c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda,$$

b) im Knotenpunkte m der Z-Gurtung,

$$c = m\lambda, \qquad v = (m+1)\lambda.$$

Mit c, v, u, w sind auch die in § 66 eingeführten Grössen r, t, z, z' bestimmt, und hat man z. B.

für X_m wegen $u = v$ $\qquad z = 0, \qquad z' = \frac{lv}{r},$

„ Z_m „ $u = c$ $\qquad z = z' = \frac{lc}{r}.$

Alle bisherigen Gleichungen gelten bei beliebigen Höhen der Kämpfergelenke und beliebiger Lage des Zwischengelenks. Die Stabkräfte für beliebige Belastung und für Eigengewicht allein lassen sich überdies aus § 18 entnehmen, da der Horizontalschub durch § 66 bekannt ist. Für ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht beispielsweise bestehen die Gleichungen § 18, 10) mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = 0$ und $\mathfrak{H}$ nach § 67, 15).

Wir wollen nun aber insbesondere symmetrische Träger ins Auge fassen, d. h. nach § 67 solche Bogen, bei welchen die Kämpfergelenke in gleicher Höhe liegen und das Zwischengelenke in Mitten der Spannweite liegt, wie beispielsweise in Fig. 255—266. Zur Vereinfachung der Formeln mögen folgende Bezeichnungen dienen:

$$(6) \qquad \xi = \frac{n}{2f}\,\mathfrak{z}_m, \qquad \zeta = \frac{n}{2f}\,\mathfrak{x}_{m-1}, \qquad \delta = \frac{n}{2f}\,w_d, \qquad \omega = \frac{n}{2f}\,w_v.$$

Dann ergeben sich aus § 66, 9) 11) und § 67, 1) die nachstehenden Spezialformeln.

Für X_m: $\quad r = (m+\xi)\lambda \qquad t = (m-\xi)\lambda$

$$z = 0 \qquad z' = \frac{m}{m+\xi}\,l$$

$$\varphi = \frac{m}{n}\,2f \qquad \chi = \frac{n-m}{n}\,2f = \psi;$$

für Z_m:

$$r = (m - 1 + \zeta)\lambda \qquad t = (m - 1 - \zeta)\lambda$$

$$z = \frac{m-1}{m-1+\zeta}\, l = z' \qquad \varphi = \frac{m-1}{n}\, 2f$$

$$\chi = \frac{n-m+1}{n}\, 2f \qquad \psi = \frac{n-m}{m}\,\frac{m-1}{n}\, 2f;$$

für D_m:

$$r = (m - \varepsilon + \delta)\lambda \qquad t = (m - \varepsilon - \delta)\lambda$$

$$z = \frac{m-1}{(n-1)\,\varepsilon + m - n + \delta}\,\varepsilon l \qquad z' = \frac{m-\varepsilon}{m-\varepsilon+\delta}\, l$$

$$\varphi = \frac{m-\varepsilon}{n}\, 2f \qquad \chi = \frac{n-m+\varepsilon}{n}\, 2f$$

$$\psi = \frac{n-m}{m}\,\frac{m-\varepsilon}{n}\, 2f;$$

für V_m:

$$r = (m - \nu + \omega)\lambda \qquad t = (m - \nu - \omega)\lambda$$

$$z' = \frac{m-\nu}{m-\nu+\omega}\, l \qquad \varphi = \frac{m-\nu}{n}\, 2f$$

$$\chi = \frac{n-m+\nu}{n}\, 2f$$

und wenn die Fahrbahnlast angreift

a) im Knotenpunkte m der X-Gurtung,

$$z = \frac{m-1}{(n-1)\,\nu + m - n + \omega}\,\nu l \qquad \psi = \frac{n-m}{m}\,\frac{m-\nu}{n}\, 2f,$$

b) im Knotenpunkte m der Z-Gurtung,

$$z = \frac{\nu+1}{(n-1)\,\nu + m - \omega}\, m l \qquad \psi = \frac{n-m+1}{m+1}\,\frac{m-\nu}{n}\, 2f.$$

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angesehen und bezeichnen g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, dann hat man nach § 18, 10) mit $\mathfrak{H}$ nach § 67, 17) und $k = 0$ für die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp \left[m(n-m) - \frac{n\xi}{2}\right] \frac{x_m}{h_m}\, \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm \left[(m-1)(n-m+1) - \frac{n\zeta}{2}\right] \frac{z_m}{h_{m-1}}\, \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \mp \left[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - \frac{n\delta}{2}\right] \frac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\, \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \pm \left[m(n-m) - \nu\left(n - 2m + \frac{g_x - g_z}{g}\right) - \frac{n\omega}{2}\right] \frac{g\lambda}{2\nu}. \end{cases}$$

Wenn die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m angriffe, so wäre das Verticalenstück von Fahrbahn bis Z-Gurtung gerade so zu berechnen, wie wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der X-Gurtung wirkte und das Verticalenstück von Fahrbahn bis X-Gurtung ebenso, wie wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m der Z-Gurtung wirkte; doch kommt jener Fall bei Bogen mit drei Gelenken nicht vor, weshalb wir ihn nicht mehr besonders erwähnen werden.

Wie immer gelten die Formeln für X_m, Z_m, D_m auch wenn die Stellung der Diagonalen wechselt, die X-Gurtung also bald oben, bald unten liegt. Nur die Formeln für V_m, $\mathfrak{V}_m$ sind im Allgemeinen an die Voraussetzung gebunden, dass sich zu beiden Seiten der Verticale m Felder mit Diagonalen gleicher Stellung befinden, wobei jedoch die Diagonale auch mit einem Gurtungsstabe zusammenfallen kann. Schliesslich seien noch die gewöhnlichen Fälle von Bogenfachwerken mit drei Gelenken erwähnt.

Die X-Gurtung ist horizontal (Fig. 259 u. 260). Wir haben dann in allen abgeleiteten und noch abzuleitenden Formeln

$$(8) \qquad x_m = \lambda, \qquad v = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m},$$

$$(9) \qquad \mathfrak{x}_m = w_d = w_v = h_0, \qquad \zeta = \delta = \omega = \frac{n h_0}{2f},$$

und da die Fahrbahnlast stets auf die Knotenpunkte der horizontalen X-Gurtung wirkt, so gelten die oben unter a) gegebenen Ausdrücke.

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 261 u. 262). Im diesem Falle hat man in allen unsern Träger betreffenden Formeln

$$(10) \qquad z_m = \lambda, \qquad v = \varepsilon,$$

$$(11) \qquad \mathfrak{z}_m = w_d = w_v = h_0, \qquad \zeta = \delta = \omega = \frac{n h_0}{2f},$$

und da die Fahrbahnlast immer auf die Knotenpunkte der Z-Gurtung wirkt, so gelten die oben unter b) gegebenen Ausdrücke. — (Beispiele 84 u. 86.)

§ 70. Symmetrischer Träger einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$,

$\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ sind für alle Fälle aus § 69 oder § 18 zu entnehmen. Um die Ausdrücke für die Grenzbeanspruchungen der Stäbe zu erhalten, haben wir die in § 67 gegebenen Grenzwerthe von M_s in die Gleichungen § 69, 1)—4) einzusetzen und dabei die ebenfalls im vorigen Paragraphen zusammengestellten Werthe der c, v, u, w, r, t zu berücksichtigen. Im Folgenden beziehen sich alle Beanspruchungen auf die Stäbe zwischen den beiden ersten Gelenken. Der Raum zwischen den zwei punktirten schiefen Linien in Fig. 256 u. 257 möge kurz Raum J heissen.

Gurtungen. Wenn $\mathfrak{z}_m$ zwischen χ und φ liegt, d. h. wenn der Knotenpunkt m des Z-Gurts im Raum J liegt, dann sind die Grenzbeanspruchungen

$$(1)\qquad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m \mp m^2 \dfrac{n-m-\xi}{m+\xi} \dfrac{x_m}{h_m} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m \pm \xi \dfrac{\xi - m}{\xi + m} \dfrac{x_m}{h_m} \dfrac{pl}{4}. \end{cases}$$

Ist die angegebene Bedingung nicht erfüllt, was in praktischen Fällen nur in der Nähe der Trägermitte vorkommt, so treten an Stelle von 1) die Grenzwerthe

$$(2)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[m(n-m) - \frac{n\xi}{2}\right] \frac{x_m}{h_m} \frac{p\lambda}{2}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m.$$

Liegt $\mathfrak{x}_{m-1}$ zwischen χ und φ, d. h. der Knotenpunkt $m-1$ der X-Gurtung im Raume J, so sind die Grenzbeanspruchungen

$$(3)\qquad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1)^2 \dfrac{n-m+1-\xi}{m-1+\xi} \dfrac{z_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \xi \dfrac{\xi - m + 1}{\xi + m - 1} \dfrac{z_m}{h_{m-1}} \dfrac{pl}{4}. \end{cases}$$

Ist die angeführte Bedingung nicht erfüllt, was in der Nähe der Trägermitte vorkommen kann, dann hat man anstatt 3) die Grenzwerthe

$$(4)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(m-1)(n-m+1) - \frac{n\xi}{2}\right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{p\lambda}{2}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Diagonalen. Je nach der Lage des Durchschnittspunkts der Stabaxen x_m, z_m können folgende Grenzbeanspruchungen eintreten. Für w_d sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ,

$$(5)\quad\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm \Big[(m-1)^2 \dfrac{n-m-\delta+\varepsilon}{n-m-\delta-\varepsilon(n-1)} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\delta-m+\varepsilon}{\delta+m-\varepsilon}\dfrac{n\delta}{2\varepsilon}\Big]\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \dfrac{[(n-m)(m-\varepsilon)-m\delta]^2}{n-m-\delta-\varepsilon(n-1)}\dfrac{1-\varepsilon}{m-\varepsilon+\delta}\dfrac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

für w_d zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ,

$$(6)\quad\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm (m-1)^2 \dfrac{n-m-\delta+\varepsilon}{n-m-\delta-\varepsilon(n-1)}\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(n-m)\dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon} - \dfrac{n\delta}{2\varepsilon} \\ \qquad\qquad + (m-1)\dfrac{(n-m)(m-\varepsilon)-m\delta}{n-m-\delta-\varepsilon(n-1)}\Big]\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

für w_d nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ,

$$(7)\quad\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[m(m-1) - (m-\varepsilon)(2m-1) \\ \qquad\qquad + \dfrac{n(m-\varepsilon)^2}{m-\varepsilon+\delta}\Big]\dfrac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m \pm \dfrac{\delta-m+\varepsilon}{\delta+m-\varepsilon}\dfrac{\delta d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\dfrac{pl}{4}; \end{cases}$$

für w_d weder zwischen χ und ψ, noch zwischen ψ und φ,

$$(8)\quad\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1) - \dfrac{n\delta}{2}\Big]\dfrac{d_m}{\varepsilon h_{m-1}}\dfrac{p\lambda}{2}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m . \end{cases}$$

Verticalen. Bei diesen kommt wie immer die Lage der Fahrbahn in Betracht.

a) *Die Fahrbahnlast greift im Knotenpunkte m der X-Gurtung an.* Die von der Lage des Durchschnitts der Stabaxen x_m, z_{m+1} abhängigen Ausdrücke für die Grenzbeanspruchungen ergeben sich wie folgt. Für w_v sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ,

$$(9)\quad\begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \Big[m-1)^2 \dfrac{n-m-\omega+\nu}{n-m-\omega-\nu(n-1)} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\omega-m+\nu}{\omega+m-\nu}\dfrac{n\omega}{2\nu}\Big]\dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{[(n-m)(m-\nu)-m\omega]^2}{n-m-\omega-\nu(n-1)}\dfrac{1-\nu}{m-\nu+\omega}\dfrac{p\lambda}{2\nu}; \end{cases}$$

für w_v zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ,

$$(10)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp (m-1)^2 \dfrac{n-m-\omega+\nu}{n-m-\omega-\nu(n-1)} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(n-m)\dfrac{m-\nu}{\nu} - \dfrac{n\omega}{2\nu} \\ \qquad\qquad + (m-1)\dfrac{(n-m)(m-\nu)-m\omega}{n-m-\omega-\nu(n-1)}\Big] \dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

für w_v nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ,

$$(11)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[m(m-1)-(m-\nu)(2m-1)+\dfrac{n(m-\nu)^2}{m-\nu+\omega}\Big] \dfrac{p\lambda}{2\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{\omega-m+\nu}{\omega+m-\nu} \dfrac{\omega}{\nu} \dfrac{pl}{4}; \end{cases}$$

für w_v weder zwischen χ und ψ, noch zwischen ψ und φ,

$$(12)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[m(n-m) - \nu(n-2m+1) - \dfrac{n\omega}{2}\Big] \dfrac{p\lambda}{2\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m. \end{cases}$$

b) *Die Fahrbahnlast greift im Knotenpunkte m der Z-Gurtung an.* Wie oben sind je nach der Lage des Durchschnitts der Stabaxen x_m, z_{m+1} vier Fälle zu unterscheiden. Man erhält die Grenzbeanspruchungen der Verticale m: für w_v sowohl zwischen χ und ψ als auch zwischen ψ und φ,

$$(13)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \mp \Big[-m^2 \dfrac{n-m-\omega+\nu}{m+\omega+\nu(n-1)} \dfrac{\nu+1}{\nu} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\omega-m+\nu}{\omega+m-\nu} \dfrac{n\omega}{2\nu}\Big] \dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \dfrac{[(n-m-1)(m-\nu)-(m+1)\omega]^2}{[m+\omega+\nu(n-1)](m-\nu+\omega)} \dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

für w_v zwischen χ und ψ, aber nicht zwischen ψ und φ,

$$(14)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm m^2 \dfrac{n-m-\omega+\nu}{m+\omega+\nu(n-1)} \dfrac{\nu+1}{\nu} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(n-m-1)\dfrac{m-\nu}{\nu} - \dfrac{n\omega}{2\nu} \\ \qquad\qquad - m\dfrac{(n-m-1)(m-\nu)-(m+1)\omega}{m+\omega+\nu(n-1)} \dfrac{\nu+1}{\nu}\Big] \dfrac{p\lambda}{2}; \end{cases}$$

für w_v nicht zwischen χ und ψ, wohl aber zwischen ψ und φ,

$$(15)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[m(m+1) - (m-\nu)(2m+1) \\ \qquad\qquad + \dfrac{n(m-\nu)^2}{m-\nu+\omega}\Big] \dfrac{p\lambda}{2\nu}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \mp \dfrac{\omega-m+\nu}{\omega+m-\nu} \dfrac{\omega}{\nu} \dfrac{pl}{4}; \end{cases}$$

für w_v weder zwischen χ und ψ noch zwischen ψ und φ,

$$(16)\quad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[m(n-m) - v(n-2m-1) - \frac{n\omega}{2}\right]\frac{pl}{2v}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m. \end{cases}$$

Bemerkungen. Wird das Eigengewicht als eine auf die ganze Trägerlänge gleichmässig vertheilte Last angesehen (und p für beide Grenzwerthe gleich gross angenommen), so lässt sich nach den Formeln des § 19 eine Grenzbeanspruchung der Stäbe aus der anderen berechnen.

Manche der für D_m, V_m erhaltenen Formeln würden etwas einfacher geworden sein, wenn wir von den am Schlusse des § 67 gegebenen Näherungsformeln anstatt von den entsprechenden genaueren Formeln ausgegangen wären. Die zweite Formel 5) kann mit Rücksicht auf

$$(17)\qquad \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon h_{m-1}} = -\frac{1}{h_m}$$

etwas vereinfacht werden. Im § 66 ist angegeben, welche Bedingungen für die z, z' an Stelle der oben angeführten Bedingungen für die φ, χ, ψ gesetzt werden können, doch ist es bei gleichmässig vertheilter bewegter Last nicht nöthig, die z, z' zu berechnen. — (Beispiele 85 u. 87.)

§ 71. Symmetrischer Träger einfachen Systems mit Verticalen und beliebigen Gurtungsformen. Bewegte Radlastzüge.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte lassen sich für alle Fälle aus § 69 oder § 18 entnehmen. Die Stabkräfte für beliebige Belastung und ihre Grenzwerthe für bewegte Radlastzüge folgen aus § 69, 1)—4) mit den in § 68 ausgedrückten Werthen der Momente M_s. Im Folgenden bedeuten die Grenzen der $\sum$ Abscissen, alle Beanspruchungen beziehen sich auf die Stäbe zwischen den beiden ersten Gelenken. Der Raum zwischen den punktirten schiefen Linien in Fig. 256 u. 257 soll wieder Raum J heissen. Wir erhalten für beliebige Belastung

$$(1)\quad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m-\xi)\sum_0^v Pa + (m+\xi)\sum_v^d P(z'-a) + (m-\xi)\sum_d^l P(l-a)\right]\frac{x_m}{l h_m},$$

$$(2)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(n-m+1-\zeta)\sum_0^c Pa + (m-1+\zeta\sum_c^d P(z-a)$$
$$+ (m-1-\zeta)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{z_m}{l h_{m-1}},$$

$$(3)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(n-m+\varepsilon-\delta)\sum_0^c Pa$$
$$+ (m-\varepsilon+\delta+\varepsilon n-n)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ (m-\varepsilon+\delta)\sum_v^d P(z'-a)$$
$$+ (m-\varepsilon-\delta)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},$$

$$(4)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(n-m+\nu-\omega)\sum_0^c Pa$$
$$+ \left(m-\nu+\omega+\nu n-mn+\frac{nc}{\lambda}\right)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ (m-\nu+\omega)\sum_v^d P(z'-a)$$
$$+ (m-\nu-\omega)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{1}{\nu l}.$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden c, v, ε, ν, ξ, ζ, δ, ω, z, z' sind im vorletzten Paragraphen zusammengestellt.

Gurtungen. Wenn z' zwischen v und d oder Knotenpunkt m der Z-Gurtung im Raume J liegt, so erhält man folgende Grenzwerthe von X_m.

Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei v (mitunter Zug II von 0 bis v, Vorderrad O bei v),

$$(5)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \Big[(n-m-\xi)\sum_0^v Pa + (m+\xi)\sum_v^{z'} P(z'-a)\Big]\frac{x_m}{l h_m},$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d (mitunter Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(6)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm \Big[(m+\xi)\sum_{z'}^d P(a-z') + (\xi-m)\sum_d^l P(l-a)\frac{x_m}{l h_m}.$$

Ist die angeführte Bedingung nicht erfüllt, dann ergeben sich die Grenzwerthe wie folgt.

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei v für $z' > d$, bei d für $z' < v$, X_m nach 1),

Belastung durch Eigengewicht allein, $X_m = \mathfrak{X}_m$.

Wenn $z = z'$ zwischen c und d oder Knotenpunkt $m-1$ der X-Gurtung im Raum J liegt, so erhält man folgende Grenzwerthe von Z_m.

Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c (mitunter Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c),

$$(7) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(n - m + 1 - \zeta)\sum_0^c Pa + (m - 1 + \zeta)\sum_c^z P(z-a)\Big]\frac{z_m}{l h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d (mitunter Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(8) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \Big[(m - 1 + \zeta)\sum_z^d P(a - z) + (\zeta - m + 1)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{z_m}{l h_{m-1}}.$$

Ist die angegebene Bedingung nicht erfüllt, dann ergeben sich die Grenzwerthe wie folgt.

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für $z > d$, bei d für $z < c$, Z_m nach 2),

Belastung durch Eigengewicht allein, $Z_m = \mathfrak{Z}_m$.

Die Fälle, dass 5) 6) oder 7) 8) nicht gelten, kommen übrigens nur in der Nähe der Trägermitte vor.

Diagonalen. Wir erhalten folgende Grenzbeanspruchungen.

Wenn z zwischen c und v und z' zwischen v und d liegt:

Belastung durch einen Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, und einen Zug I von z' bis l, Rad O bei d (mitunter statt des letzteren einen Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(9) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(n - m + \varepsilon - \delta)\sum_0^c Pa + (m - \varepsilon + \delta)\sum_{z'}^d P(z'-a) + (m - \varepsilon - \delta)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Belastung durch Zug II von v bis z', Vorderrad O bei v (mitunter durch Zug I von z bis z', Rad O bei v),

$$(10)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(m - \varepsilon + \delta + \varepsilon n - n)\sum_{z}^{v} P(z - a) + (m - \varepsilon + \delta)\sum_{v}^{z'} P(z' - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Wenn z zwischen c und v aber z' nicht zwischen v und d liegt:
Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(11)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp (n - m + \varepsilon - \delta)\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}\sum_{0}^{c} Pa,$$

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(12)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(m - \varepsilon + \delta)\sum_{v}^{d} P(z' - a) + (m - \varepsilon - \delta)\sum_{d}^{l} P(l - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Wenn z nicht zwischen c und v aber z' zwischen v und d liegt:
Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$,

$$(13)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(n - m + \varepsilon - \delta)\sum_{0}^{c} Pa + (m - \varepsilon + \delta + \varepsilon n - n)\sum_{c}^{v} P(z - a) + (m - \varepsilon + \delta)\sum_{v}^{z'} P(z' - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(14)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \Big[(m - \varepsilon + \delta)\sum_{z'}^{d} P(z' - a) + (m - \varepsilon - \delta)\sum_{d}^{l} P(l - a)\Big]\frac{d_m}{\varepsilon l h_{m-1}}.$$

Für z weder zwischen c und v noch z' zwischen v und d:
Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für z, $z' > c$, bei d für z, $z' < v$ und bei v für z, z' auf verschiedenen Seiten der Strecke cv, D_m nach 3),
Belastung durch Eigengewicht allein, $D_m = \mathfrak{D}_m$.

Verticalen. Die Grenzbeanspruchungen ergeben sich wie folgt. Wenn z zwischen c und v und z' zwischen v und d liegt:
Belastung durch einen Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c, und einen Zug I von z' bis l, Rad O bei d (mitunter statt des letzteren einen Zug II von d bis l, Vorderrad O bei d),

$$(15)\qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \Big[(n-m+v-\omega)\sum_0^c Pa + (m-v+\omega)\sum_{z'}^d P(z'-a) + (m-v-\omega)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{1}{vl},$$

Belastung durch Zug II von v bis z', Vorderrad O bei v (mitunter durch Zug I von z bis z', Rad O bei v),

$$(16)\qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \Big[\Big(m-v+\omega+vn-mn+\frac{nc}{\lambda}\Big)\sum_z^v P(z-a) + (m-v+\omega)\sum_v^d P(z'-a)\Big]\frac{1}{vl}\cdot$$

Wenn z zwischen c und v aber z' nicht zwischen v und d liegt:
Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(17)\qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \frac{n-m+v-\omega}{vl}\sum_0^c Pa,$$

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(18)\qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \Big[(m-v+\omega)\sum_v^d P(z'-a) + (m-v-\omega)\sum_d^l P(l-a)\Big]\frac{1}{vl}\cdot$$

Wenn z nicht zwischen c und v aber z' zwischen v und d liegt:
Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$,

$$(19)\qquad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \Big[(n-m+v-\omega)\sum_0^c Pa + \Big(m-v+\omega+vn-mn+\frac{nc}{\lambda}\Big)\sum_c^v P(z-a) + (m-v+\omega)\sum_v^{z'} P(z'-a\Big]\frac{1}{vl},$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(20)\quad V_m = \mathfrak{B}_m \pm \Big[(m - v + \omega)\sum_{z'}^{d} P(z' - a) + (m - v - \omega)\sum_{d}^{l} P(l - a)\Big]\frac{1}{vl}.$$

Für z weder zwischen c und v noch z' zwischen v und d:
Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für z, $z' > c$, bei d für z, $z' < v$ und bei v für z, z' auf verschiedenen Seiten der Strecke cv, V_m nach 4),

Belastung durch Eigengewicht allein, $V_m = \mathfrak{B}_m$.

Will man entsprechend dem am Schlusse des § 68 Gesagten in einzelnen Fällen andere Belastungen als die oben angeführten berücksichtigen, so ist wenn nöthig von den für beliebige Belastung gültigen Gleichungen 1) — 4) auszugehen. Doch haben wir die wichtigsten Alternativbelastungen, welche oben in Klammern angegeben sind, beim Ansatze der Formeln für die Grenzwerthe bereits in Betracht gezogen. — (Beispiel 88, Aufgaben 39 — 41).

§ 72. Symmetrischer Trapezträger einfachen Systems mit Verticalen und einer horizontalen Gurtung. Allgemeines.

Die eine Gurtung ist nach zwei im Zwischengelenke zusammentreffenden geraden Linien geformt, die andere horizontal. Wir fassen nur den Fall ins Auge, dass die Verticalenlängen nach den Trägerenden hin zunehmen, da der Fall nach den Trägerenden hin abnehmender Verticalenlängen bei Bogen mit drei Gelenken nicht vorkommt. Die Fahrbahnlast wirkt stets auf die Knotenpunkte des Horizontalgurts was bei den abzuleitenden Ausdrücken für V_m vorausgesetzt ist. Die Bezeichnungen der §§ 69 — 71 behalten wir bei und gelten also auch in den folgenden Spezialformeln die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren bei unten liegender X-Gurtung. Zur Vereinfachung der Formeln führen wir weiter ein

$$(1)\qquad \alpha = \frac{n h_0}{2f}, \qquad \sigma = \frac{n}{2}, \qquad \gamma = \frac{h_0}{f}.$$

Alle Formeln beziehen sich auf die erste Trägerhälfte.

Die X-Gurtung ist horizontal (Fig. 263 u. 264). Für die Ordinate des Knotenpunkts m der Z-Gurtung und die Länge der Verticalen hat man

(2) $\mathfrak{z}_m = \frac{m}{n} 2f, \qquad h_m = h_0 - \frac{m}{n} 2f,$

womit nach § 69

(3) $\varepsilon = \nu = m - \alpha, \qquad \xi = m, \qquad \zeta = \delta = \omega = \alpha.$

Die in § 69 gegebenen Ausdrücke für z, z' nehmen folgende Formen an.

Für X_m $\quad z = 0 \quad z' = \frac{l}{2} = d,$

„ Z_m $\quad z = z' = \frac{m-1}{m-1+\alpha} l,$

„ D_m, V_m $\quad z = \frac{m-1}{2\alpha - n\varepsilon - n} \varepsilon l \quad z' = \frac{l}{2} = d.$

Für die Diagonalen und Verticalen kann die Bedingung „z zwischen $c = (m-1)\lambda$ und $v = m\lambda$“ ersetzt werden durch

σ zwischen α und m

und dies ist auf der ersten Trägerhälfte immer erfüllt. Die Bedingung „z' zwischen v und d“ kann für X_m, D_m, V_m nach Belieben als erfüllt oder nicht erfüllt gelten.

Wird das Eigengewicht auf die Trägerlänge gleichmässig vertheilt angenommen, so folgen aus § 69, 7) mit 2) 3) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp m \frac{\sigma - m}{h_m} \frac{g\lambda^2}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm \left[(m-1)(n-m+1) - \alpha\sigma\right] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm \left[\alpha \frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + 1\right] \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp \left[\alpha \frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + \frac{g_x - g_z}{g}\right] \frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Für beliebige Belastung gelten neben den in § 69 erwähnten Gleichungen auch § 74, 1)—4). Die Letzteren zeigen, dass die Belastung der einen Trägerhälfte ohne Einfluss auf die Beanspruchungen des Horizontalgurts uad der Füllungsglieder der andern ist.

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 265 u. 266). Für die Ordinate des Knotenpunkts m der X-Gurtung und die Länge der Verticale m hat man

(5) $\mathfrak{x}_m = \frac{m}{n} 2f, \qquad h_m = h_0 - \frac{m}{n} 2f,$

womit nach § 69

(6) $\varepsilon = \nu = m - \alpha, \quad \zeta = m - 1, \quad \xi = \delta = \omega = \alpha.$

Die Ausdrücke für z, z' nehmen folgende Formen an.

Für X_m $\quad z = 0 \quad\quad z' = \frac{m}{m+\alpha}\, l,$

„ Z_m $\quad z = z' = \frac{l}{2} = d,$

„ D_m $\quad z = \frac{m-1}{2\alpha + n\varepsilon - n}\, l \quad\quad z' = \frac{l}{2} = d,$

„ V_m $\quad z = \frac{m}{2\alpha + n\varepsilon - n}\, l \quad\quad z' = \frac{l}{2} = d.$

Für die Diagonalen kann die Bedingung „z zwischen $c = (m-1)\lambda$ und $v = m\lambda$“ ersetzt werden durch

σ zwischen α und m

und für die Verticalen die Bedingung „z zwischen $c = m\lambda$ und $v = (m+1)\lambda$“ durch

σ zwischen α und $m + 1$.

Beides ist auf der ersten Trägerhälfte immer erfüllt. Die Bedingung „z' zwischen v und d“ kann für Z_m, D_m, V_m nach Belieben als erfüllt oder nicht erfüllt gelten.

Wird das Eigengewicht auf die Trägerlänge gleichmässig vertheilt angenommen, so folgen aus § 69, 7) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein:

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp \left[m(n-m) - \alpha\sigma\right] \frac{x_m}{h_m} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm (m-1) \frac{\sigma - m + 1}{h_{m-1}} \frac{p\lambda^2}{2}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm \left[\alpha \frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + 1\right] \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{2}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp \left[\alpha \frac{\sigma - m}{\alpha - m} - m + \frac{g_x - g_t}{g}\right] \frac{g\lambda}{2}. \end{cases}$$

Für beliebige Belastung gelten neben bereits gegebenen Gleichungen noch die Gleichungen § 74, 3) 11) — 13), welche zeigen, dass die Belastung der einen Trägerhälfte ohne Einfluss auf die Beanspruchungen des Horizontalgurts und der Füllungsglieder der andern ist.

§ 73. Symmetrischer Trapezträger einfachen Systems mit Verticalen und einer horizontalen Gurtung. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ lassen sich für alle Fälle aus § 72 oder § 18 entnehmen. Die speziellen Ausdrücke für die Grenzbeanspruchungen folgen aus den allgemeinen Gleichungen des § 70 mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen gegebenen Beziehungen.

Die X-Gurtung ist horizontal (Fig. 263 u. 264). Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

$$(1)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp m \frac{\sigma - m}{h_m} \frac{p\lambda^2}{2}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m.$$

Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

$$(2)\qquad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1)^2 \dfrac{n-\alpha-m+1}{\alpha+m-1} \dfrac{z_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \alpha \dfrac{\alpha-m+1}{\alpha+m-1} \dfrac{z_m}{h_{m-1}} \dfrac{pl}{4}. \end{cases}$$

Nur für $\frac{n-m+1}{n} 2f < h_0$ treten an Stelle von 2)

$$(3)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm [(m-1)(n-m+1) - \alpha\sigma] \frac{z_m}{h_{m-1}} \frac{p\lambda}{2}, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Der Fall kommt in der Nähe der Trägermitte vor, ist aber für $\frac{n+2}{n} f > h_0$ ausgeschlossen.

Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

$$(4)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m \pm (m-1)^2 \dfrac{\gamma-1}{\alpha-\gamma-m+1} \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] D_m = \mathfrak{D}_m \pm (\sigma-m)^2 \dfrac{\gamma}{\alpha-m} \dfrac{\alpha-m+1}{\alpha-\gamma-m+1} \dfrac{d_m}{h_{m-1}} \dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$(5)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm (m-1)^2 \dfrac{\gamma-1}{\alpha-\gamma-m+1} \dfrac{p\lambda}{2}, \\[2ex] V_m = \mathfrak{V}_m \mp (\sigma-m)^2 \dfrac{\gamma}{\alpha-m} \dfrac{\alpha-m+1}{\alpha-\gamma-m+1} \dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 265 u. 266). Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

$$(6)\qquad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m \mp m^2 \dfrac{\alpha - m + n}{\alpha + m} \dfrac{x_m}{h_m} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m \pm \alpha \dfrac{\alpha - m}{\alpha + m} \dfrac{x_m}{h_{m-1}} \cdot \dfrac{pl}{4}. \end{cases}$$

Nur für diejenigen (in der Nähe der Trägermitte gelegenen) Stäbe, für welche $\frac{n-m}{n} 2f < h_0$ ist, treten an Stelle von 6)

$$(7)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp [m(n-m) - \alpha\sigma] \frac{x_m}{h_m} \frac{p\lambda}{2}, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m.$$

Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

$$(8)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm (m-1) \frac{\sigma - m + 1}{h_{m-1}} \frac{p\lambda^2}{2} \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind durch 4) bestimmt. Grenzbeanspruchungen der Verticalen:

$$(9)\qquad \begin{cases} V_m = \mathfrak{V}_m \pm m^2 \dfrac{\gamma - 1}{\alpha - m} \dfrac{\alpha - m - 1}{\alpha - m - \gamma} \dfrac{p\lambda}{2}, \\ V_m = \mathfrak{V}_m \mp (\sigma - m - 1)^2 \dfrac{\gamma}{\alpha - m - \gamma} \dfrac{p\lambda}{2}. \end{cases}$$

Wird das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angesehen (und p für beide Grenzwerthe gleich gross angenommen), so lässt sich nach den Formeln des § 19 bei horizontaler X-Gurtung sowohl als bei horizontaler Z-Gurtung die eine Grenzbeanspruchung der Stäbe aus der andern berechnen.

Für $h = f$ sind $\gamma = 1$, $\alpha = \beta$ und treten dann sowohl bei horizontaler X-Gurtung wie bei horizontaler Z-Gurtung die Grenzbeanspruchungen der Füllungsglieder bei Totalbelastung des ganzen Trägers und Eigengewicht allein ein, jedes Füllungsglied wird dann immer in gleichem Sinne beansprucht. — (Beispiel 89.)

§ 74. Symmetrischer Trapezträger einfachen Systems mit Verticalen und einer horizontalen Gurtung. Bewegte Radlastzüge.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ lassen sich für alle Fälle aus § 72 oder § 18 entnehmen. Die Stabkräfte für beliebige Belastung und deren Grenzwerthe folgen aus den Gleichungen des § 71 mit Rücksicht auf die in § 72 gegebenen Beziehungen. Im Folgenden bedeuten die Grenzen der $\sum$ Abscissen.

Die X-Gurtung ist horizontal (Fig. 263 u. 264). Wir erhalten für beliebige Belastung mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$:

$$(1)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(\sigma - m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^d P(d-a)\right]\frac{2}{nh_m},$$

$$(2)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(n-m+1-\alpha)\sum_0^c Pa + (m-1+\alpha)\sum_c^d P(z-a) + (m-1-\alpha)\sum_d^l P(l-a)\right]\frac{z_m}{lh_{m-1}},$$

$$(3)\qquad D_m = \mathfrak{D}_m \mp \left[(\sigma-\alpha)\sum_0^c Pa + (\alpha+\varepsilon\sigma-\sigma)\sum_c^v P(z-a) + \alpha\sum_v^d P(d-a)\right]\frac{2d_m}{\varepsilon lh_{m-1}},$$

$$(4)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \left[(\sigma-\alpha)\sum_0^c Pa + (\alpha+\varepsilon\sigma-\sigma)\sum_c^v P(z-a) + \alpha\sum_v^d P(d-a)\right]\frac{2}{\varepsilon l}.$$

Die α, σ, ε, z sind in § 72 gegeben. Da d die Abscisse der Trägermitte ist, so hat die Belastung der zweiten Trägerhälfte keinen Einfluss auf die X_m, D_m, V_m der ersten.

Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:

Belastung durch Zug I von 0 bis d oder l, Rad O bei v, X_m nach 1),

„ „ Eigengewicht allein, $X_m = \mathfrak{X}_m$.

Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:

Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c (mitunter Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c),

$$(5)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \left[(n-m+1-\alpha)\sum_0^c Pa + (m-1+\alpha)\sum_c^z P(z-a)\right]\frac{z_m}{lh_{m-1}},$$

Belastung durch Zug I von z bis l, Rad O bei d,

$$(6)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m \mp \left[(m-1+\alpha)\sum_z^d P(a-z) + (\alpha+1-m)\sum_d^l P(l-a)\right]\frac{z_m}{lh_{m-1}}.$$

Nur für diejenigen Stäbe, für welche $\frac{n-m+1}{n} 2f < h_0$ ist (im Falle $\frac{n+2}{n} f > h_0$ kommen solche nicht vor), ergeben sich die Grenzbeanspruchungen anstatt nach 5) 6) wie folgt:

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei d, Z_m nach 2),

„ „ Eigengewicht allein, $Z_m = \mathfrak{Z}_m$.

Grenzbeanspruchungen der Diagonalen und Verticalen:

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$D_m = D_m \mp \frac{\alpha - \sigma}{\alpha - m} \frac{2 d_m}{l h_{m-1}} \sum_0^c Pa, \tag{7}$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{\alpha - \sigma}{\alpha - m} \frac{2}{l} \sum_0^c Pa, \tag{8}$$

Belastung durch Zug II von v bis d oder l, Vorderrad O bei v,

$$D_m = \mathfrak{D}_m \pm \frac{\alpha}{\alpha - m} \frac{2 d_m}{l h_{m-1}} \sum_v^d P(d-a), \tag{9}$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{\alpha}{\alpha - m} \frac{2}{l} \sum_v^d P(d-a). \tag{10}$$

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 265 u. 266). Wir erhalten bei beliebiger Belastung mit $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$ für die Gurtungen und Diagonalen, mit $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$ für die Verticalen:

$$X_m = \mathfrak{X}_m \mp \Big[(n-m-\alpha) \sum_0^v Pa + (m+\alpha) \sum_v^d P(z'-a) + (m-\alpha) \sum_d^l P(l-a)\Big] \frac{x_m}{l h_m}, \tag{11}$$

$$Z_m = \mathfrak{Z}_m \pm \Big[(\sigma - m + 1) \sum_0^c Pa + (m-1) \sum_c^d P(d-a)\Big] \frac{2}{n h_{m-1}}, \tag{12}$$

$$V_m = \mathfrak{V}_m \pm \Big[(\sigma - \alpha) \sum_0^c Pa + (\alpha + \varepsilon\sigma) \sum_c^v P(z-a) + \alpha \sum_v^d P(d-a)\Big] \frac{2}{\varepsilon l}. \tag{13}$$

Die Diagonalenbeanspruchung bleibt durch 3) bestimmt, Ausdrücke für die α, σ, ε, z, z' sind in § 72 gegeben. Die Belastung der zweiten Trägerhälfte hat keinen Einfluss auf die Z_m, D_m, V_m der ersten.

Grenzbeanspruchungen der X-Gurtung:
Belastung durch Zug I von 0 bis z', Rad O bei v (mitunter Zug II von 0 bis v, Vorderrad O bei v),

$$(14)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \mp \left[(n-m-\alpha)\sum_0^v Pa + (m+\alpha)\sum_v^{z'} P(z'-a)\right]\frac{x_m}{lh_m},$$

Belastung durch Zug I von z' bis l, Rad O bei d,

$$(15)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m \pm \left[(\alpha-m)\sum_{z'}^{d} P(a-z') + (\alpha-m)\sum_d^{l} P(l-a)\right]\frac{x_m}{lh_m}.$$

Nur für diejenigen Stäbe, für welche $\frac{n-m}{n}2f < h_0$ ist, ergeben sich die Grenzbeanspruchungen anstatt nach 14) 15) wie folgt.

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei d, $\quad X_m$ nach 11),
„ „ Eigengewicht allein, $\quad X_m = \mathfrak{X}_m$.

Grenzbeanspruchungen der Z-Gurtung:
Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c, $\quad Z_m$ nach 12),
„ „ Eigengewicht allein, $\quad Z_m = \mathfrak{X}_m$.

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind durch 7) 9) bestimmt. Grenzbeanspruchungen der Verticalen:
Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$(16)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \pm \frac{\alpha-\sigma}{\alpha-m}\,\frac{2}{l}\sum_0^c Pa,$$

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$(17)\qquad V_m = \mathfrak{V}_m \mp \frac{\alpha}{\alpha-m}\,\frac{2}{l}\sum_v^d P(d-a).$$

Zu beachten ist, dass in 13) 16) 17) abweichend von den übrigen Formeln $c = m\lambda$, $v = (m+1)\lambda$ sind. — (Beispiel 90.)

§ 75. Symmetrischer Halbparabelträger einfachen Systems mit Verticalen und einer horizontalen Gurtung.

Die eine Gurtung ist einer Parabel mit verticaler Axe durch das Gelenk in der Trägermitte eingeschrieben, die andere horizontal. Wir setzen voraus, dass die Verticalenlängen nach den Trägerenden hin zunehmen und die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte der horizontalen Gurtung wirkt, wie dies in praktischen Fällen immer zutrifft. Es gelten natürlich die Gleichungen der §§ 69—71 für beliebige Gurtungsformen. Wesentliche Vereinfachungen treten nur bei gleichmässig vertheilter fester und bewegter Last für die Eigengewichtsbeanspruchungen und einige Grenzbeanspruchungen ein. Demgemäss führen wir nur diese an und verweisen im Uebrigen hinsichtlich der Berechnung für beliebige Belastung, gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge auf die §§ 69—71. Zur Vereinfachung der Formeln werde gesetzt

$$(1) \qquad \alpha = \frac{n h_0}{2f}, \qquad \sigma = \frac{n}{2}.$$

Die X-Gurtung ist horizontal (Fig. 259 u. 260). Für die Ordinate des Knotenpunkts m der Z-Gurtung und die Länge der Verticale m hat man

$$(2) \qquad \mathfrak{z}_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2} \qquad h_m = h_0 - \mathfrak{z}_m,$$

womit nach § 69, 5) 8) 9)

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m) - \alpha\sigma}{n - 2m + 1},$$

$$(4) \qquad \nu = \frac{h_m}{h_{m+1} - h_m} = \frac{m(n-m) - \alpha\sigma}{n - 2m - 1},$$

$$(5) \qquad \xi = 2m\frac{n-m}{n}, \qquad \zeta = \delta = \omega = \alpha.$$

Die z, z' bleiben wie in § 69 ausgedrückt, nur für X_m ist etwas bequemer

$$z' = \frac{\sigma}{3\sigma - m} l.$$

Wird das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angesehen, so folgen aus § 69, 7) mit 2)—5) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = 0, & \mathfrak{Z}_m = \mp \frac{gl}{8f} n z_m, \\ \mathfrak{D}_m = 0, & \mathfrak{V}_m = + g_x \lambda. \end{cases}$$

Hinsichtlich der Grenzbeanspruchungen bei gleichmässig vertheilter bewegter Last bei ebensolchem Eigengewichte ergeben sich folgende Vereinfachungen:

$$(7)\qquad X_m = \mp \frac{m(\sigma - m)(n-m)}{(3\sigma - m)\,h_m}\,\frac{p\lambda^2}{2} = \mp \frac{\sigma - m}{3\sigma - m}\,\frac{\mathfrak{z}_m}{h_m}\,\frac{pl^2}{2f},$$

$$X_m + (X_m) = 0,$$

$$(8)\qquad D_m + (D_m) = 0, \qquad V_m + (V_m) = \mp (p + 2g_x)\lambda,$$

wobei wir die eine Grenzbeanspruchung zur Unterscheidung von der andern mit einer Klammer versehen haben.

Die Z-Gurtung ist horizontal (Fig. 261 u. 262). Für die Ordinate des Knotenpunkts m der X-Gurtung und die Länge der Verticale m hat man

$$(9)\qquad \mathfrak{x}_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2}, \qquad h_m = h_0 - \mathfrak{x}_m,$$

womit nach § 69, 5) 10) 11)

$$(10)\qquad \varepsilon = \nu = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}} = \frac{m(n-m) - \alpha\sigma}{n - 2m + 1},$$

$$(11)\qquad \zeta = 2(m-1)\frac{n-m+1}{n}, \qquad \xi = \delta = \omega = \alpha.$$

Die z, z' bleiben wie in § 69 bestimmt, nur für Z_m ist etwas bequemer

$$z = z' = \frac{\sigma}{3\sigma - m + 1}\,l.$$

Wird das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angesehen, so folgen aus § 69, 7) mit 9)—11) die Beanspruchungen durch Eigengewicht allein

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \pm \dfrac{gl}{8f}\,n x_m & \mathfrak{Z}_m = 0, \\ \mathfrak{D}_m = 0, & \mathfrak{V}_m = \pm g_s \lambda. \end{cases}$$

Hinsichtlich der Grenzbeanspruchungen bei gleichmässig vertheilter bewegter Last und ebensolchem Eigengewichte ergeben sich folgende Vereinfachungen:

$$(13)\qquad Z_m = \pm \frac{(m-1)(\sigma - m + 1)(n - m + 1)}{(3\sigma - m + 1)\,h_{m-1}}\,\frac{p\lambda^2}{2}$$

$$= \pm \frac{\sigma - m + 1}{3\sigma - m + 1}\,\frac{\mathfrak{x}_{m-1}}{h_{m-1}}\,\frac{pl^2}{8f}, \qquad Z_m + (Z_m) = 0,$$

$$D_m + (D_m) = 0, \qquad V_m + (V_m) = \pm (p + 2g_s)\lambda.$$

Auf Grund von 6) und 12) können wir folgenden Satz aussprechen: *Ist der angenommene Halbparabelbogen mit q per Längeneinheit auf der ganzen Länge gleichmässig belastet, dann sind die Beanspruchungen der horizontalen Gurtung und sämmtlicher Diagonalen gleich Null. Die Beanspruchungen der parabolischen Gurtung sind proportional den Stablängen, ihre Horizontalcomponenten gleich gross und numerisch gleich dem Horizontalschube* $\frac{ql^2}{8f}$. *Ist das Verhältniss der Knotenpunktslasten im Obergurt und Untergurt constant, dann sind auch die Beanspruchungen aller Verticalen gleich gross, mit Ausnahme derjenigen an den Enden und in der Mitte, welche halb so stark wie die übrigen beansprucht sind.* — (Beispiel 91.)

VII. Abschnitt.

Träger mit constantem Horizontalschube. Continuirliche Bogenträger. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Träger mit imaginären Gelenken.

In diesem Abschnitte wollen wir einige statisch bestimmte Trägerarten betrachten, von welchen die erste nur in einem Falle, die zweite mehrfach, die übrigen aber überhaupt noch nicht zur Ausführung gekommen sind. Dieselben lassen sich mit Rücksicht auf das für andre Träger Gegebene verhältnissmässig rasch erledigen, wie es ihrer geringeren praktischen Bedeutung entspricht. Doch sei von vornherein erwähnt, dass die zweite der vorgeführten Trägerarten eine grössere Beachtung verdient als ihr bisher zu Theil wurde.

§ 76. Träger mit constantem Horizontalschube. Beliebige Systeme.

Diese Träger unterscheiden sich vom Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern (III. Abschnitt) nur dadurch, dass ein stets constant erhaltener Horizontalschub H hinzukommt. Derselbe soll dazu dienen, die Beanspruchungen gewisser Stäbe herabzusetzen und so eine Materialersparniss zu erzielen. Träger mit constantem Horizontalschub wurden zuerst von *Köpke* empfohlen (Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1865) und bei der Elbbrücke zu Riesa angewandt (Eisenbahnbrücke mit 4 Oeffnungen von 100, 100, 100 und 55 m Spannweite, vollendet 1878). Der Horizontalschub wird bei dieser Brücke durch eine Spannvorrichtung erzeugt und in der Längsrichtung der Brücke von einem Träger auf den andern übertragen. Berücksichtigt man die durch die Spannvorrichtung bedingten Mehrkosten, so ist freilich kaum eine Geldersparniss gegenüber gewöhnlichen Balkenträgern zu erwarten und jedenfalls keine solche, welche das Aufgeben grösserer Einfachheit rechtfertigen könnte. Trotzdem soll das Nöthige für die Berechnung der fraglichen Träger angegeben werden.

Der Ursprung der Coordinaten liege im Auflager links. Für das Auflager rechts seien l, k die Coordinaten (Fig. 267). Dann hat man das Moment der äusseren Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger in Hinsicht eines Drehpunkts der Coordinaten u, w nach § 8, 13)

$$(1) \qquad M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H,$$

worin S, S' die Momente der vor s bezw. nach s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht der Auflager 0 und l bedeuten. Dieselben sind in §§ 7, 10 für alle Fälle ausgedrückt. Bezeichnet (M_s) den Werth von M_s für $H = 0$, so gilt nach 1) allgemein

$$(2) \qquad M_s = (M_s) - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H$$

und weiter hat man nach § 8, 15) die Verticalreactionen der Stützen, wenn (V), (V') dem Falle $H = 0$ entsprechen,

$$(3) \qquad V = (V) + \frac{k}{l} H, \qquad V' = (V') - \frac{k}{l} H.$$

Die Werthe von (M_s), (V), (V') sind die im III. Abschnitte für einfache Balkenträger gegebenen, und da H von der Belastung unabhängig ist, so gelten auch die Influenzlinien und entstehen bei bewegter Belastung die Grenzwerthe von M_s, V, V' ganz wie für $H = 0$ (§§ 23 — 25). Da nun die Stabkräfte von Fachwerken einfachen Systems durch die Momente M_s bestimmt sind, so können wir aussprechen: *Für Fachwerke einfachen Systems mit constantem Horizontalschub H ergeben sich die Stabkräfte und Stützenreactionen für beliebige Belastung und deren Grenzwerthe bei bewegter Belastung, wenn man die Berechnung zunächst entsprechend $H = 0$ nach den Formeln für einfache Balkenfachwerke durchführt* (III. Abschnitt) *und dann die immer gleich bleibenden Beiträge von H addirt.*

Für den praktisch allein in Betracht kommenden Fall, dass die Stützen in gleicher Höhe liegen, hat man nach 2) 3) mit $k = 0$

$$(4) \qquad M_s = (M_s) - Hw,$$

$$(5) \qquad V = (V), \qquad V' = (V'),$$

der Horizontalschub übt überhaupt keinen Einfluss auf die Stützenreactionen aus. Liegt überdies in der Richtungslinie des Horizontalschubes eine horizontale Gurtung, so bleiben auch sämmtliche nicht zur Letzteren gehörigen Stäbe von H unbeeinflusst, bezüglich der Beanspruchung dieser Stäbe gelten die im III. Abschnitte entwickelten Gesetze und für den Einfluss etwaiger Gegendiagonalen das im

IV. Abschnitte Gesagte. Denn da der Drehpunkt zur Aufstellung der Momentengleichung für jeden nicht zum erwähnten Horizontalgurte gehörigen Stab im Durchschnitte der von Schnitt s mitgetroffenen Stäbe d. h. in der Richtungslinie von H liegt, so folgt aus 2) mit $k = w = 0$ für solche Stäbe

$$M_s = (M_s)\,. \tag{6}$$

Von den mit $H = 0$ berechneten Beanspruchungen der horizontalen Gurtung in der Richtungslinie von H kommt einfach der Horizontalschub in Abzug. Soll also durch H eine Verminderung der Beanspruchungen bewirkt werden, so haben wir bei gezogener Gurtung ein drückendes H (H positiv), bei gedrückter Gurtung ein ziehendes H (H negativ) zu verwenden und erhalten bei horizontalem Untergurte in der Richtungslinie von H (Fig. 268)

$$\text{mit positiven } (U),\ H \qquad U = (U) - H, \tag{7}$$

bei horizontalem Obergurte in der Richtungslinie von H (Fig, 269)

$$\text{mit negativen } (O),\ H \qquad O = (O) - H, \tag{8}$$

unter (U), (O) die Beanspruchung des betreffenden Gurtungsstabes für $H = O$ verstanden. Die letzten Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: *Für Fachwerke einfachen Systems mit constantem Horizontalschube, gleich hohen Auflagern und dieselben verbindendem Horizontalgurte erhält man die wirklichen Beanspruchungen, Stützenreactionen und Grenzwerthe derselben ganz wie für gewöhnliche Balkenfachwerke* (III. Abschnitt) *mit dem einzigen Unterschiede, dass von den Beanspruchungen und Grenzbeanspruchungen des Horizontalgurts der Horizontalschub H zu subtrahiren ist. Dabei hat H positiven oder negativen Werth, jenachdem der Horizontalschub die Auflager zu nähern oder zu entfernen sucht, so dass bei unten liegendem Horizontalgurte durch positive H, bei oben liegendem durch negative H Materialersparniss zu erreichen ist.*

Es fragt sich nun noch, welche Wahl man für H treffen will. Theoretisch am zweckmässigsten wäre dasjenige H, welches die grösste Ersparniss, also im Allgemeinen den kleinsten Materialverbrauch bedingt. Dieser Werth hängt aber von den ohne H eintretenden Beanspruchungen und der Art der Dimensionenberechnung ab. Bei der Riesaer Elbbrücke hat man Parabelträger mit horizontalem Untergurt angewandt, für welche bei gleichmässig vertheilter Belastung die Beanspruchung des Horizontalgurts constant ist (§ 41). Der vom Eigengewichte allein herrührenden Beanspruchung des Untergurts entsprechend hat man nun gewählt

$$H = \frac{gl^2}{8f},$$

sodass für Eigengewicht allein die Untergurtstäbe und Diagonalen keinerlei Beanspruchung erleiden. — (Beispiel 92.)

§ 77. Träger mit constantem Horizontalschube. Einfaches System mit Verticalen. †

Obschon die Berechnung von Trägern einfachen Systems mit constantem Horizontalschube durch das im vorigen Paragraphen Gesagte vollständig klargelegt ist, wollen wir doch die Formeln für das am häufigsten vorkommende Fachwerksystem noch besonders anführen. Der Träger sei durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt. In jedem Felde befindet sich eine wirksame Diagonale. Die Bezeichnungen werden wie in § 16 oder § 31 gewählt. Sind weiter (X_m), (Z_m), (D_m), (V_m) diejenigen Stabkräfte, welche dem Falle $H = 0$ entsprechen, so gelten nach § 18, 2) bei beliebigem H die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} X_m = (X_m) \mp H\,[n\mathfrak{z}_m - mk]\,\dfrac{x_m}{lh_m}, \\ Z_m = (Z_m) \pm H\,[n\mathfrak{x}_{m-1} - (m-1)k]\,\dfrac{z_m}{lh_{m-1}}, \\ D_m = (D_m) \pm H\,[nw_d - (m-\varepsilon)k]\,\dfrac{d_m}{\varepsilon lh_{m-1}}, \\ V_m = (V_m) \mp H\,[nw_v - (m-\nu)k]\,\dfrac{1}{\nu l}, \end{cases}$$

worin die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren bei unten liegender X-Gurtung massgebend sind. Die in Klammern gesetzten Beanspruchungen lassen sich aus dem III. Abschnitte für alle Fälle entnehmen. Während vorstehende Formeln bei beliebigen Stützhöhen und beliebigen Formen beider Gurtungen gelten, würden praktisch wohl nur die folgenden Fälle in Betracht kommen.

Horizontale X-Gurtung in der Richtungslinie von H (Fig. 270 u. 271). In diesem Falle haben wir nach § 16

$$x_m = \lambda, \; \mathfrak{z}_m = \mp h_m, \; w_d = w_v = \mathfrak{x}_m = k = 0$$

und damit treten an Stelle von 1):

$$(2) \quad \begin{cases} X_m = (X_m) - H, \\ Z_m = (Z_m), \qquad D_m = (D_m), \qquad V_m = (V_m). \end{cases}$$

Horizontale Z-Gurtung in der Richtungslinie von H (Fig. 272 u. 273). In diesem Falle hat man nach § 16

$$z_m = \lambda,\ \mathfrak{x}_m = \pm h_m,\ w_d = w_v = \mathfrak{z}_m = k = 0\,.$$

Damit treten an Stelle von 1):

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{c} Z_m = (Z_m) - H\,, \\ X_m = (X_m)\,, \qquad D_m = (D_m)\,, \qquad V_m = (V_m)\,. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen 2) 3) bestätigen den gegen Schluss des vorigen Paragraphen hervorgehobenen Satz.

§ 78. Continuirliche Bogenträger. Allgemeines.

Bogenträger auf mehr als zwei Stützen heissen *continuirliche Bogenträger.* Dieselben sind bei beliebig vielen Oeffnungen der Trägerart nach statisch bestimmt und stabil, wenn über den Endstützen feste Gelenkauflager, über den Zwischenstützen horizontal frei verschiebbare Gelenkauflager angeordnet werden und ausserdem jede Oeffnung ein Zwischengelenk erhält (Fig. 16). Solche Träger hat man jedoch bis jetzt nicht ausführt. Werden die Zwischengelenke weggelassen, dagegen sämmtliche Auflager als Grenzen von Trägerstücken ausgebildet (Fig. 17), so entsteht eine einfach statisch unbestimmte, stabile Trägerart, wir haben bei jeder Endstütze zwei, bei jeder Zwischenstütze drei, im Ganzen also bei t Trägerstücken

$$2 \cdot 2 + 3\,(t - 1) = 3t + 1$$

unabhängige Reactionscomponenten, um eine mehr als die $3t$ statischen Bedingungsgleichungen für die äusseren Kräfte an den Trägerstücken bestimmen. Es genügt also die Einschaltung eines Zwischengelenks, um die Trägerart statisch bestimmt und stabil zu machen.

Ausgeführte Brücken mit solchen continuirlichen Bogen, wie sie zuerst von *Köpke* vorgeschlagen wurden (Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1860 S. 346 und 1861 S. 231) sind u. A. die festen Hängebrücken über den Main bei Frankfurt (Fussgängersteg nach Art von Fig. 274 mit einer Mittelöffnung von 79,69 m und zwei Seitenöffnungen von 39,60 m, erste Ausführung, vollendet 1869) und die Pointbrücke über den Monongahela bei Pittsburg (Strassen- und Eisenbahnbrücke nach Art von Fig. 275, jedoch gekreuzte Diagonalen zwischen Füllungsgliedern senkrecht zum Obergurt, Mittelöffnung von 243,8 m und zwei Seitenöffnungen von 44,2 m, der Hängebogen trägt nur die Fahrbahn der Mittelöffnung, vollendet 1876). Der Name *feste*

Hängebrücke ist im Gegensatze zu gewöhnlicher *Hängebrücke* zu verstehen, bei welcher die Fahrbahn durch *Tragstangen* an Ketten (§ 2) aufgehängt ist, deren Schwankungen durch besondere *Versteifungsträger* verhindert werden sollen. Dieser Anordnung kann für nicht zu grosse Spannweiten die Anwendung fester Hängebrücken nach Art von Fig. 274 im Interesse genügender Versteifung und einer statisch bestimmten Construction auch dann vorzuziehen sein, wenn man den Obergurt als Kette (Drahtseil) herstellen will. Continuirliche Sprengbogen wurden bisher nicht ausgeführt, könnten jedoch mitunter ebenfalls zweckmässige Verwendung finden z. B. als Dachbinder für Hallen (Fig. 276 u. 277), wenn der Horizontalschub durch anstossende Gebäude leicht aufgenommen werden kann. Da die Zwischenstützen nur verticale Drücke aufzunehmen haben, dürfen sie wie bei Balkenträgern schlank ausfallen. Nebenbei lässt sich durch den Horizontalschub Materialersparniss erreichen (vergl. Beisp. 103). Für Brücken (Fig. 278 u. 279) würden continuirliche Sprengbogen mehreren in der Längsrichtung auf einander folgenden einfachen Sprengbogen vielfach vorzuziehen sein, weil bei jenen nicht auf die Unnachgiebigkeit der Zwischenpfeiler gegen horizontale Kraftcomponenten gerechnet zu werden braucht. Bei der neuen Züricher Limathbrücke hat man, um solche Componenten zu vermeiden, continuirliche Balkenträger von Bogenform gewählt.

Wir betrachten nun statisch-bestimmt-stabile continuirliche Bogen mit einem Zwischengelenke, Hängebogen und Sprengbogen von beliebiger Form und beliebigem Systeme. Jedoch soll als praktisch genügend vorausgesetzt werden, dass der Träger nur zwei oder drei Oeffnungen enthält und sich in letzterem Falle das Zwischengelenk in der Mittelöffnung befindet. Wenn man will, kann man auch von continuirlichen Bogen mit einer Oeffnung sprechen, obschon Träger wie der in Fig. 275 angedeutete theoretisch zu den Trägern mit drei Oeffnungen gehören. Wo nicht Gegentheiliches bemerkt ist, wird angenommen, dass abgesehen vom Horizontalschube alle äusseren Kräfte vertical sind.

Oeffnungen mit Zwischengelenk (Fig. 250 u. 254). Für Oeffnungen mit Zwischengelenk gilt alles in § 66 Gesagte und damit ergeben sich die Formeln für alle Fälle ganz wie im VI. Abschnitte. Auf die Bemerkung bezüglich der Wahl der Vorzeichen bei Hängebogen am Schlusse des § 66 ist besonders hinzuweisen.

Oeffnung ohne Zwischengelenk (Fig. 280 u. 281). Wir legen den Ursprung der Coordinaten in das an die Oeffnung mit Zwischen-

gelenk grenzende Auflager, für das andre Auflager seien l, k die Coordinaten. Ganz wie beim Bogen mit drei Gelenken kann man entweder den Horizontalschub nach innen und die Ordinaten nach oben als positiv ansehen (was bei Sprengbogen zu geschehen pflegt) oder den Horizontalschub nach aussen und die Ordinaten nach unten (was bei Hängebogen üblich ist). Unsre Gleichungen gelten für beide Fälle. Durch die Gelenke 0 und l denken wir uns Schnitte 0 und l so gelegt, dass links des Schnittes 0 und rechts des Schnittes l nur die Reactionen der Stützen und angrenzenden Trägerstücke als äussere Kräfte des betrachteten Trägerstücks bleiben. Dann hat man das Moment der äusseren Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger zwischen den Schnitten 0 und l in Hinsicht eines beliebigen Drehpunkts der Coordinaten u, w nach § 8, 13)

$$M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H, \tag{1}$$

worin S das Moment der zwischen den Schnitten 0 und s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht des Auflagers 0, S' das Moment der zwischen den Schnitten s und l auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht des Auflagers l. Gleichung 1) kann man auch schreiben

$$M_s = (M_s) - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H, \tag{2}$$

unter (M_s) das Moment für $H = 0$ verstanden, welches also gültig wäre, wenn keine weitere Oeffnnng anschlösse, sondern das betrachtete Trägerstück als Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern wirkte. (M_s) und seine Grenzwerthe sind in §§ 23—25, H und seine Grenzwerthe in §§ 66—68 für alle Fälle gegeben. Da nun (M_s) nur von der Belastung der betrachteten Oeffnung, H nur von derjenigen der angrenzenden Oeffnung abhängt, so lässt sich aussprechen: *Für Oeffnungen ohne Zwischengelenk der betrachteten continuirlichen Bogen ergeben sich bei bewegter Belastung die Grenzmomente M_s und damit bei einfachem Fachwerksystem auch die Grenzbeanspruchungen der Stäbe, wenn man die entsprechenden Grenzwerthe für einfache Balkenträger* (III. Abschnitt) *mit den durch H allein erzeugten Grenzwerthen so combinirt, dass möglichst ungünstige Grenzwerthe im Ganzen entstehen.* Die erwähnten von H herrührenden Grenzwerthe entsprechen den Grenzwerthen von H selbst, sodass alle Lasten der Oeffnung mit Zwischengelenken nur in gleichem Sinne oder gar nicht zu einem bestimmten M_s bezw. einer bestimmten Stabkraft in den Oeffnungen ohne Zwischengelenke beitragen.

Stützenreactionen. Bezeichnen wir die Werthe von V, V' in der einer Zwischenstütze anliegenden Oeffnung ohne Zwischengelenk zur Unterscheidung von denjenigen in der anliegenden Oeffnung mit Zwischengelenk durch A, B, so ist die ganze Reaction dieser Zwischenstütze bei beliebiger Belastung (Fig. 282)

$$R = V' + A, \tag{3}$$

V' und der in A, V' auftretende Horizontalschub H sind aus § 66 für alle Fälle zu entnehmen, und wenn K_1, K_2, ... die Lasten bedeuten, welche in der Oeffnung ohne Zwischengelenk bei e_1, e_2, ... auf den Träger kommen, so hat man nach § 8, 15)

$$A = \frac{1}{l}\sum_0^l K(l-e) + \frac{k}{l}H. \tag{4}$$

Demgemäss tragen alle Lasten in beiden der fraglichen Stütze anliegenden Oeffnungen in gleichem Sinne zu R bei, die Grenzwerthe von R treten für Totalbelastung jener Oeffnungen und Eigengewicht allein ein. Wir wollen diese Grenzwerthe spezieller nur für den allein vorkommenden Fall ausdrücken, dass die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenkeu in gleicher Höhe liegen. Alsdann hat man nach § 66 von beliebigen Lasten P_1, P_2, ... bei Abscissen a_1, a_2, ... auf der Fahrbahn herrührend,

$$H = \frac{1}{2f}\Big[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\Big], \qquad V' = \frac{1}{l}\sum_0^i Pa,$$

$$A = \frac{1}{l}\sum_0^l P(l-a) + \frac{k}{l}H.$$

Die zwei ersten Ausdrücke beziehen sich auf die Oeffnung mit Zwischengelenk, der letzte auf die Oeffnung ohne Zwischengelenk, wir erhalten damit aus 3) für beliebige Belastung

$$R = \mathfrak{R} + \frac{1}{l_0}\left(\frac{l_0}{l} + \frac{k}{2f}\right)\sum_0^d Pa + \frac{1}{l_0}\sum_d^l P\left(\frac{l-a}{2f}k + \frac{l_0}{l}a\right) \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} P(l_0 - a),$$

worin sich die beiden ersten $\sum$ auf die Oeffnung mit Zwischengelenk, die letzte auf die Oeffnung ohne Zwischengelenk beziehen, die Spannweite der Oeffnung ohne Zwischengelenk zur Unterschei-

dung von der anderen durch l_0 bezeichnet ist und $\mathfrak{R}$ die Reaction für Eigengewicht allein darstellt. Aus 5) lässt sich der Verlauf der Influenzlinie für R entnehmen, sie ist in Fig. 283 angedeutet. Wir erhalten den unteren Grenzwerth von R

$$(6) \qquad R = \mathfrak{R},$$

und den oberen für gleichmässig vertheilte bewegte Last

$$(7) \qquad R = \mathfrak{R} + \frac{pl}{2} + \frac{k}{l_0}\frac{pl^2}{8f} + \frac{p_0 l_0}{2},$$

für bewegte Radlastzüge bei Belastung der zwei anliegenden Oeffnungen durch Zug I, Rad O für $\frac{kl}{2fl_0} < 1$ bei der fraglichen Stütze, für $\frac{kl}{2fl_0} > 1$ bei d, nach Gleichung 5). Wird das Eigengewicht innerhalb jeder der beiden Oeffnungen für sich als gleichmässig vertheilt angenommen, dann hat man

$$(8) \qquad \mathfrak{R} = \frac{gl}{2} + \frac{k}{l_0}\frac{gl^2}{8f} + \frac{g_0 l_0}{2}.$$

In 7) 8) beziehen sich auf p_0, g_0 auf die Oeffnung l_0. Sollen g und $q = g + p$ in beiden Oeffnungen als gleich gross gelten, so ergeben 7) 8)

$$(9) \qquad R = \frac{q}{g}\mathfrak{R} = \frac{q}{2}\left(l + l_0 + \frac{kl^2}{4fl_0}\right).$$

Die Reaction einer Endstütze hängt davon ab, ob die anliegende Oeffnung ein Zwischengelenk enthält oder nicht. Im ersten Falle sind die Horizontalreaction und Verticalreaction nebst ihren Grenzwerthen durch §§ 66—68 bestimmt, im zweiten gilt dies nur für die Horizontalreaction H. Für die Verticalreaction im zweiten Falle hat man nach § 8, 15) bei beliebiger Belastung

$$(10) \qquad B = \frac{1}{l}\sum_0^l Ke - \frac{k}{l}H.$$

Die Belastungen der anliegenden Oeffnung und der Oeffnung mit Zwischengelenken tragen hiernach in verschiedenem Sinne zu B bei und es treten die Grenzwerthe von B ein, wenn einmal nur die eine, einmal nur die andre Oeffnung total belastet ist. Wir wollen die Grenzwerthe wieder nur für den Fall spezieller ausdrücken, dass die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenk in gleicher Höhe liegen. Dann ist bei beliebiger Belastung der Fahrbahn

$$(11) \qquad B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} Pa - \frac{k}{2fl_0}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\right].$$

Wir erhalten hiernach die Grenzwerthe bei gleichmässig vertheilter bewegter Last

(12) $$B = \mathfrak{B} + \frac{p_0 l_0}{2}, \qquad B = \mathfrak{B} - \frac{k}{l_0}\frac{p l^2}{8 f},$$

während sich dieselben für bewegte Radlastzüge wie folgt ergeben. Belastung der anliegenden Oeffnung durch Zug II, Vorderrad O bei l,

(13) $$B = \mathfrak{B} + \frac{1}{l_0}\sum_0^{l_0} Pa,$$

Belastung der Oeffnung mit Zwischengelenken durch Zug I, Rad O bei d,

(14) $$B = \mathfrak{B} - \frac{k}{2 f l_0}\Big[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\Big].$$

Wird das Eigengewicht innerhalb jeder Oeffnung für sich als gleichmässig vertheilt angesehen, dann hat man

(15) $$\mathfrak{B} = \frac{g_0 l_0}{2} - \frac{k}{l_0}\frac{g l^2}{8 f},$$

also beispielsweise

(16) für $l = 2 l_0, \quad f = k, \quad g = g_0, \qquad \mathfrak{B} = 0,$

womit für $p = p_0$ beide Grenzwerthe von B numerisch gleich und verschiedenen Vorzeichens werden (§ 12c).

§ 79. Continuirliche Bogenträger. Einfaches System mit Verticalen.

Bezüglich der Berechnungen der Stützenreactionen und der Stabkräfte in Oeffnungen mit Zwischengelenk ist auf das im vorigen Paragraphen Gesagte zu verweisen, hier handelt es sich nur noch um Angabe einiger spezieller Formeln für Oeffnungen ohne Zwischengelenke. Das Trägerstück innerhalb einer solchen Oeffnung l sei durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt. Jedes Feld enthält eine wirksame Diagonale. Die l begrenzenden Stützpunkte können gleich oder verschieden hoch liegen und beide Gurtungen von beliebigen Formen sein. Die in § 16 eingeführten Bezeichnungen, welche schon in § 31, § 60 und § 69 in Erinnerung gebracht wurden, werden beibehalten.

Nach § 18, 2) lassen sich die ganzen Beanspruchungen der Stäbe x_m, z_m, d_m, h_m wie folgt ausdrücken

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_m &= (X_m) + X'_m, \\ Z_m &= (Z_m) + Z'_m, \\ D_m &= (D_m) + D'_m, \\ V_m &= (V_m) + V'_m, \end{aligned} \right.
$$

worin X'_m, Z'_m, D'_m, V'_m die Beiträge des Horizontalschubs H, also (X_m), (Z_m), (D_m), (V_m) die ganzen Beanspruchungen abzüglich jener Beiträge bedeuten. Aus § 18, 2) folgen

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X'_m &= \pm H \left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n} k \right) \frac{x_m}{\lambda h_m}, \\ Z'_m &= \mp H \left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n} k \right) \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ D'_m &= \pm H \left(w_d - \frac{m-\varepsilon}{n} k \right) \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \\ V'_m &= \mp H \left(w_v - \frac{m-\nu}{n} k \right) \frac{1}{\nu \lambda}. \end{aligned} \right.
$$

Wie immer gelten die oberen Vorzeichen bei oben liegender X-Gurtung, die unteren bei unten liegender X-Gurtung. Die x_m, z_m, d_m, ε, ν, w_d, w_v sind in § 16 für alle Fälle und beispielsweise auch für horizontale X-Gurtung und Z-Gurtung beliebiger Richtungslinien ausgedrückt.

Bei bewegter Belastung ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Stäbe, wenn man die im dritten Abschnitte ausgedrückten Grenzwerthe won (X_m), (Z_m), (D_m), (V_m) mit den unabhängig davon eintretenden Grenzwerthen von X'_m, Z'_m, D'_m, V'_m so combinirt, dass möglichst ungünstige Grenzwerthe im Ganzen entstehen (§ 78). Diese Combination kann natürlich einfach nach Berechnung der betreffenden Zahlenwerthe erfolgen. Da jedoch nach § 66 alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne oder gar nicht zu H (und damit nach 2) zu jeder bestimmten Stabkraft) beitragen, so ergeben sich die Grenzbeanspruchungen eines Stabes auch, wenn wir dieselben zunächst ohne Rücksicht auf den Horizontalschub H (nach den Formeln des III. Abschnitts) berechnen, sodann den Beitrag des grösstmöglichen Horizontalschubs H der grössten gefundenen Grenzbeanspruchung gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addiren, den Beitrag des Horizontalschubs für Eigengewicht allein aber der andern Grenzbeanspruchung zufügen. Oder, wir können die Grenzbeanspruchungen zunächst nur ohne Rücksicht auf den von der Verkehrslast herrührenden Horizontalschub H_p (nach den Formeln

des III. Abschnitts mit Verwendung der ganzen Eigengewichtsbeanspruchungen $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$) berechnen und dann den Beitrag des grössten von der Verkehrslast allein herrühreuden Horizontalschubs H_p der für $H_p = 0$ entstehenden grössten Grenzbeanspruchung gleichen Sinnes (oder kleinsten entgegengesetzten Sinnes) addiren, die andere aber wie für $H_p = 0$ annehmen. Die unteren Grenzwerthe von X_m', Z_m', D_m', V_m' sind die Beiträge des Horizontalschubs $\mathfrak{H}$ für Eigengewicht allein zu den Stabkräften:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m' = \pm \mathfrak{H} \left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n} k\right) \frac{x_m}{\lambda h_m}, \\ \mathfrak{Z}_m' = \mp \mathfrak{H} \left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n} k\right) \frac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ \mathfrak{D}_m' = \pm \mathfrak{H} \left(w_d - \frac{m-\varepsilon}{n} k\right) \frac{d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \\ \mathfrak{V}_m' = \mp \mathfrak{H} \left(w_v - \frac{m-\nu}{n} k\right) \frac{1}{\nu \lambda}. \end{cases}$$

Die oberen Grenzwerthe oder Beiträge des grösstmöglichen Horizontalschubs folgen aus 2) mit dem oberen Grenzwerthe von H, also wenn wie wohl immer die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenken in gleicher Höhe liegen und Ausdrücke mit dem Index s sich auf letztere beziehen:

für gleichmässig vertheilte bewegte Last mit

$$(4) \qquad H = \mathfrak{H} + \left(\frac{p l^2}{8 f}\right)_s,$$

für bewegte Radlastzüge mit

$$(5) \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2f}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l-a)\right]_s,$$

wobei Zug I mit Rad O bei d die Oeffnung mit Zwischengelenken belastet. Ist das Eigengewicht innerhalb letzterer gleichmässig vertheilt, so hat man

$$(6 \qquad \mathfrak{H} = \left(\frac{g l^2}{8 f}\right)_s.$$

Die Beiträge des grössten von der Verkehrslast allein herrührenden Horizontalschubs folgen aus 2) mit vorstehendem H unter Weglassung von $\mathfrak{H}$. Sollten die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenken nicht in gleicher Höhe liegen, so würden nur an Stelle von 4) 5) 6) die Ausdrücke § 67, 13), § 68, 11) und § 67, 15) treten, alles Uebrige aber ungeändert bleiben.

Wird das Eigengewicht der betrachteten Oeffnung ohne Zwischengelenk mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf diese Oeffnung angesehen und bezeichnen g_x, g_z diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte der X-Gurtung und Z-Gurtung zu rechnen sind, so hat man nach § 18, 10) die ganzen vom Eigengewichte allein herrührenden Beanspruchungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp\left[m(n-m)\dfrac{g\lambda^2}{2} - \mathfrak{H}\left(\mathfrak{z}_m - \dfrac{m}{n}k\right)\right]\dfrac{x_m}{\lambda h_m} \\ \quad = (\mathfrak{X}_m) + \mathfrak{X}_m', \\ \mathfrak{Z}_m = \pm\left[(m-1)(n-m+1)\dfrac{g\lambda^2}{2} - \mathfrak{H}\left(\mathfrak{x}_{m-1} - \dfrac{m-1}{n}k\right)\right]\dfrac{z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ \quad = (\mathfrak{Z}_m) + \mathfrak{Z}_m', \\ \mathfrak{D}_m = \pm\left[\varepsilon\left(n - 2m + 1 - m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{g\lambda^2}{2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathfrak{H}\left(w_d - \dfrac{m-\varepsilon}{n}k\right)\right]\dfrac{d_m}{\varepsilon\lambda h_{m-1}}, \\ \quad = (\mathfrak{D}_m) + \mathfrak{D}_m', \\ \mathfrak{V}_m = \mp\left[\nu\left(n - 2m + \dfrac{g_x - g_z}{g} - m\dfrac{n-m}{\nu}\right)\dfrac{g\lambda^2}{2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathfrak{H}\left(w_v - \dfrac{m-\nu}{n}k\right)\right]\dfrac{1}{\nu\lambda} \\ \quad = (\mathfrak{V}_m) + \mathfrak{V}_m', \end{cases}$$

worin $(\mathfrak{X}_m)$, $(\mathfrak{Z}_m)$, $(\mathfrak{D}_m)$, $\mathfrak{V}_m)$ die Eigengewichtsbeanspruchungen für $\mathfrak{H} = 0$ bedeuten, welche im III. Abschnitte auch für spezielle Gurtungsformen ausgedrückt sind. Wir wollen nun noch einige besonders wichtige Fälle ins Auge fassen.

Gerade X-Gurtung als Verbindungsgurtung der Auflager. In diesem Falle haben wir

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_m = \dfrac{m}{n}k, & x_m = x, \\ w_d = \mathfrak{x}_m - \varepsilon\dfrac{k}{n}, & w_v = \mathfrak{x}_m - \nu\dfrac{k}{n}. \end{cases}$$

Damit treten an Stelle von 2)

$$(9)\quad Z_m' = D_m' = V_m' = 0,$$

$$(10)\quad X_m' = \pm H\left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}k\right)\frac{x}{\lambda h_m}$$

und an Stelle von 7)

(11) $$\mathfrak{Z}_m = (\mathfrak{Z}_m), \qquad \mathfrak{D}_m = (\mathfrak{D}_m), \qquad \mathfrak{V}_m = (\mathfrak{V}_m),$$

(12) $$\mathfrak{X}_m = (\mathfrak{X}_m) \pm \mathfrak{H}\left(\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}k\right)\frac{x}{\lambda h_m}.$$

Alle Stabkräfte und ihre Grenzwerthe mit Ausnahme derjenigen des geraden Verbindungsgurts der Auflager bleiben genau wie für die einfachen Balkenträger des III. Abschnitts bestimmt. Da die Länge der Verticale m

$$h_m \text{ gleich dem Absolutwerthe von } \mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}k,$$

so können auch die Formeln 10) 12) noch vereinfacht werden. Wenn beispielsweise, wie gewöhnlich, die Z-Gurtung vom geraden Verbindungsgurte aus in positiver Ordinatenrichtung liegt, so folgen mit $h_m = \mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}k$

(13) $$X'_m = \pm H\frac{x}{\lambda}, \qquad \mathfrak{X}_m = (\mathfrak{X}_m) \pm \mathfrak{H}\frac{x}{\lambda},$$

worin wie auch in 10) 12) bei horizontalem Verbindungsgurte noch $x = \lambda$ wird.

Gerade Z-Gurtung als Verbindungsgurtung der Auflager. Für diesen Fall hat man

(14) $$\begin{cases} \mathfrak{z}_m = \frac{m}{n}k, & z_m = z, \\ w_d = \mathfrak{z}_m - \varepsilon\frac{k}{n}, & w_v = \mathfrak{z}_m - \nu\frac{k}{n} \end{cases}$$

und damit treten an Stelle von 2)

(15) $$X'_m = D'_m = V'_m = 0,$$

(16) $$Z'_m = \mp H\left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}k\right)\frac{z}{\lambda h_{m-1}},$$

sowie an Stelle von 7)

(17) $$\mathfrak{X}_m = (\mathfrak{X}_m), \qquad \mathfrak{D}_m = (\mathfrak{D}_m), \qquad \mathfrak{V}_m = (\mathfrak{V}_m),$$

(18) $$\mathfrak{Z}_m = (\mathfrak{Z}_m) \mp \mathfrak{H}\left(\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}k\right)\frac{z}{\lambda h_{m-1}}.$$

Alle Stabkräfte und ihre Grenzwerthe mit Ausnahme derjenigen des geraden Verbindungsgurts der Auflager sind wieder ganz wie für die einfachen Balkenträger des III. Abschnitts. Da die Länge der Verticale $m - 1$

$$h_{m-1} \text{ gleich dem Absolutwerthe von } \mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}k,$$

so können auch die Gleichungen 16) 18) noch einfacher geschrieben

werden. Wenn z. B., wie gewöhnlich, die X-Gurtung vom geraden Verbindungsgurte aus in positiver Ordinatenrichtung liegt, dann hat man mit $h_{m-1} = \mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n} k$

$$(19) \qquad Z'_m = \mp H \frac{z}{\lambda}, \qquad \mathfrak{Z}_m = (\mathfrak{Z}_m) \mp \mathfrak{H} \frac{z}{\lambda},$$

worin wie in 16) 18) bei horizontalem Verbindungsgurte noch $z = \lambda$ wird.

Parabolische X-Gurtung als Verbindungsgurtung der Auflager. Ist die Verbindungsgurtung einer Parabel von verticaler Axe durch Auflager l eingeschrieben und die Z-Gurtung von jener aus in positiver Ordinatenrichiung liegend, so hat man nach § 17, 42)

$$(20) \qquad \mathfrak{x}_m = m(2n-m)\frac{k}{n^2}, \qquad h_m = \mathfrak{z}_m - m(2n-m)\frac{k}{n^2},$$

woraus mit Rücksicht auf § 16, 5) 6)

$$\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n} k = h_m + m(n-m)\frac{k}{n^2},$$

$$\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n} k = (m-1)(n-m+1)\frac{k}{n^2},$$

$$w_d - \frac{m-\varepsilon}{n} k = [m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1)]\frac{k}{n^2},$$

$$w_v - \frac{m-\nu}{n} k = [m(n-m) - \nu(n-2m+1)]\frac{k}{n^2}.$$

Hiermit lassen sich nach 2) die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften auch wie folgt ausdrücken:

$$(21) \qquad \begin{cases} X'_m = \pm H\, m(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{k}{nl} \pm H\dfrac{x_m}{\lambda}, \\[2mm] Z'_m = \mp H(m-1)(n-m+1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{k}{nl}, \\[2mm] D'_m = \mp H\left(n-2m+1-m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{k}{nl}, \\[2mm] V'_m = \pm H\left(n-2m+1-m\dfrac{n-m}{\nu}\right)\dfrac{k}{nl}, \end{cases}$$

und mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(22) \qquad c = \left(1 - \mathfrak{H}\frac{2k}{gl^2}\right)\frac{g\lambda}{2}$$

die ganzen vom Eigengewicht allein herrührenden Stabkräfte nach 7):

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp c\, m(n-m)\,\frac{x_m}{h_m} \pm \mathfrak{H}\,\frac{x_m}{\lambda}, \\ \mathfrak{Z}_m = \pm c(m-1)(n-m+1)\,\frac{z_m}{h_{m-1}}, \\ \mathfrak{D}_m = \pm c\left(n-2m+1-m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}, \\ \mathfrak{V}_m = \mp c\left(n-2m+1-m\,\frac{n-m}{\nu}\right) \pm \lambda g_s. \end{cases}$$

Für den gewöhnlichen Fall, dass $k=f$, die betrachtete Oeffnung ohne Zwischengelenk halb so gross als diejenige mit Zwischengelenk, die Auflager der Letzteren in gleicher Höhe und g in beiden Oeffnungen gleich gross angenommen werden, folgen aus 23) wegen $c=0$

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \pm\mathfrak{H}\,\frac{x_m}{\lambda}, & \mathfrak{Z}_m = 0, \\ \mathfrak{D}_m = 0, & \mathfrak{V}_m = \pm\lambda g_s. \end{cases}$$

Die Gleichungen 23) 24) für $\mathfrak{Z}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ würden auch bestehen bleiben, wenn die Z-Gurtung nicht, wie oben vorausgesetzt, von der X-Gurtung aus in positiver Ordinatenrichtung läge, was jedoch bei der angenommenen Gurtungsform praktisch allein vorkommen wird.

Parabolische Z-Gurtung als Verbindungsgurtung der Auflager. Ist die Verbindungsgurtung wieder einer Parabel von verticaler Axe durch Auflager l eingeschrieben und die X-Gurtung von ihr aus in positiver Ordinatenrichtung liegend, so hat man nach § 17, 42)

$$(25)\quad \mathfrak{z}_m = m(2n-m)\,\frac{k}{n^2}, \qquad h_m = \mathfrak{x}_m - m(2n-m)\,\frac{k}{n^2},$$

woraus mit Rücksicht auf § 16, 5) 6)

$$\mathfrak{z}_m - \frac{m}{n}\,k = m\,(n-m)\,\frac{k}{n^2},$$

$$\mathfrak{x}_{m-1} - \frac{m-1}{n}\,k = h_{m-1} + (m-1)(n-m+1)\,\frac{k}{n^2},$$

$$w_d - \frac{m-\varepsilon}{n}\,k = [m(n-m) - \varepsilon(n-2m+1)]\,\frac{k}{n^2},$$

$$w_v - \frac{m-\nu}{n}\,k = [m(n-m) - \nu(n-2m-1)]\,\frac{k}{n^2}.$$

Hiermit lassen sich nach 2) die Beiträge eines beliebigen Horizontalschubs H zu den Stabkräften auch wie folgt ausdrücken:

$$(26)\quad \begin{cases} X'_m = \pm Hm(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}\dfrac{k}{nl}, \\[2mm] Z'_m = \mp H(m-1)(n-m+1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}}\dfrac{k}{nl} \mp H\dfrac{z_m}{\lambda}, \\[2mm] D'_m = \mp H\left(n-2m+1-m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\dfrac{k}{nl}, \\[2mm] V'_m = \pm H\left(n-2m-1-m\dfrac{n-m}{v}\right)\dfrac{k}{nl}, \end{cases}$$

und nach 7) mit der abkürzenden Bezeichnung 22) die ganzen vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte:

$$(27)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \mp cm(n-m)\dfrac{x_m}{h_m}, \\[2mm] \mathfrak{Z}_m = \pm c(m-1)(n-m+1)\dfrac{z_m}{h_{m-1}} \mp \mathfrak{H}\dfrac{z_m}{\lambda}, \\[2mm] \mathfrak{D}_m = \pm c\left(n-2m+1-m\dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}, \\[2mm] \mathfrak{V}_m = \mp c\left(n-2m-1-m\dfrac{n-m}{v}\right) \mp \lambda g_x. \end{cases}$$

Für den gewöhnlichen Fall, dass $k = f$, die betrachtete Oeffnung ohne Zwischengelenk halb so gross als diejenige mit Zwischengelenk, die Auflager der Letzteren in gleicher Höhe und g in beiden Oeffnungen gleich gross angenommen werden, folgen aus 27) wegen $c = 0$

$$(28)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = 0, & \mathfrak{Z}_m = \mp \mathfrak{H}\dfrac{z_m}{\lambda}, \\[2mm] \mathfrak{D}_m = 0, & \mathfrak{V}_m = \mp \lambda g_x. \end{cases}$$

Die Gleichungen 27) 28) für $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{V}_m$ würden auch bestehen bleiben, wenn die X-Gurtung nicht von der Z-Gurtung aus in positiver Ordinatenrichtung läge, wie wir oben praktischen Bedürfnissen entsprechend vorausgesetzt haben. — (Beispiele 93—103, Aufgabe 42).

§ 80. Continuirliche Bogenträger beliebigen Systems. Grenzmomente bei gleichmässig vertheilter bewegter Last. †

Obschon die Berechnung continuirlicher Bogen nach dem in §§ 78, 79 Gesagten ohne Weiteres vorgenommen werden kann, wollen wir doch wie bei früher betrachteten Trägerarten noch die Grenzwerthe des Moments M_s im Ganzen ausdrücken, selbstverständlich nur für Oeffnungen ohne Zwischengelenke, da die Grenzwerthe

für Oeffnungen mit Zwischengelenk in §§ 67, 68 gegeben sind. Form und System des Trägers können beliebig sein. Zunächst handelt es sich um gleichmässig vertheilte bewegte Last, im folgenden Paragraphen um bewegte Radlastzüge.

Wenn $\mathfrak{M}_s$ den Beitrag des gesammten Eigengewichts zu M_s, H den von der Verkehrslast allein herrührenden Horizontalschub und (M_s) das von der Verkehrslast herrührende Moment für $H = 0$ bezeichnen, dann hat man nach § 78, 2)

$$M_s = \mathfrak{M}_s + (M_s) - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H. \tag{1}$$

Die Grenzwerthe von (M_s) sind die in § 24 für einfache Balkenträger gegebenen. Als Grenzwerthe von H hat man nach § 67 $H = 0$ und, jenachdem die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenk gleich oder verschieden hoch liegen,

$$H = \frac{pl^2}{8f} \quad \text{bezw.} \quad H = \frac{(l-d)d}{lf-kd}\frac{pl}{2}, \tag{2}$$

welche Ausdrücke sich jedoch auf die Verhältnisse in der Oeffnung mit Zwischengelenken beziehen. Demgemäss erhält man folgende Grenzwerthe von M_s. Wenn der Drehpunkt u, w innerhalb der Spannweite l liegt: für $w < \frac{k}{l}u$,

$$\begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l-c-v)+cv]\frac{p}{2} + \left(u\frac{k}{l} - w\right)H, \\ M_s = \mathfrak{M}_s \end{cases} \tag{3}$$

und für $w > \frac{k}{l}u$,

$$\begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + [u(l-c-v)+cv]\frac{p}{2}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H. \end{cases} \tag{4}$$

Wenn der Drehpunkt u, w ausserhalb der Spannweite l liegt: für $u < l$ und gleichzeitig $w > \frac{k}{l}u$ oder $u > l$ und $w < \frac{k}{l}u$,

$$\begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + u(l-z)(l-v)\frac{p}{2l} - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + (l-u)cz\frac{p}{2l}, \end{cases} \tag{5}$$

für $u < l$ und gleichzeitig $w < \frac{k}{l}u$ oder $u > l$ und $w < \frac{k}{l}u$,

$$\begin{cases} M_s = \mathfrak{M}_s + u(l-z)(l-v)\frac{p}{2l}, \\ M_s = \mathfrak{M}_s + (l-u)cz\frac{p}{2l} - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H. \end{cases} \tag{6}$$

In diesen Gleichungen ist nach § 24, 1)

$$(7) \qquad z = \frac{v - c}{cl - u(l - v + c)} cl$$

und mit Rücksicht hierauf können die (M_s) entsprechenden Ausdrücke in 5) 6) ganz wie in § 24 noch anders ausgedrückt oder durch die dort gegebenen Näherungswerthe ersetzt werden.

Soll das Eigengewicht innerhalb jeder Oeffnung als gleichmässig vertheilt gelten, dann hat man den vom Eigengewicht herrührenden Horizontalschub, jenachdem die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenk gleich oder verschieden hoch liegen,

$$(8) \qquad \mathfrak{H} = \frac{gl^2}{8f} \quad \text{bezw.} \qquad \mathfrak{H} = \frac{(l-d)\,d}{lf - kd}\,\frac{gl}{2},$$

welche Ausdrücke sich auf die Verhältnisse in der Oeffnung mit Zwischengelenken beziehen. Will man sich dies Eigengewicht innerhalb der betrachteten Oeffnung ohne Zwischengelenk nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt denken, in welchen die Fahrbahnlast angreift, dann wird

$$(9) \qquad \mathfrak{M}_s = [u(l - c - v) + cv]\,\frac{g}{2} - \left(w - \frac{k}{l}\,u\right) \mathfrak{H}.$$

Im Allgemeinen ist $\mathfrak{M}_s$ durch § 78, 1) oder 2) bestimmt.

Mit den abgeleiteten Grenzmomenten sind bei beliebigem einfachem Fachwerksystem auch die Grenzbeanspruchungen der Stäbe bestimmt und folgen dieselben beispielsweise für einfaches System mit Verticalen aus § 16, 3) — 6). Doch ist es im Allgemeinen bequemer unter Anwendung der Spezialformeln des III. Abschnitts (für bestimmte Trägerformen) nach der Anleitung in §§ 78, 79 vorzugehen.

§ 81. Continuirliche Bogenträger beliebigen Systems. Grenzmomente für bewegte Radlastzüge.†

Ganz wie im vorigen Paragraphen hat man bei beliebiger Belastung

$$(1) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + (M_s) - \left(w - \frac{k}{l}\,u\right) H,$$

worin der von der Verkehrslast allein herrührende Horizontalschub, wenn die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenken in gleicher Höhe liegen,

$$(2) \qquad H = \frac{1}{2f}\left[\sum_0^d Pa + \sum_d^l P(l - a)\right],$$

und wenn sie in verschiedener Höhe liegen,

$$(3)\qquad H = \frac{l-d}{lf-kd}\sum_0^d Pa + \frac{d}{lf-kd}\sum_d^l P(l-a).$$

Diese Ausdrücke für H wie die unten folgenden für dH beziehen sich abweichend von den übrigen auf die Verhältnisse in der Oeffnung mit Zwischengelenken. Das von der Verkehrslast allein herrührende Moment (M_s) und seine Grenzwerthe bei bewegter Belastung sind aus § 25 zu entnehmen. Für beliebige Belastung lässt sich dann ausdrücken

$$(4)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{u}{l} - \frac{u-c}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a) - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H.$$

Bei Angabe der Grenzmomente bezeichne H den Maximalwerth des Horizontalschubs, welcher sich aus 2) oder 3) ergibt, wenn Zug I mit Rad O bei d die Oeffnung mit Zwischengelenk belastet. Wir erhalten dann die Grenzmomente wie folgt. Wenn der Drehpunkt u, w innerhalb der Spannweite l liegt: Für $w < \frac{k}{l}u$,

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$ $\qquad M_s$ nach 1),

Belastung durch Eigengewicht allein, $\qquad M_s = \mathfrak{M}_s$;

für $w > \frac{k}{l}u$,

Belastung durch Zug I von 0 bis l, Rad O bei c für $z > v$, bei v für $z < c$,

$$(5)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa + \left(\frac{u}{l} - \frac{u-v}{v-c}\right)\sum_c^v P(z-a)$$
$$+ \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a).$$

Zweiter Grenzwerth

$$(6)\qquad M_s = \mathfrak{M}_s - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H.$$

Wenn der Drehpunkt u, w ausserhalb der Spannweite l liegt: Für $u < l$ und gleichzeitig $w > \frac{k}{l}u$ oder $u > l$ und $w < \frac{k}{l}u$,

Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a) - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H, \tag{7}$$

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa; \tag{8}$$

für $u < l$ und gleichzeitig $w < \frac{k}{l}u$ oder $u > l$ und $w > \frac{k}{l}u$,
Belastung durch Zug II von v bis l, Vorderrad O bei v,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{u}{l}\sum_v^l P(l-a), \tag{9}$$

Belastung durch Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c,

$$M_s = \mathfrak{M}_s + \frac{l-u}{l}\sum_0^c Pa - \left(w - \frac{k}{l}u\right)H. \tag{10}$$

Bewegt sich ein bestimmtes Lastsystem auf dem Träger, so ändern sich mit jeder unendlich kleinen Verrückung alle a um das gleiche da, unser Moment ändert sich um

$$dM_s = \left(\sum_0^c P + \frac{u-c}{v-c}\sum_c^v P - \frac{u}{l}\sum_0^l P\right)da - \left(w - \frac{k}{l}u\right)dH, \tag{11}$$

worin, wenn die Stützpunkte der Oeffnung mit Zwischengelenken gleich hoch liegen,

$$dH = \left[\sum_0^d P - \sum_d^l P\right]\frac{da}{2f}, \tag{12}$$

und wenn sie nicht gleich hoch liegen,

$$dH = \left[(l-d)\sum_0^d P - d\sum_d^l P\right]\frac{da}{lf-kd}. \tag{13}$$

Diese Gleichungen können ganz wie die entsprechenden für bereits betrachtete Trägerarten zur Bestimmung oder Controle der ungünstigsten Belastungen verwendet werden.

Der Werth von z in obigen Gleichungen ist durch § 80, 7) bestimmt und auch das in den beiden letzten Absätzen des vorigen Paragraphen Gesagte kann hier wiederholt werden. — (Aufgabe 43.)

§ 82. **Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Allgemeines.**

Anstatt wie bei den Balkenfachwerken des dritten Abschnitts ein festes und ein horizontal frei verschiebbares Gelenkauflager anzuordnen, kann man ohne Störung der statischen Bestimmtheit und Stabilität auch ein festes und ein schief verschiebbares Gelenkauflager anwenden (§ 2, Fig. 284). Träger dieser Art hat zuerst *Foeppl* empfohlen und patentiren lassen (Die neuen Trägersysteme f. eis. Brücken, Leipzig 1878 S. 25; Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880 S. 127). Durch die schiefe Auflagerung soll eine Materialersparniss erreicht werden, indem sich der bei horizontal verschiebbarem Auflager eintretende Zug im Untergurt mit dem als Druck wirkenden Horizontalschube combinirt, wie wir dies schon beim Träger mit constantem Horizontalschube gesehen haben. Ausgeführt wurde der Träger mit schief verschiebbarem Auflager bis jetzt nicht. Für Eisenbahnbrücken sind seiner Anwendung die durch Temperaturänderungen bedingten Hebungen und Senkungen des verschiebbaren Trägerendes hinderlich, wenn dieselben auch durch den von *Foeppl* angenommenen „Schlepper" in ihrer ungünstigen Wirkung wesentlich beschränkt werden. Als Dachbinder könnte der Träger eher in Frage kommen, doch wird hier die mögliche Materialersparniss gewöhnlich nur unbedeutend sein. Immerhin wollen wir das für die Berechnung des Trägers Nöthige kurz geben.

Der Ursprung der Coordinaten liege im festen Gelenkauflager, für das verschiebbare Auflager seien l, k die Coordinaten, α bezeichne den Winkel der Verschiebungsbahn gegen die Horizontale oder der Normale zu dieser Bahn gegen die Verticale. Dann hat man das Moment der äusseren Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger in Hinsicht eines Drehpunkts der Coordinaten u, w nach § 8, 13)

$$(1) \qquad M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H,$$

und wenn (M_s) dem Falle $H = 0$ oder $\alpha = 0$, das heisst dem einfachen Balkenträger des dritten Abschnitts entspricht,

$$(2) \qquad M_s = (M_s) - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H.$$

Für die Verticalreactionen der Stützen hat man nach § 8, 15), wenn (V), (V') sich auf den Fall $H = 0$ beziehen,

$$(3) \qquad V = (V) + \frac{k}{l} H, \qquad V' = (V') - \frac{k}{l} H.$$

Da nun allgemein (Fig. 284)

$$(4)\qquad H = V' \operatorname{tg} \alpha,$$

so folgen aus 3) für beliebige Belastung

$$(5)\qquad H = \frac{l \operatorname{tg} \alpha}{l + k \operatorname{tg} \alpha} (V');$$

$$(6)\qquad V = (V) + \frac{k \operatorname{tg} \alpha}{l + k \operatorname{tg} \alpha} (V'), \qquad V' = \frac{l}{l + k \operatorname{tg} \alpha} (V').$$

Die durch die Buchstaben in Klammern bezeichneten Grössen sind in § 23 für alle Fälle ausgedrückt und wir wollen hier nur die Formeln für M_s spezieller anführen. Wenn bei den Abscissen $e_1, e_2, \ldots$ die Lasten $K_1, K_2, \ldots$ auf den Träger kommen, so erhält man mit der Bezeichnung

$$(7)\qquad \beta = \frac{u + w \operatorname{tg} \alpha}{l + k \operatorname{tg} \alpha}$$

aus 2) 5) wegen § 23, 2) 3)

$$(8)\qquad M_s = (1 - \beta) \sum_0^s K e + \sum_s^l K (u - \beta e).$$

Wirken irgendwelche Lasten $P_1, P_2, \ldots$ bei $a_1, a_2, \ldots$ zunächst auf ein System von Zwischenträgern und bezeichnen c, v die Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so liefert 2) wegen § 23, 4) 5) für diese Lasten

$$(9)\qquad \begin{cases} M_s = (1 - \beta) \sum_0^c P a + \left(\beta - \frac{u - c}{v - c}\right) \sum_c^v E (z - a) \\ \qquad\qquad + \beta \sum_v^l P (z' - a) \\ \text{mit} \quad z = \frac{v - u}{c - u + \beta (v - c)}\, c, \qquad z' = \frac{u}{\beta}. \end{cases}$$

Für eine zwischen den Punkten 0 und l auf die Fahrbahn gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit schliesslich folgt mit § 23, 6) 7)

$$(10)\qquad M_s = \left[u (l - c - v) + c v - \frac{l w - k u}{l + k \operatorname{tg} \alpha}\, l \operatorname{tg} \alpha\right] \frac{p}{2}.$$

Für den praktisch allein in Frage kommenden Fall, dass die Auflager in gleicher Höhe liegen, hat man nach 2) 3) 5) mit $k = 0$

$$(11)\qquad M_s = (M_s) - H w,$$

$$(12)\qquad V = (V) \qquad V' = (V'), \qquad H = V' \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Verticalreactionen der Stützen ergeben sich ganz wie für die gewöhnlichen Balkenträger des dritten Abschnitts. In 8) 9) vereinfacht sich der Ausdruck für β etwas und aus 10) wird

$$(13) \qquad M_s = [u(l-c-v) + cv - lw \operatorname{tg} \alpha] \frac{p}{2}.$$

Liegt überdies in der Richtungslinie des Horizontalschubs eine Gurtung, so bleiben bei einfachem Fachwerksystem auch sämmtliche nicht zu Letzterer gehörigen Stäbe von H unbeeinflusst. Denn da der Drehpunkt zur Aufstellung der Momentengleichung für jeden solchen Stab in der Richtungslinie des Horizontalschubs liegt, so folgt aus 2) mit $k = w = 0$

$$(14) \qquad M_s = (M_s).$$

Von den dem Falle $\alpha = 0$ oder $H = 0$ entsprechenden Beanspruchungen des Horizontalgurts subtrahirt sich einfach der Horizontalschub, sodass, wenn von einem ziehenden Horizontalschube (Fig. 285) abgesehen wird, behufs Materialersparniss der Untergurt in der Richtungslinie des Horizontalschubs liegen muss und die Beanspruchung jedes seiner Stäbe sich ausdrückt

$$(15) \qquad U = (U) - H,$$

unter (U) die Beanspruchung für $H = 0$ verstanden. — (Aufgabe 44.)

§ 83. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Einfaches System mit Verticalen und einer horizontalen Gurtung. Bewegte Radlastzüge.†

Wir betrachten nun spezieller Fachwerke mit schief verschiebbarem Auflager, bei welchen beide Stützpunkte in der Axe eines horizontalen Untergurts liegen und die Spannweite l durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt ist, in deren jedem sich eine wirksame Diagonale befindet. Nach dem vorigen Paragraphen sind dann die Verticalreactionen der Stützen und die Beanspruchungen sämmtlicher nicht zum erwähnten Horizontalgurte gehöriger Stäbe, sowie die Grenzwerthe dieser Reactionen und Stabkräfte genau wie bei horizontal verschiebbarem Auflager bestimmt (III. Abschnitt). Es erübrigt also nur noch die Grenzwerthe des Horizontalschubs und der Stabkräfte des horizontalen Untergurts festzustellen. Dies soll zunächst für bewegte Radlastzüge und im folgenden Paragraphen für gleichmässig vertheilte bewegte Last geschehen.

Bezeichnet $\mathfrak{H}$ den Horizontalschub für Eigengewicht allein, während sich die Summen $\sum$ auf die Verkehrslast allein beziehen, so hat man nach § 82, 12) mit § 23, 5 für beliebige Belastung

$$(1)\qquad H = V' \operatorname{tg}\alpha = \mathfrak{H} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{l}\sum_0^l Pa.$$

Für die Beanspruchungen des horizontalen Untergurts haben wir, wenn derselbe die X-Gurtung bildet,

$$(2)\qquad X_m = (X_m) - H,$$

und wenn er die Z-Gurtung bildet,

$$(3)\qquad Z_m = (Z_m) - H.$$

Die $H = 0$ entsprechenden Werthe (X_m), (Z_m) sind durch § 33, 1) 2) bestimmt und wir erhalten damit, wenn $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$ dem Eigengewichte allein entsprechen, für beliebige Belastung, bei horizontaler X-Gurtung in der Richtungslinie von H,

$$(4)\qquad X_m = \mathfrak{X}_m + \Big[(n-m)\sum_0^v Pa + m\sum_v^l P(l-a)\Big]\frac{1}{nh_m} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{l}\sum_0^l Pa,$$

bei horizontaler Z-Gurtung in der Richtungslinie von H,

$$(5)\qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + \Big[(n-m+1)\sum_0^c Pa$$
$$+ (m-1)\sum_c^l P(l-a)\Big]\frac{1}{nh_{m-1}} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{l}\sum_0^l Pa,$$

worin $c = (m-1)\lambda$, $v = m\lambda$. Wird zur Abkürzung gesetzt

$$(6)\qquad \gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda},$$

so lassen sich die für beliebige Belastung gültigen Gleichungen 4) 5) auch wie folgt schreiben

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} X_m &= \mathfrak{X}_m + \Big[(n-m-\gamma h_m)\sum_0^v Pa \\ &\qquad + (m+\gamma h_m)\sum_v^l P(z-a)\Big]\frac{1}{nh_m} \\ &\text{mit}\quad z = \frac{m}{m+\gamma h_m}\, l, \end{aligned}\right.$$

(8)
$$\begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m + \Big[(n-m+1-\gamma h_{m-1})\sum_0^c Pa \\ \qquad\qquad + (m-1+\gamma h_{m-1})\sum_c^l P(z-a)\Big]\frac{1}{n h_{m-1}} \\ \text{mit} \quad z = \frac{m-1}{m-1+\gamma h_{m-1}}\, l. \end{cases}$$

Nach 1) ist der untere Grenzwerth des Horizontalschubs $H = \mathfrak{H}$, der obere ergibt sich aus 1) bei Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei l. Bezüglich der Grenzbeanspruchungen des Untergurts ist zu beachten, dass nach 7) 8) stets $z < l$ ist. Die Grenzwerthe bei horizontaler X-Gurtung in der Richtungslinie von H erhält man in dem gewöhnlichen Falle, dass $z > v$ ist, wie folgt:
Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei v (mitunter Zug II von 0 bis v, Vorderrad O bei v),

(9)
$$X_m = \mathfrak{X}_m + \Big[(n-m-\gamma h_m)\sum_0^v Pa + (m+\gamma h_m)\sum_v^z P(z-a)\Big]\frac{1}{n h_m},$$

Belastung durch Zug II von z bis l, Vorderrad O bei l,

(10)
$$X_m = \mathfrak{X}_m - \frac{m+\gamma h_m}{n h_m}\sum_z^l P(a-z).$$

Für $z < v$ würden gelten:
Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei l, X_m nach 7),
„ „ Eigengewicht allein, $X_m = \mathfrak{X}_m$.
Grenzwerthe bei horizontaler Z-Gurtung in der Richtungslinie von H, in dem gewöhnlichen Falle, dass $z > c$:
Belastung durch Zug I von 0 bis z, Rad O bei c (mitunter Zug II von 0 bis c, Vorderrad O bei c),

(11)
$$Z_m = \mathfrak{Z}_m + \Big[(n-m+1-\gamma h_{m-1})\sum_0^c Pa + (m-1+\gamma h_{m-1})\sum_c^z P(z-a)\Big]\frac{1}{n h_{m-1}},$$

Belastung durch Zug II von z bis l, Vorderrad O bei l,

$$(12) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m - \frac{m-1+\gamma h_{m-1}}{n h_{m-1}} \sum_z^l P(a-z);$$

wenn jedoch $z < c$ wäre:

Belastung durch Zug II von 0 bis l, Vorderrad O bei l, Z_m nach 8),
„ „ Eigengewicht allein, $Z_m = \mathfrak{Z}_m$.

Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten, dann hat man

$$(13) \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{V}' \operatorname{tg} \alpha = \frac{gl}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

sowie nach 2) 3) mit § 31, 16) bei horizontaler X-Gurtung in der Richtungslinie von H

$$(14) \qquad \mathfrak{X}_m = m(n-m) \frac{g\lambda^2}{2h_m} - \frac{gl}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

und bei horizontaler Z-Gurtung in der Richtungslinie von H

$$(15) \qquad \mathfrak{Z}_m = (m-1)(n-m+1) \frac{g\lambda^2}{2h_{m-1}} - \frac{gl}{2} \operatorname{tg} \alpha .$$

Haben wir beispielsweise einen Parabelträger, so ist nach § 41, 3)

$$h_m = m(n-m) \frac{4f}{n^2}$$

und die Gleichungen 14) 15) lassen sich dann schreiben

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}_m = \dfrac{gl^2}{8f} - \dfrac{gl}{2} \operatorname{tg} \alpha , \\ \mathfrak{Z}_m = \dfrac{gl^2}{8f} - \dfrac{gl}{2} \operatorname{tg} \alpha . \end{cases}$$

Wählen wir nun

$$(17) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{4f}, \qquad \text{womit} \qquad \gamma = \frac{n}{4f},$$

so wird der horizontale Untergurt (ebenso wie die Diagonalen) bei Belastung durch Eigengewicht allein gar nicht beansprucht.

Selbstverständlich gehen alle Gleichungen mit $\alpha = 0$ oder $H = 0$, $\gamma = 0$, $z = l$ in die entsprechenden des dritten Abschnitts über. — (Beispiel 105.)

§ 84. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Einfaches System mit Verticalen und einer horizontalen Gurtung. Gleichmässig vertheilte bewegte Last. †

Bezüglich der Verticalreactionen der Stützen, der Beanspruchungen aller nicht zum horizontalen Untergurte gehörigen Stäbe und der Beanspruchungen der Letzteren für beliebige Belastung ist auf das im vorigen Paragraphen Gesagte zu verweisen. Hier haben wir nur noch die Grenzwerthe des Horizontalschubs und der Beanspruchungen des horizontalen Untergurts bei gleichmässig vertheilter bewegter Last festzustellen. Dieselben ergeben sich aus den Grenzwerthen des vorigen Paragraphen, wenn auf den durch die Verkehrslast ergriffenen Strecken $P = p\,da$ gesetzt wird. Wir erhalten als Grenzwerthe des Horizontalschubs

$$(1) \qquad H = \mathfrak{H} + \frac{pl}{2} \operatorname{tg} \alpha, \qquad H = \mathfrak{H}.$$

Grenzbeanspruchungen des Untergurts als X-Gurtung: in dem gewöhnlichen Falle, dass $z > m\lambda$,

$$(2) \qquad \begin{cases} X_m = \mathfrak{X}_m + \dfrac{m^2}{h_m} \dfrac{n - m - \gamma h_m}{m + \gamma h_m} \dfrac{p\lambda^2}{2}, \\ X_m = \mathfrak{X}_m - \dfrac{h_m}{m + \gamma h_m} \dfrac{p\lambda^2}{2} n \gamma^2; \end{cases}$$

wenn jedoch $z < m\lambda$ wäre,

$$(3) \qquad X_m = \mathfrak{X}_m + m(n - m) \frac{p\lambda^2}{2h_m} - \frac{pl}{2} \operatorname{tg} \alpha, \qquad X_m = \mathfrak{X}_m.$$

Grenzbeanspruchungen des Untergurts als Z-Gurtung: in dem gewöhnlichen Falle, dass $z > (m-1)\lambda$,

$$(4) \qquad \begin{cases} Z_m = \mathfrak{Z}_m + \dfrac{(m-1)^2}{h_{m-1}} \dfrac{n - m + 1 - \gamma h_{m-1}}{m - 1 + \gamma h_{m-1}} \dfrac{p\lambda^2}{2}, \\ Z_m = \mathfrak{Z}_m - \dfrac{h_{m-1}}{m - 1 + \gamma h_{m-1}} \dfrac{p\lambda^2}{2} n \gamma^2; \end{cases}$$

wenn jedoch $z < (m-1)\lambda$ wäre,

$$(5) \qquad Z_m = \mathfrak{Z}_m + (m-1)(n - m + 1) \frac{p\lambda^2}{2h_{m-1}} - \frac{pl}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad Z_m = \mathfrak{Z}_m.$$

Die z sind durch § 83, 7) 8) bestimmt.

Soll das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten, so hat man für $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{Z}_m$ die Gleichungen § 83, 13) bis 15), womit die Grenzwerthe von H werden

$$(6) \qquad H = \frac{q}{g}\,\mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{gl}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

und in den allerdings kaum vorkommenden Fällen 3) 5) die oberen Grenzbeanspruchungen des Untergurts

$$(7) \qquad X_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{X}_m \text{ bezw. } \qquad Z_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{Z}_m.$$

Das am Schlusse des vorigen Paragraphen bezüglich des Parabelträgers Gesagte gilt natürlich auch hier. Wählen wir also den Neigungswinkel α der Auflagerbahn nach § 83, 17), so sind die Eigengewichtsbeanspruchungen des Untergurts gleich Null, womit nach § 19, 2) 3) beide Grenzbeanspruchungen gleich gross und von verschiedenen Vorzeichen werden, nämlich die Grenzbeanspruchungen des Untergurts als X-Gurtung nach 2)

$$(8) \qquad X_m = \pm \frac{h_m}{m + \gamma h_m}\,\frac{p\lambda^2}{2}\,n\gamma^2,$$

und die Grenzbeanspruchungen des Untergurts als Z-Gurtung

$$(9) \qquad Z = \pm \frac{h_{m-1}}{m - 1 + \gamma h_{m-1}}\,\frac{p\lambda^2}{2}\,n\gamma^2.$$

Die beiden Vorzeichen entsprechen den beiden Grenzwerthen. Man beachte, dass die Gleichungen 8) 9) nur für Parabelträger und bei bestimmtem α gelten. — (Beispiel 104).

§ 85. Träger mit imaginären Gelenken.

Anstatt wirklicher (reeller) Gelenke kann man zur Erzeugung statischer Bestimmtheit auch sogenannte *imaginäre Gelenke* anwenden, worauf zuerst *Foeppl* hingewiesen hat (*Naviers* Mechanik d. Baukunst, bearb. v. Westphal u. Foeppl, Hannover 1879 S. 527; *Foeppl*, Theorie d. Fachwerks, Leipzig 1880 S. 40, 115). Als imaginäres Gelenke bezeichnet er den Schnittpunkt (Fig. 288) der Richtungslinien zweier Stäbe mit getrennten Endgelenken, durch welche Stäbe sich ein Schnitt d so führen lässt, dass kein andrer Trägertheil getroffen wird. In Fig. 286 haben wir einen Bogen mit imaginären Kämpfergelenken, in Fig. 287 die Oeffnung mit imaginären Zwischengelenken eines continuirlichen Gelenkträgers angedeutet. Die beiden das imaginäre

Gelenk bestimmenden Stäbe dürfen sich auch kreuzen. Da die äussern Kräfte links (oder rechts) des Schnittes d mit den zwei getroffenen Stabkräften im Gleichgewichte sein müssen, so geht ihre Resultante stets durch den Schnittpunkt d, f, wonach ganz wie für reelle Gelenke das Moment der äusseren Kräfte links des Schnittes d in Hinsicht des Gelenks d, f gleich Null ist. Träger mit imaginären Gelenken wurden bis jetzt nicht ausgeführt und es lässt sich auch kein besonderer Vorzug derselben gegenüber solchen mit reellen Gelenken erkennen. Am ehesten könnten sie noch in Betracht kommen, wenn man ohnehin alle Knotenpunkte gelenkartig herstellt. Wir wollen nun als Beispiel eines Trägers mit imaginärem Gelenke den Bogen mit reellen Kämpfergelenken und einem imaginären Zwischengelenke betrachten (Fig. 288), uns aber dabei auf die Ableitung der Momente M_s und Stützenreactionen für beliebige Belastung beschränken. Sprengbogen und Hängebogen sind zugelassen. Das Vorgehen ist ganz dem in § 66 entsprechend.

Der Ursprung der Coordinaten liege im Kämpfergelenke links, für das Kämpfergelenke rechts seien l, k die Coordinaten. Dann hat man das Moment der äusseren Kräfte links eines beliebigen Schnittes s durch den Träger in Hinsicht eines Drehpunkts der Coordinaten u, w

$$M_s = \frac{l-u}{l} S + \frac{u}{l} S' - \left(w - \frac{k}{l} u\right) H, \tag{1}$$

worin S, S' die Momente der vor s bezw. nach s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht der Gelenke 0 und l. Diese Gleichung liefert mit $s = d,\ u = d,\ w = f$

$$M_d = 0 = \frac{l-d}{l} S_d + \frac{d}{l} S_d' - \left(f - \frac{k}{l} d\right) H,$$

woraus der Horizontalschub

$$H = \frac{(l-d) S_d + d S_d'}{lf - kd}. \tag{2}$$

Die Indices der S deuten an, auf welchen speciellen Schnitt sich Letztere beziehen. Der Ausdruck 2) stimmt genau mit dem entsprechenden für Bogen mit drei reellen Gelenken überein, doch ist zu beachten, dass jetzt der Punkt d im Allgemeinen nicht wie dort im Schnitte d liegt.

Greifen nun die Lasten $K_1, K_2, \ldots$ bei den Abscissen $e_1, e_2, \ldots$ am Träger an, dann hat man in 1) 2)

$$(3)\quad \begin{cases} S = \sum_0^s Ke, & S' = \sum_s^l K(l-e), \\ S_d = \sum_0^d Ke, & S_d' = \sum_d^l K(l-e), \end{cases}$$

womit aus 1) für Schnitte s zwischen 0 und d genau derselbe Ausdruck für M_s mit den gleichen r, t wie bei Bogen mit drei reellen Gelenken entsteht, während auch die Verticalreactionen der Stützen sich wie für diesen ausdrücken

$$(4)\quad \begin{cases} V = \frac{1}{l} \sum_0^l K(l-e) + \frac{k}{l} H, \\ V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Ke \qquad - \frac{k}{l} H. \end{cases}$$

Wirken irgendwelche Lasten $P_1, P_2, \ldots$ bei $a_1, a_2, \ldots$ zunächst auf ein System von Zwischenträgern und bezeichnen c, v bezw. x, y die Abscissen derjenigen Knotenpunkte, bei welchen der von Schnitt s bezw. Schnitt d getroffene Fahrbahnträger aufliegt, so gelten für diese Lasten die Gleichungen 1) 2) mit

$$(5)\quad \begin{cases} S = \sum_0^c Pa + \frac{c}{v-c} \sum_c^v P(v-a), \\ S' = \sum_v^l P(l-a) + \frac{l-v}{v-c} \sum_c^v P(a-e), \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} S_d = \sum_0^x Pa + \frac{x}{y-x} \sum_x^y P(y-a), \\ S_d' = \sum_y^l P(l-a) + \frac{l-y}{y-x} \sum_x^y P(a-x), \end{cases}$$

während die von den P herrührenden Vertiacalreactionen der Stützen wie bei Bogen mit drei reellen Gelenken ausgedrückt sind

$$(7)\quad \begin{cases} V = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l-a) + \frac{k}{l} H, \\ V' = \frac{1}{l} \sum_0^l Pa \qquad - \frac{k}{l} H, \end{cases}$$

Haben wir beispielsweise zwischen den Punkten 0 und l eine gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit, so entsprechen derselben nach § 10, 5)

$$S = cv\,\frac{p}{2}, \qquad S' = (l - c)(l - v)\,\frac{p}{2},$$

$$S_d = xy\,\frac{p}{2}, \qquad S_d' = (l - x)(l - y)\,\frac{p}{2},$$

und damit ein Horizontalschub

$$H = \frac{xy + (l - x - y)d}{lf - kd}\,\frac{pl}{2}, \tag{8}$$

sowie mit diesem H für beliebige Schnitte s das Moment

$$M_s = [u(l - c - v) + cv]\,\frac{p}{2} - \left(w - \frac{k}{l}\,u\right) H, \tag{9}$$

und die Verticalreactionen der Stützen

$$V = \frac{pl}{2} + \frac{k}{l}\,H, \qquad V' = \frac{pl}{2} - \frac{k}{l}\,H. \tag{10}$$

Für $x = y = d$ gehen alle Gleichungen in die für Bogen mit drei reellen Gelenken gültigen über. Selbstverständlich könnten wir die Theorie ganz wie im sechsten Abschnitte diejenige des Bogens mit drei reellen Gelenken weiter entwickeln, wozu indessen einstweilen keine Veranlassung vorliegt.

Kehren wir nochmals zu Trägern beliebiger Art mit imaginären Gelenken zurück, setzen jedoch einfaches System mit Verticalen voraus. Da wir uns in jedem Felde, in welchem behufs Bildung eines imaginären Gelenkes die Diagonale weggelassen ist, eine solche vom Querschnitte Null denken können, so wird die Ableitung der in §§ 16—21 gegebenen Gleichungen für dies System durch das Fehlen erwähnter Diagonalen nicht alterirt, die Formeln müssen für die *imaginären Diagonalen* bei jeder Belastung die Beanspruchung Null ergeben, während alle Stabkräfte ausser von der Belastung nach § 18 auch von den M, M', H abhängen, welche je nach der Trägerart verschieden sein können. Sind $M = M' = 0$ (Träger mit zwei Gelenkauflagern) und die Anordnung der Belastung und Stabaxen mit Einrechnung einer imaginären Diagonale zur Trägermitte symmetrisch, so müssen der vollständigen Symmetrie aller äussern Kräfte und Stabaxen wegen auch die Beanspruchungen symmetrisch zur Mitte liegender Stäbe gleich gross und beispielsweise die Bean-

spruchungen der zur imaginären Diagonale symmetrisch liegenden gleich Null sein. Man könnte versucht sein, weiter zu schliessen, dass auch die *Grenzbeanspruchungen* letzterer Diagonale wie die der imaginären Null sein müssen, weil man jede Belastung symmetrisch zur Mitte übertragen kann. Der Schluss wäre aber nur dann richtig, wenn zwei symmetrisch zur Mitte liegende Lasten gleiche H erzeugten, was nach 2) 6) im Allgemeinen nicht zutrifft. — (Beispiel 106, Aufgabe 45.)

VIII. Abschnitt.

Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme.

Ein Fachwerksystem wurde dann als *n*-fach bezeichnet, wenn die Füllungsglieder oder doch eins über das andre solcher, welche einen zusammenhängenden Linienzug bilden, durch andre gleichzeitig wirksame Füllungsglieder in *n* Abschnitte getheilt werden. Das Fachwerk kann dabei statisch bestimmt oder statisch unbestimmt sein, was sich nach den Angaben in § 14 entscheiden lässt. Fig. 289 beispielsweise zeigt ein einfaches Balkenfachwerk doppelten Systems, stabil und zweifach statisch unbestimmt, wir haben zwei Stäbe mehr als die statisch bestimmte Stabilität erfordert. Durch Entfernung der beiden durchstrichenen Stäbe kann ein statisch bestimmter stabiler Träger daraus hergestellt werden. Der Letztere lässt sich ohne alle Hypothesen nach rein statischen Gesetzen berechnen (Aufgabensammlung, Beispiele 13 und 14). In den folgenden Betrachtungen handelt es sich nur um statisch unbestimmte mehrfache Systeme.

Das gewöhnlichste Verfahren bei Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems besteht in Folgendem. *Das n-fache System wird in n einfache Systeme zerlegt und die Belastung auf die Knotenpunkte aller Systeme vertheilt gedacht, sodass z. B. zwei einander deckende Knotenpunkte verschiedener Systeme in jedem bestimmten Belastungsfalle gleiche Belastungen erhalten. Hierauf werden die einfachen Systeme getrennt berechnet und bei der Wiedervereinigung die Beanspruchungen zusammenfallender Stäbe oder Stababschnitte addirt.*

Dass vorstehendes Verfahren zu genauen Resultaten führen sollte, lässt sich bei der willkürlichen Grundanschauung des Nebeneinanderwirkens einfacher Systeme nicht annehmen. Die Genauigkeit wird wahrscheinlich abnehmen mit wachsender Verschiedenheit der bestimmten Belastungen entsprechenden Formänderungen solcher Stäbe in den einfachen Systemen, welche beim gegebenen Träger mehrfachen Systems zusammen fallen. Diese Vermuthung schien sich bei einzelnen

Berechnungen nach der Elasticitätstheorie statisch unbestimmter Fachwerke zu bestätigen (*Mohr*, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1874 S. 523, *Schäffer* u. *Sonne*, Brückenbau, Leipzig 1882 S. 320), doch liegen noch zu wenig vergleichende Berechnungen vor.

Nebenbei pflegt man bei dem erwähnten Verfahren stillschweigend anzunehmen, dass für bewegte Lasten die Grenzbeanspruchungen zusammenfallender Stäbe der einfachen Systeme in verschiedenen Belastungsfällen eintreten (Verticalen, Gurtungen bei Berechnung mit Radlastzügen). Die hieraus folgenden Fehler werden vermieden, wenn man die Addition der Beanspruchungen nach den für beliebige Belastung gültigen Formeln vornimmt und die Grenzwerthe der so erhaltenen Ausdrücke bestimmt. Dies wird im Folgenden für gewisse Fälle deshalb geschehen, weil wesentliche Vereinfachungen der Berechnung damit erreicht werden.

Trotz der Bedenken, welche gegen die Berechnung mehrfacher Systeme auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme bestehen, muss doch auf das Verfahren eingegangen werden. Der Einfachheit halber wird es noch lange Verwendung finden und für Gitterträger (§ 13) ist auch keine genauere Berechnung bekannt. Hier lässt sich nur dadurch helfen, dass man der Ungenauigkeit des Verfahrens und den im Gitter auftretenden Biegungsspannungen durch höhere Sicherheitscoefficienten (wenigstens für das Gitter) Rechnung trägt. Aber auch wenn bei Fachwerken mehrfachen Systems die Berechnung nach der Elasticitätstheorie durchgeführt werden soll, hat doch im Allgemeinen eine Frmittelung der ohngefähren Stabquerschnitte vorauszugehen (*Weyrauch*, Theorie elastischer Körper, Leipzig 1884, §§ 82 bis 85; Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885, Aufgaben 94, 97, 105, 106). Für diese ist das Verfahren ganz an seinem Platze. Selbstverständlich wird man Fachwerke mehrfachen Systems anstatt solcher einfachen Systems nur dann wählen, wenn genügende Gründe dafür vorhanden sind.

§ 86. Beliebige ebene Fachwerke mehrfachen Systems.

Die Zerlegung in einfache Systeme pflegt keine Schwierigkeit zu bieten und kann häufig auf mehr als eine Weise erfolgen. Jedoch sollen die Stäbe des mehrfachen Systems so angeordnet sein, dass die entstehenden Fachwerke einfachen Systems stabile Träger von der Art des gegebenen bilden, wie es bei ihrer Berechnung vorausgesetzt wird. Wäre ein labiles Fachwerk dabei, so müssten die

möglichen Verschiebungen desselben durch Stäbe andrer Systeme und etwa vorhandene Knotenpunktsnietungen verhindert werden, wodurch unbeabsichtigte und ausser Rechnung bleibende Beanspruchungen entstünden. Die Controle lässt sich nach den in § 14 gegebenen Regeln gewöhnlich sehr leicht durchführen.

Für einfache Balkenfachwerke beispielsweise haben wir statisch bestimmte Stabilität, wenn die Stäbe nach lauter neben einander liegenden, sich nicht überdeckenden Dreiecken angeordnet werden, continuirliche Balkenfachwerke sind in gleichem Falle stabil und bis auf die Zwischenstützenreactionen oder Stützenmomente statisch bestimmt. Demnach stellen sowohl Fig. 290 als Fig. 293 richtige Anordnungen einfacher Balkenfachwerke doppelten Systems dar. Das doppelte System Fig. 290 zerfällt in die einfachen Systeme Fig. 291, 292 und das doppelte System Fig. 293 in die einfachen Systeme Fig. 294, 295. Der punktirte Stab in Fig. 295 darf jedoch mit dem von ihm durchkreuzten nicht gleichzeitig widerstandsfähig sein, er dient entweder als Gegendiagonale oder nur zur Decoration, um die Symmetrie in Fig. 293 zu wahren. In letzterem Falle lässt sich das Eintragen von Spannungen in den Stab dadurch verhindern, dass man die Verbindung mit dem Träger durch nicht aufsitzende Schrauben in länglichen Löchern bewirkt. Die Anordnung und Berechnung von Gegendiagonalen hätte hier wie in andern Fällen in bekannter Weise (IV. Abschnitt) für die einfachen Systeme zu erfolgen und zeigt es sich dann von selbst, wie weit die Gegendiagonalen im mehrfachen Systeme reichen. In Letzterem sind also ganz wie bei der Berechnung einfacher Systeme zunächst nur die Hauptdiagonalen anzunehmen.

Bei den Trägerenden geht man mitunter scheinbar von der richtigen Anordnung der Stäbe, bei welcher alle einfachen Systeme stabil werden, ab. So hätten wir das vierfache System des gleichschenkligen Dreiecks Fig. 296 in die vier einfachen Systeme Fig. 297—300 zu zerlegen. Die zwei ersten erkennt man sofort als statisch bestimmt stabil, es sind bei $k = 19$ Knotenpunkten $s = 35 = 2k - 3$ Stäbe vorhanden und zu lauter neben einander liegenden, sich nicht überdeckenden Dreiecken angeordnet. Die Systeme Fig. 299 und 300 dagegen würden bei $k = 22$ Knotenpunkten $s = 39 = 2k - 5$ Stäbe, das heisst zur Stabilität um 2 zu wenig, besitzen und es lässt sich auch leicht erkennen, dass die Stabvierecke an den Enden bei gelenkartigen Knotenpunkten verschiebbar sind. In Wirklichkeit gelten jedoch auch die Systeme Fig. 299, 300 deshalb als stabil, weil man

inmitten der Endverticalen keine Knotenpunkte annimmt, diese Verticalen im Gegentheile möglichst steif construirt. Wir erhalten so bei $k = 20$ Knotenpunkten, wie es sein muss, $s = 2k - 3 = 37$ Stäbe und auch die Anordnung der Stäbe zeigt sich richtig, abgesehen davon, dass sich nicht alle Stabaxen nur in Knotenpunkten schneiden, wie es die Theorie der Fachwerke voraussetzt (§ 13). Infolge des letzteren Umstandes treten in den Endverticalen Biegungsspannungen auf, welche vermieden werden können, wenn man an Stelle der ausgezogenen schiefen Endstäbe in Fig. 299, 300 die punktirten setzt, womit die Trägerenden das Ansehen von Fig. 301 erhalten. Auch in andern Fällen werden Stabverbindungsstellen, welche zwischen den Enden der Verticalen liegen, nicht als Knotenpunkte aufgefasst z. B. im Falle von Fig. 302, welcher Abschluss manchmal für das System 289 gewählt wird.

Besonders häufig kommen mehrfache Systeme bei Fachwerken mit Verticalen vor und sind dabei zweierlei Anordnungen zu unterscheiden: *mehrfaches System mit gleichgestellten Diagonalen* und *mehrfaches System mit gekreuzten Diagonalen.* In Fig. 293 wurde bereits ein doppeltes System der ersten, in Fig. 290 ein doppeltes System der zweiten Anordnung verzeichnet, in Fig. 303 ist ein dreifaches System mit gleichgestellten Diagonalen und in Fig. 304 ein vierfaches System mit gekreuzten Diagonalen angedeutet. Man erkennt leicht, wie sich die Systeme noch weiter vervielfältigen lassen. Fig. 304 kann man sich nach Fig. 305, 306 aus zwei doppelten Systemen mit gekreuzten Diagonalen oder nach Fig. 307, 308 aus zwei doppelten Systemen mit gleichgestellten Diagonalen entstanden denken. Die doppelten Systeme lassen sich dann wieder, wie oben gezeigt, in einfache zerlegen. Die Endabschlüsse der Träger Fig. 303, 304 können sowohl nach der Andeutung links als nach der rechts hergestellt werden und entsprechende Anordnungen sind auch bei höherer Systemzahl möglich.

Träger mehrfachen Systems mit gleichgestellten Diagonalen werden neben Trägern mehr als doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen besonders dann verwendet, wenn es wünschenswerth ist, die Querträger in kürzeren Zwischenräumen folgen zu lassen, als sich bei einfachem Systeme und bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen ergeben würde. Die Querträger münden dann bei allen Verticalen des mehrfachen Systems, wie es auch theoretisch zweckmässig ist. Liesse man bei den Verticalen eines der durch Zerlegung entstehenden Systeme die Querträger weg, so würde dies System bei

der Zerlegung gar keine Verkehrslast erhalten und damit seine Füllung ziemlich überflüssig sein, es sei denn, dass man die Gurtungsstäbe trotz der gelenkartig gedachten Knotenpunkte als secundäre Träger ansehen wollte, welche einen Theil der Fahrbahnlast auf das fragliche System übertragen. Inwieweit dies der Wirklichkeit entspricht, ist schwer zu übersehen. Wenn nun auch die Fahrbahnträger im mehrfachen Systeme nur die Längen zwischen benachbarten Verticalen als Spannweiten haben, so pflegt man letztere doch bei Berechnung der Hauptträger gleich den Feldlängen der einfachen Systeme anzunehmen, womit die Genauigkeit der ohnehin nicht scharfen Berechnung wenig beeinträchtigt wird.

Bei continuirlichen Balkenfachwerken brauchen die betrachteten Systeme mit gekreuzten Diagonalen über den Zwischenstützen keinerlei Aenderungen zu erfahren, sodass in Fig. 290, 304 unter beliebigen Verticalen Zwischenstützen sein könnten. Wenn jedoch bei vierfachem Systeme mit gekreuzten Diagonalen die Endabschlüsse wie in Fig. 304 links ausfallen sollen, so wird man consequenter Weise über den Zwischenstützen nach Fig. 309 anordnen. Analoges gilt bei noch höherer Systemzahl. Bei continuirlichen Balkenfachwerken mehrfachen Systems mit gleichgestellten Diagonalen kann jede Oeffnung ganz wie für einen einfachen Träger angeordnet werden, nur dass natürlich die Endverticalen über den Zwischenstützen zusammenfallen. Man erkennt dies abgesehen von den sonstigen Kriterien schon daran, dass die durch Zerlegung entstehenden Träger einfachen Systèms durch Wegnahme der Zwischenstützen zu statisch bestimmten, stabilen Balkenfachwerken werden, z. B. im Falle Fig. 310, welche in Fig. 311 und 312 zerfällt. Die punktirten Stäbe in Fig. 311, 312 dürfen wieder mit den von ihnen halbirten nicht gleichzeitig widerstandsfähig sein, je einer von beiden ist als Gegendiagonale oder Decorationsstab anzusehen. Wie weit eventuell Gegendiagonalen nöthig sind, ergibt sich in oben erwähnter Weise. Man kann natürlich in Fig. 303, 310 auch jeder Diagonale zwischen den eingrenzenden Verticalen die der angedeuteten Stellung entgegengesetzte geben, womit z. B. die Anordnung über den Zwischenstützen wie in Fig. 313 anstatt wie in Fig. 310 wird. Indessen haben dann die Diagonalen der Hauptsache nach Druck aufzunehmen. Der Abschluss nach Fig. 307 und die Anordnung über den Zwischenstützen nach Fig. 314 wären ebenfalls zulässig, man könnte sie sogar im Interesse geringerer Zerknickungsgefahr für die Stützenverticalen gegenüber Fig. 310 für zweckmässig halten, doch sind die bereits zu Fig. 296 erwähnten

Biegungsspannungen zu beachten. Ausser mehrfachem Systeme mit Verticalen wird bei continuirlichen Balkenfachwerken häufig mehrfaches System des gleichschenkligen Dreiecks angewandt, besonders bei Gitterträgern (§ 13). Man wird dann immer über den Stützen Verticalen anordnen, wie es auch bei einfachem Systeme im Falle von Fig. 315 nöthig und im Falle von Fig 316 ohne Erhöhung der statischen Bestimmtheit zulässig ist. Durch Vereinigung der Systeme Fig. 315 und 316 entsteht das doppelte System Fig. 317. Bei vierfachem und noch höherem Systeme des gleichschenkligen Dreiecks kann man jeder Stützenverticale entweder wie in Fig. 296 oder wie in Fig. 301 anschliessen. Im ersteren Falle sind alle eine Stützenverticale durchschneidenden Diagonalen mit derselben zu vernieten, sodass daraus je zwei unvollständige aber selbstständige Diagonalen in verschiedenen Oeffnungen werden.

Für continuirliche Gelenkträger ist in Oeffnungen mit Zwischengelenken das Trägerstück zwischen den Gelenken als einfaches Balkenfachwerk anzuordnen. Ueberhaupt hat man jedem Zwischengelenke von beiden Seiten so anzuschliessen, als ob es sich um ein Trägerende handelte. Im Uebrigen ist wie bei continuirlichen Trägern ohne Zwischengelenke zu verfahren.

Bei einfachen und continuirlichen Bogenfachwerken kommt besonders doppeltes System mit gekreuzten Diagonalen vor. Die Anordnung in Oeffnungen ohne und mit Zwischengelenk ist dann gleich, nur dass beim Zwischengelenke an Stelle einer Verticale wie in Fig. 318 zwei getrennt neben einander stehende treten; doch können entsprechend der Anordnung bei einfachem Systeme die in Fig. 318 durchstrichenen Stäbe auch ganz wegfallen. Auch bei höheren Systemen mit gekreuzten Diagonalen ist die Anordnung der Stäbe für jedes Trägerstück wie für einen einfachen Balkenträger, sodass z. B. bei vierfachem Systeme mit gekreuzten Diagonalen der Anschluss an ein Zwischengelenk wie in Fig. 319 erfolgt. In Fig. 320, 322 sind Bogenfachwerke ohne Zwischengelenk doppelten Systems mit gleichgestellten Diagonalen angedeutet. Bei Vorhandensein eines Zwischengelenks ist nur in der Nähe desselben eine Abänderung nach Fig. 321, 323 zu treffen. Die durchstrichenen Stäbe könnten wieder wegbleiben, doch müsste dann in Fig. 323 das Zwischengelenk in den oberen Knotenpunkt verlegt werden, was unzweckmässig wäre.

Für beliebige Trägerarten mag noch bemerkt werden, dass die Stäbe jedes Trägerstückes (§ 2) zwischen zwei reellen oder imaginären Gelenken ohne Stützen zwischen den Enden ganz wie für Balken-

träger auf zwei Stützen angeordnet werden können, sodass beispielsweise die Stabanordnung Fig. 324 als Balken auf zwei Stützen, als Bogen mit Kämpfergelenken, als Träger mit constantem Horizontalschube oder schief verschiebbarem Auflager oder auch als Trägerstück zwischen zwei Gelenken eines continuirlichen Gelenkträgers Verwendung finden könnte.

Da Träger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen von allen Fachwerken mehrfachen Systems am meisten vorkommen, so wollen wir uns mit denselben in den folgenden Paragraphen etwas eingehender beschäftigen. Es handelt sich darum, direct (ohne jedesmalige Zerlegung) verwendbare Formeln für die Stabkräfte bei beliebiger Belastung und deren Grenzwerthe in den wichtigsten Fällen zu geben, womit auch die Berechnung $2n$-facher Systeme mit gekreuzten Diagonalen für $n > 1$ erleichtert wird. Hat man die Stäbe eines beliebigen Trägers mit Verticalen für einfaches System richtig angeordnet, so entsteht immer eine richtige Anordnung doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen, wenn man in jedem durch zwei benachbarte Verticalen begrenzten Felde, welches eine Diagonale enthält, noch eine zweite gleichzeitig widerstandsfähige von entgegengesetzter Stellung anbringt. Für spezielle Trägerformen lässt sich also die geometrische Anordnung leicht aus § 17 entnehmen. Bemerkt sei noch, dass wir uns im Folgenden mit den Stützenreactionen nicht mehr zu beschäftigen haben, da dieselben für die betrachteten statisch bestimmten Trägerarten beliebiger Systeme bereits festgestellt wurden. — (Beispiele 107, 108, 118, Aufgabe 46).

§ 87. Fachwerke doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Grundgleichungen.

Wir betrachten eine beliebige Trägeröffnung l, welche durch Verticalen in n Felder von gleichen Längen λ getheilt ist. In jedem Felde befinden sich zwei gekreuzte gleichzeitig widerstandsfähige Diagonalen. Die l begrenzenden Stützpunkte können gleich oder verschieden hoch liegen.

Der Ursprung der Coordinaten werde in den Stützpunkt links gelegt. Für den Stützpunkt rechts seien l, k die Coordinaten und für die Knotenpunkte m im Obergurt und Untergurt $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{u}_m$ die Ordinaten. Weiter werden die in Fig. 325 ersichtlichen Bezeichnungen eingeführt, so dass o_m, u_m, h_m, d_m, d_m' die Längen derjenigen Stäbe bezeichnen, welche durch O_m, U_m, H_m, D_m, D_m' beansprucht sind.

Das doppelte System Fig. 325 denken wir uns in die einfachen

Systeme Fig. 326, 327 zerlegt und von allen an Ersterem wirkenden Activkräften je die Hälfte auf die entsprechenden Punkte der beiden Letzteren gerechnet. Dann hat man nach der im Eingange dieses Abschnitts erwähnten Grundanschauung mit den Bezeichnungen in Fig. 325—327

(1) $\quad O_m = X_m + Z'_m, \qquad U_m = Z_m + X'_m, \qquad H_m = V_m + V'_m,$

während die Beanspruchungen der Diagonalen des doppelten Systems gleich denjenigen der einfachen Systeme bleiben.

Im Weiteren sollen nur beliebige verticale Activkräfte (Lasten) in Betracht kommen. Unmittelbar rechts vom Auflager 0 und links vom Auflager l denken wir uns verticale Schnitte durch den Träger gelegt und nennen wie früher M, M' die Momente der äusseren Kräfte links der Schnitte 0 und l in Hinsicht der Stützpunkte 0 und l. H sei die resultirende Horizontalkraft im Schnitte 0 oder jedem andern Schnitte s durch den Träger (§ 7). Ein Schnitt s werde durch Feld m so gelegt, dass er nur die Stäbe o_m, u_m, d_m, d'_m trifft und soll dann S das Moment der zwischen den Schnitten 0 und s auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht des Stützpunkts 0, S' das Moment der zwischen den Schnitten s und l auf den Träger kommenden Lasten in Hinsicht des Stützpunktes l bezeichnen. K_o, K_u seien die Lastensummen, welche in Verticale m oberhalb und unterhalb eines zu berechnenden Stücks angreifen, also wenn die Fahrbahn nicht zwischen beiden Gurtungen liegt, die Belastungen des oberen und unteren Knotenpunktes m. Dann haben wir nach § 18, 2)

$$X_m = -\,[(n-m)(M+S)+m(M'+S'+kH)-n\mathfrak{u}_m H]\,\frac{o_m}{2lh_m},$$

$$Z_m = \quad [(n-m+1)(M+S)+(m-1)(M'+S'+kH)$$
$$\qquad\qquad -n\mathfrak{o}_{m-1}H]\,\frac{u_m}{2lh_{m-1}},$$

$$X'_m = \quad [(n-m)(M+S)+m(M'+S'+kH)-n\mathfrak{o}_m H]\,\frac{u_m}{2lh_m},$$

$$Z'_m = -\,[(n-m+1)(M+S)+(m-1)(M'+S'+kH)$$
$$\qquad\qquad -n\mathfrak{u}_{m-1}H]\,\frac{o_m}{2lh_{m-1}},$$

$$V_m = \quad [(n-m+\nu)(M+S+m\lambda K_u)$$
$$\qquad +(m-\nu)(M'+S'-(n-m)\lambda K_u+kH)-nw_\nu H]\,\frac{1}{2\nu l},$$

$$V'_m = -\,[(n-m+\nu')(M+S+m\lambda K_o)$$
$$\qquad +(m-\nu')(M'+S'-(n-m)\lambda K_o+kH)-nw'_\nu H]\,\frac{1}{2\nu' l},$$

worin nach § 16, 2) 6)

$$\nu = \frac{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_m}{\mathfrak{o}_m + \mathfrak{u}_m - \mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{u}_{m+1}},$$

$$w_v = \mathfrak{o}_m - \nu(\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}) = \mathfrak{u}_m - \nu(\mathfrak{u}_{m+1} - \mathfrak{u}_m),$$

$$\nu' = \frac{\mathfrak{u}_m - \mathfrak{o}_m}{\mathfrak{u}_m + \mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m-1} - \mathfrak{o}_{m+1}},$$

$$w_v' = \mathfrak{u}_m - \nu'(\mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m-1}) = \mathfrak{o}_m - \nu'(\mathfrak{o}_{m+1} - \mathfrak{o}_m).$$

Durch Substitution in 1) folgen für beliebige Belastung

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
O_m = & -\Big[\Big(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\Big)(M+S) \\
& + \Big(\frac{m}{h_m} + \frac{m-1}{h_{m-1}}\Big)(M' + S' + kH) \\
& - \Big(\frac{\mathfrak{u}_m}{h_m} + \frac{\mathfrak{u}_{m-1}}{h_{m-1}}\Big) nH\Big] \frac{\mathfrak{o}_m}{2l}, \\
U_m = & \quad \Big[\Big(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\Big)(M+S) \\
& + \Big(\frac{m}{h_m} + \frac{m-1}{h_{m-1}}\Big)(M' + S' + kH) \\
& - \Big(\frac{\mathfrak{o}_m}{h_m} + \frac{\mathfrak{o}_{m-1}}{h_{m-1}}\Big) nH\Big] \frac{\mathfrak{u}_m}{2l}, \\
H_m = & \quad [(n-m)(M+S) + m(M' + S' + kH)]\, \frac{\varrho}{2l} \\
& + \frac{\eta}{2l} H + \frac{1}{2}(K_u - K_o),
\end{aligned}\right.$$

mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(3)\qquad \varrho = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'} = \frac{2\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{o}_{m+1} + 2\mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m-1} - \mathfrak{u}_{m+1}}{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_m},$$

$$(4)\qquad \eta = (2-\varrho)\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{o}_{m+1} = \mathfrak{u}_{m-1} + \mathfrak{u}_{m+1} - (2+\varrho)\mathfrak{u}_m.$$

Die Beanspruchungen der Diagonalen in Fig. 325 bleiben wie für die einfachen Systeme Fig. 326, 327 nach § 18, 2) bestimmt durch die Gleichung

$$(5)\qquad \frac{D_m}{d_m} = -\frac{D_m'}{d_m'} = -[(n-m+\varepsilon)(M+S) + (m-\varepsilon)(M'+S'+kH) - nw_dH]\,\frac{1}{2\varepsilon l h_{m-1}},$$

worin nach § 16, 1) 5)

$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}, \tag{6}$$

$$w_d = \mathfrak{o}_m - \varepsilon(\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1}) = \mathfrak{u}_m - \varepsilon(\mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m-1}). \tag{7}$$

Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null“ in Anwendung auf den Trägertheil zwischen den Schnitten 0 und s ergibt

$$\frac{H}{\lambda} + \frac{O_m}{o_m} + \frac{U_m}{u_m} + \frac{D_m}{d_m} + \frac{D'_m}{d'_m} = 0$$

oder mit Rücksicht auf 5) für beliebige Belastung

$$\frac{H}{\lambda} + \frac{O_m}{o_m} + \frac{U_m}{u_m} = 0. \tag{8}$$

Entsprechend den Voraussetzungen der Formeln für V_m, V'_m ist obige und jede darausfolgende Formel für H_m an die Voraussetzung gebunden, dass sich zu beiden Seiten der Verticale m Felder gleicher Länge λ desselben Trägerstücks mit gekreuzten Diagonalen befinden, wobei jedoch die Diagonalen auch mit den Gurtungsstäben zusammenfallen können (Endfelder, Fig. 328). Für die Ausdrücke der übrigen Stabkräfte besteht eine solche Bedingung nicht.

Wird die Resultante der in Verticale m angreifenden Lasten durch r_m bezeichnet, so haben wir für irgendwelche bei Abscissen $e_1, e_2, \ldots$ auf den Träger kommenden Lasten $K_1, K_2, \ldots$

$$\begin{cases} S = \sum_0^s Ke = [r_1 + 2r_2 + \cdots + (m-1)r_{m-1}]\lambda, \\ S' = \sum_s^l K(l-e) = [r_{n-1} + 2r_{n-2} + \cdots + (n-m)r_m]\lambda. \end{cases} \tag{9}$$

Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Spannweite l gelten, dann hat man nach 9) mit $r_m = g\lambda$ zur Verwendung in obigen Gleichungen für Eigengewicht allein

$$\begin{cases} S = m(m-1)\frac{g\lambda^2}{2}, & S' = (n-m)(n-m+1)\frac{g\lambda^2}{2}, \\ K_o = \lambda g_o, & K_u = \lambda g_u. \end{cases} \tag{10}$$

In der Folge werden wir wie bisher die Beanspruchungen und Werthe M, M', H für Eigengewicht allein mit deutschen Buchstaben bezeichnen.

Für beliebige Lasten $P_1, P_2, \ldots$, welche bei Abscissen $a_1, a_2, \ldots$ auf die Fahrbahn wirken, sind wie in § 18

$$(11)\qquad \begin{cases} S = \sum\limits_0^c Pa + \frac{c}{v-c} \sum\limits_c^v P(v-a), \\ S' = \sum\limits_v^l P(l-a) + \frac{l-v}{v-c} \sum\limits_c^v P(a-c), \end{cases}$$

worin zu setzen

$$(12)\qquad c = (m-1)\lambda, \qquad v = m\lambda, \qquad l = n\lambda.$$

Von der Fahrbahnbelastung greift in Verticale m an

$$(13)\qquad K = \Big[\sum_{m-1}^{m} P(a - m\lambda + \lambda) + \sum_{m}^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\Big]\frac{1}{\lambda}$$

und es tritt dies K als K_o oder K_u auf, jenachdem die Fahrbahnlast oberhalb oder unterhalb des zu berechnenden Verticalenstücks angreift.

Für die Längen der Gurtungsstäbe gelten allgemein

$$(14)\qquad o_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1})^2}, \qquad u_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m-1})^2}$$

und für die Längen der Diagonalen

$$(15)\qquad d_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{u}_m)^2}, \qquad d'_m = \sqrt{\lambda^2 + (\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_{m-1})^2},$$

während h_m gleich dem Absolutwerthe von $\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_m$ ist.

Fachwerke mit horizontalem Obergurte (Fig. 329). Für beliebige Fachwerke mit horizontalem Obergurt hat man stets

$$(16)\qquad \begin{cases} o_m = \lambda, & u_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}, \\ d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_m}, & d'_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}}, \end{cases}$$

und wegen constantem $\mathfrak{o}_m = \mathfrak{o}$

$$(17)\qquad \varrho = \frac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m} - 2, \qquad \eta = -\varrho\mathfrak{o}, \qquad w_d = \mathfrak{o}.$$

Bei Brückenträgern mit horizontalem Obergurte pflegt die Fahrbahn in der Höhe des Letzteren zu liegen und die Fahrbahnlast in den Knotenpunkten des Obergurts anzugreifen.

Fachwerke mit horizontalem Untergurte (Fig. 330). Für solche hat man in allen Fällen

$$(18)\qquad \begin{cases} u_m = \lambda, & o_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}, \\ d_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_{m-1}}, & d'_m = \sqrt{\lambda^2 + h^2_m}, \end{cases}$$

und wegen constantem $\mathfrak{u}_m = \mathfrak{u}$

$$(19)\qquad \varrho = 2 - \frac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m}, \qquad \eta = -\varrho\mathfrak{u}, \qquad w_d = \mathfrak{u}.$$

Bei Brückenträgern mit horizontalem Untergurte pflegt die Fahrbahn in der Höhe des Letzteren zu liegen und die Fahrbahn in den Knotenpunkten des Untergurts anzugreifen.

Fachwerke mit symmetrischen Gurtungen (Fig. 331). Liegen Obergurt und Untergurt zu einer beliebigen Horizontale symmetrisch, dann ergeben sich bei sonst beliebigen Formen

$$(20)\quad \begin{cases} o_m = u_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}, \\ d_m = d'_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

Da ferner dann

$$\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1} = \mathfrak{u}_{m-1} - \mathfrak{u}_m, \qquad \mathfrak{o}_{m+1} - \mathfrak{o}_m = \mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m+1},$$

so hat man weiter

$$(21)\quad \varrho = 0, \quad \eta = 2\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{o}_{m+1} = \mathfrak{u}_{m-1} + \mathfrak{u}_{m+1} - 2\mathfrak{u}_m,$$
$$w_d = \frac{\mathfrak{o}_m + \mathfrak{u}_m}{2}.$$

Die Fahrbahn kommt im vorliegenden Falle sowohl oberhalb als unterhalb, als auch zwischen beiden Gurtungen vor. Für den Träger mit horizontalen Gurtungen sind $\eta = 0$, $\varepsilon = \pm \infty$.

Wie in § 16 gelten die abgeleiteten Gleichungen auch dann, wenn wir die Schnitte 0 und l nicht wie oben durch die eine Oeffnung l begrenzenden Stützpunkte legen, sondern durch irgend zwei Verticalen, zwischen welchen sich kein Stützpunkt befindet und deren horizontale Entfernung $l = n\lambda$ gesetzt wird. Die Punkte 0 und l können beliebige Knotenpunkte in den Schnitten 0 und l sein. Das in den zwei letzten Absätzen des § 20 über den Einfluss des Horizontalschubs bei geraden Gurtungen Gesagte gilt sowohl für Fig. 326 als für Fig. 327 und bleibt demnach auch für das doppelte System Fig. 325 bestehen.

§ 88. Fachwerke doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Berechnung einer Grenzbeanspruchung aus der andern bei gleichmässig vertheilten Lasten.†

Wir wollen hier für doppeltes System mit gekreuzten Diagonalen diejenige Aufgabe behandeln, welche in § 19 für einfaches System mit Verticalen gelöst wurde. Es handle sich also um den

speziellen Fall, dass bei einem Träger beliebiger Art und Form des fraglichen Systems das Eigengewicht über die ganze Trägerlänge gleichmässig vertheilt und für beide Grenzbeanspruchungen eines Stabes dieselbe gleichmässig vertheilte Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecken angenommen werden. Bezeichnen dann B_1, B_2 die betreffenden Grenzbeanspruchungen, $\mathfrak{B}$ die Stabkraft für Eigengewicht allein und B_p diejenige für eine auf die ganze Trägerlänge wirkende Verkehrslast, so hat man nach § 12, 5)

$$(1) \qquad B_1 + B_2 = 2\,\mathfrak{B} + B_p.$$

Die Eigengewichtsbeanspruchungen der Stäbe lassen sich nach § 87, 2) — 4), 7) und 12) mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{A}_m = \left(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\right)\left[m(m-1) + \frac{2}{g\lambda^2}\mathfrak{M}\right]$$
$$+ \left(\frac{m}{h_m} + \frac{m-1}{h_{m-1}}\right)\left[(n-m)(n-m+1) + \frac{2}{g\lambda^2}(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H})\right],$$

$$\mathfrak{C}_m = (n-m)\left[m(m-1) + \frac{2}{g\lambda^2}\mathfrak{M}\right] + m\left[(n-m)(n-m+1)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{g\lambda^2}(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{H})\right]$$

für Obergurt, Untergurt und Verticalen wie folgt ausdrücken:

$$\mathfrak{O}_m = -\left[\mathfrak{A}_m - \left(\frac{\mathfrak{u}_m}{h_m} + \frac{\mathfrak{u}_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\frac{2n}{g\lambda^2}\mathfrak{H}\right]\frac{g\lambda o_m}{4n},$$

$$\mathfrak{U}_m = \left[\mathfrak{A}_m - \left(\frac{\mathfrak{o}_m}{h_m} + \frac{\mathfrak{o}_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\frac{2n}{g\lambda^2}\mathfrak{H}\right]\frac{g\lambda u_m}{4n},$$

$$\mathfrak{H}_m = \mathfrak{C}_m\frac{g\lambda\varrho}{4n} + \frac{\eta}{2\lambda}\mathfrak{H} + \frac{g_u - g_o}{2}\lambda.$$

Wenn nun $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ $\mathfrak{H}$ gleich Null oder proportional g sind, wie immer wenn die Beanspruchungen nur von den Lasten herrühren (§ 12, Absatz 2), dann lassen sich aus diesen Gleichungen auch die Stabkräfte für eine auf die ganze Fahrbahn gleichmässig vertheilte Verkehrslast entnehmen und so ganz wie in § 19 Beziehungen zwischen den zwei Grenzbeanspruchungen der Stäbe erhalten. Im Folgenden bedeuten O_m, U_m, D_m, D_m', H_m Grenzbeanspruchungen, doch ist je die eine zur Unterscheidung von der andern durch eine Klammer ausgezeichnet.

Gurtungen und Diagonalen. Für die Gurtungen ergeben sich aus 1) mit Rücksicht auf die Ausdrücke von $\mathfrak{O}_m$, $\mathfrak{U}_m$ die folgenden Formeln:

$$(2) \qquad O_m + (O_m) = 2\mathfrak{O}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{O}_m = \frac{g+q}{g}\mathfrak{O}_m,$$

$$(3) \qquad U_m + (U_m) = 2\mathfrak{U}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{U}_m = \frac{g+q}{g}\mathfrak{U}_m,$$

während für die Diagonalen selbstverständlich wie bei einfachem Systeme gelten

$$(4) \qquad D_m + (D_m) = \frac{g+q}{g}\mathfrak{D}_m,$$

$$(5) \qquad D'_m + (D'_m) = \frac{g+q}{g}\mathfrak{D}'_m.$$

Wenn eine Grenzbeanspruchung für Eigengewicht allein eintritt, vereinfachen sich die Formeln. Wir erhalten

$$(6) \qquad \text{für } (O_m) = \mathfrak{O}_m \qquad O_m = \frac{q}{g}\mathfrak{O}_m,$$

$$(7) \qquad \text{„} \ (U_m) = \mathfrak{U}_m \qquad U_m = \frac{q}{g}\mathfrak{U}_m,$$

$$(8) \qquad \text{„} \ (D_m) = \mathfrak{D}_m \qquad D_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}_m,$$

$$(9) \qquad \text{„} \ (D'_m) = \mathfrak{D}'_m \qquad D'_m = \frac{q}{g}\mathfrak{D}'_m.$$

Die Gleichungen 8) und 9) bedingen einander immer, die Gleichungen 6) und 7) nur im Falle von Balkenträgern (§ 89). Ist die Eigengewichtsbeanspruchung eines Gurtungsstabs oder einer Diagonale Null, dann sind nach 2)—4) die entsprechenden Grenzbeanspruchungen numerisch gleich und von verschiedenen Vorzeichen.

Verticalen. Jenachdem die Fahrbahnlast wie g_o oberhalb oder wie g_u unterhalb eines zu berechnenden Verticalenstücks angreift, hat man für Letzteres nach 1) mit Rücksicht auf den Ausdruck von $\mathfrak{H}_m$ bezw.

$$H_m + (H_m) = 2\mathfrak{H}_m + \mathfrak{C}_m \frac{p\lambda\varrho}{4n} + \frac{\eta}{2\lambda}\frac{p}{g}\mathfrak{H} - \frac{p\lambda}{2},$$

$$H_m + (H_m) = 2\mathfrak{H}_m + \mathfrak{C}_m \frac{p\lambda\varrho}{4n} + \frac{\eta}{2\lambda}\frac{p}{g}\mathfrak{H} + \frac{p\lambda}{2},$$

oder auch

$$H_m + (H_m) = 2\mathfrak{H}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{H}_m - \frac{g_u - g_o}{g}\frac{p\lambda}{2} - \frac{p\lambda}{2},$$

$$H_m + (H_m) = 2\mathfrak{H}_m + \frac{p}{g}\mathfrak{H}_m - \frac{g_u - g_o}{g}\frac{p\lambda}{2} + \frac{p\lambda}{2},$$

woraus wegen $g_o + g_u = g$:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$H_m + (H_m) = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{g}\,g_u, \tag{10}$$

und speziell

$$\text{für } (H_m) = \mathfrak{H}_m \qquad H_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{g}\,g_u; \tag{11}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$H_m + (H_m) = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{g}\,g_o, \tag{12}$$

und speziell

$$\text{für } (H_m) = \mathfrak{H}_m \qquad H_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{g}\,g_o. \tag{13}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Gleichungen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Gleichungen b).

Soll das Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt gelten, in welchen die Fahrbahnlast angreift, so folgt aus 10) 12), gleichgültig auf welche Gurtung die Fahrbahnlast wirkt,

$$H_m + (H_m) = \frac{g+q}{g}\,\mathfrak{H}_m, \tag{14}$$

und speziell

$$\text{für } (H_m) = \mathfrak{H}_m \qquad H_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{H}_m. \tag{15}$$

Alle abgeleiteten Gleichungen gelten auch, wenn die g, p zwar nicht an beliebigen Trägerstellen, wohl aber überall da constante Werthe haben, wo die Belastung überhaupt einen Einfluss auf die betreffende Stabkraft ausübt.

§ 89. Balkenfachwerke doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. †

Wir nehmen jetzt ein Balkenfachwerk beliebiger Art und Form des in § 87 betrachteten Systems an. Dann ist in den dort erhaltenen Gleichungen der Horizontalschub $H = 0$ und wir erhalten bei gleich oder verschieden hoch liegenden Stützpunkten für jede Belastung

$$
(1)\quad\begin{cases}
\dfrac{U_m}{u_m} = -\dfrac{O_m}{o_m} = \left[\left(\dfrac{n-m}{h_m} + \dfrac{n-m+1}{h_{m-1}}\right)(M+S)\right. \\
\qquad\qquad\qquad \left. + \left(\dfrac{m}{h_m} + \dfrac{m-1}{h_{m-1}}\right)(M'+S')\right]\dfrac{1}{2l}, \\
\dfrac{D_m}{d_m} = -\dfrac{D'_m}{d'_m} = -\,[(n-m+\varepsilon)(M+S) \\
\qquad\qquad\qquad + (m-\varepsilon)(M'+S')]\,\dfrac{1}{2\varepsilon l h_{m-1}}, \\
H_m = [(n-m)(M+S) \\
\qquad\qquad\qquad + m(M'+S')]\,\dfrac{\varrho}{2l} + \dfrac{1}{2}(K_u - K_o).
\end{cases}
$$

Wir können hiernach aussprechen: *Für jede bestimmte Belastung stehen die Beanspruchungen der beiden Gurtungsstäbe eines Feldes im negativen Verhältnisse ihrer Längen und ebenso die Beanspruchungen der beiden Diagonalen. Die Horizontalcomponenten der zwei Gurtungsbeanspruchungen sowohl wie die der zwei Diagonalbeanspruchungen sind gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen oder Richtungen. Bei wechselnden Belastungen treten die Grenzbeanspruchungen der beiden Gurtungsstäbe im selben Belastungsfalle ein und Gleiches gilt für die Grenzbeanspruchungen beider Diagonalen. Hat man die Grenzbeanspruchungen eines Gurtungsstabes und einer Diagonalen berechnet, so lassen sich die andern nach 1) 2) ohne Rücksicht auf die Belastung angeben. Die Beanspruchungen gleichlanger Gurtungsstäbe eines Feldes und die Beanspruchungen gleichlanger Diagonalen eines solchen sind gleich und von verschiedenen Vorzeichen* (Parallelträger, Linsenträger u. s. w.). Speziell wenn in beiden einer Verticale m anliegenden Feldern die Gurtungen zu einer beliebigen Horizontalen symmetrisch liegen, hat man wegen $\varrho = 0$

$$(2)\qquad H_m = \frac{1}{2}(K_u - K_o).$$

Das bezüglich der Diagonalbeanspruchungen Gesagte gilt nach § 87, 5) auch bei Bogenfachwerken. Die Werthe von S, S', K_o, K_u bleiben wie in § 87 bestimmt.

Spezieller Fall. Parallelträger. Am einfachsten werden die Formeln, wenn beide Gurtungen horizontal sind. Wir erhalten dann mit

$$(3)\qquad o_m = u_m = \lambda,\quad h_m = h,\quad d_m = d'_m = d\quad \varepsilon = \infty,\quad \varrho = 0$$

für beliebige Belastung

$$(4)\quad U_m = -\,O_m = [(2n-2m+1)(M+S) + (2m-1)(M'+S')]\,\frac{1}{2nh},$$

(5) $$D_m = - D'_m = (M' - M + S' - S)\frac{d}{2lh},$$

während die Beanspruchung der Verticalen durch 2) bestimmt bleibt. Speziell wenn das Eigengewicht mit $g = g_o + g_u$ innerhalb der betrachteten Oegnung l gleichmässig vertheilt ist, folgen mit § 87, 10) die vom ganzen Eigengewichte allein herrührenden Beanspruchungen

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{U}_m = - \mathfrak{O}_m = [m(n-m) + (m-1)(n-m+1)]\frac{g\lambda^2}{4h} \\ \qquad + [(2n-2m+1)\mathfrak{M} + (2m-1)\mathfrak{M}']\frac{1}{2nh}, \\ \mathfrak{D}_m = - \mathfrak{D}'_m = (n-2m+1)\frac{g\lambda d}{4h} + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})\frac{d}{2lh}, \\ \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}\lambda. \end{cases}$$

Durch beliebige Belastung der Fahrbahn aber entstehen die Beanspruchungen:

(7) $$U_m = - O_m = \Big[(2n-2m+1)\Big(M + \sum_0^{m-1} Pa\Big) \\ + (n-2m+1)\sum_{m-1}^{m} P\Big(\frac{m-1}{n-2m+1}l + a\Big) \\ + (2m-1)\Big(M' + \sum_m^n P(l-a)\Big)\Big]\frac{1}{2nh},$$

(8) $$D_m = - D'_m = \Big[M' - M - \sum_0^{m-1} Pa - (n-1)\sum_{m-1}^{m} P\Big(\frac{m-1}{n-1}l - a\Big) \\ + \sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{d}{2lh},$$

(9) $$H_m = \mp\Big[\sum_{m-1}^{m} P(a - m\lambda + \lambda) + \sum_m^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\Big]\frac{1}{\lambda},$$

worin die M, M' der betreffenden Fahrbahnbelastung entsprechen und die Grenzen der Summen Verticalennummern bedeuten (Fig. 325). In 9) ist das obere oder untere Vorzeichen zu wählen, jenachdem die Fahrbahnlast oberhalb oder unterhalb des zu berechnenden Verticalenstücks angreift. Vorstehende Formeln hätten insbesondere bei continuirlichen Parallelträgern zur Verwendung zu kommen.

Entsprechend dem in § 17 für einfaches System Gesagten können bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen die Trägerenden

bei unten liegenden Auflagern nach Fig. 332, bei oben liegenden nach Fig. 333 abgeändert werden (Aufgabe 47).

§ 90. Einfaches Balkenfachwerk doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen und beliebigen Gurtungsformen. Allgemeines.

Hat man es mit einem Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern zu thun (III. Abschnitt), dann sind in den Gleichungen des § 88 zu setzen $M = M' = 0$, $H = 0$, wir erhalten bei den in Fig. 325 angedeuteten Bezeichnungen

$$(1)\quad \begin{cases} U_m = \left[\left(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\right) S \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{m}{h_m} + \frac{m-1}{h_{m-1}}\right) S'\right] \frac{u_m}{2l} = -\frac{u_m}{o_m} O_m, \\ D_m = [(\varepsilon - m) S' - (\varepsilon + n - m) S] \frac{d_m}{2\varepsilon l h_{m-1}} = -\frac{d_m}{d'_m} D'_m, \\ H_m = [(n-m) S + m S'] \frac{\varrho}{2l} + \frac{1}{2}(K_u - K_o). \end{cases}$$

Die S, S' sind für jede Belastung aus § 87 zu entnehmen. Ferner hat man

$$(2)\qquad \varepsilon = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}},$$

und, wenn $\mathfrak{o}_m$, $\mathfrak{u}_m$ die Ordinaten der Knotenpunkte m im Obergurte und Untergurte bezeichnen,

$$(3)\qquad \varrho = \frac{2\mathfrak{o}_m - \mathfrak{o}_{m-1} - \mathfrak{o}_{m+1} + 2\mathfrak{u}_m - \mathfrak{u}_{m-1} - \mathfrak{u}_{m+1}}{\mathfrak{o}_m - \mathfrak{u}_m},$$

(4) speziell bei horizontalem Obergurte $\quad \varrho = \dfrac{h_{m-1} - h_{m+1}}{h_m} - 2,$

(5) „ „ Untergurte $\quad \varrho = 2 - \dfrac{h_{m-1} + h_{m+1}}{h_m},$

(6) „ symmetrischen Gurtungen $\varrho = 0$,

unter symmetrischen Gurtungen solche verstanden, welche bei sonst beliebigen Formen zu irgend einer Horizontalen symmetrisch liegen. Neben den Formeln 1) — 3) bestehen bei beliebiger Belastung der Fahrbahn noch die Gleichungen § 92, 1) — 6).

Soll das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge gelten und bezeichnen g_o, g_u diejenigen Theile von g, welche auf die Knotenpunkte des Ober-

gurts und Untergurts zu rechnen sind, dann hat man nach 1) — 3) mit § 87, 10) die Beanspruchungen für Eigengewicht allein

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_m = \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right] \frac{g\lambda u_m}{4} = -\frac{u_m}{o_m} O_m, \\ \mathfrak{D}_m = \left(n - 2m + 1 - m\frac{n-m}{\varepsilon}\right) \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{g\lambda}{4} = -\frac{d_m}{d_m'} \mathfrak{D}_m', \\ \mathfrak{H}_m = m(n-m)\frac{g\lambda\varrho}{4} + \frac{g_u - g_o}{2}\lambda. \end{cases}$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gürtungen in Verticale m an, so ist das Eigengewicht der Fahrbahn zu berücksichtigen bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Untergurt in g_o, bei Berechnung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Obergurt in g_u.

Wird das Eigengewicht nur auf diejenigen Knotenpunkte vertheilt angenommen, in welchen die Fahrbahnlast angreift, dann hat man in der letzten Gleichung 7):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift, $\qquad g_o = g,\quad g_u = 0,$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift, $\qquad g_u = g,\quad g_o = 0.$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Werthe a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Werthe b).

§ 91. Einfaches Balkenfachwerk doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen und beliebigen Gurtungsformen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte sind für alle Fälle aus § 90 zu entnehmen Da nach § 90, 1) für jede Belastung

$$(1)\qquad O_m = -\frac{o_m}{u_m} U_m, \qquad\qquad D_m' = -\frac{d_m'}{d_m} D_m,$$

so sind mit den Grenzwerthen von U_m, D_m auch diejenigen von O_m, D_m' bestimmt, es genügt also die Grenzwerthe von U_m, D_m, H_m anzugeben. Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind halb so gross als in § 32 für einfaches System angegeben, während die Grenzwerthe von U_m, H_m aus § 90, 1) mit Rücksicht auf die in § 87

ausgedrückten S, S' oder mit Rücksicht auf die Eigengewichtsbeanspruchungen § 90, 7) folgen. Wir erhalten so die Grenzwerthe von U_m bei möglichst grossen bezw. möglichst kleinen S, S'

$$(2)\quad U_m = \mathfrak{U}_m + \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\frac{p\lambda u_m}{4}, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m,$$

und, speziell wenn das Eigengewicht mit g per Längeneinheit auf die Trägerlänge gleichmässig vertheilt angenommen wird,

$$(3)\qquad U_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{U}_m, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m,$$

worin $q = g + p$ ist. Im Weiteren kommen die Gurtungsformen Frage.

Gewöhnlichste Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ nicht zwischen 0 und n oder, was dasselbe heisst, schneiden sich die Richtungslinien der Stäbe o_m und u_m ausserhalb der Spannweite l, dann hat man nach § 32, 7) die Grenzwerthe von D_m:

$$(4)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \dfrac{(\varepsilon - m)(n-m)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{4}, \\[2ex] D_m = \mathfrak{D}_m - \dfrac{(\varepsilon - m + n)(m-1)^2}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\dfrac{d_m}{h_{m-1}},\,\dfrac{p\lambda}{4}. \end{cases}$$

Bei Berechnung mittelst vorausbestimmter Knotenpunktslasten würden nach § 32, 15) an Stelle dieser Ausdrücke die etwas zu ungünstigen treten:

$$(5)\qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n-m)(n-m+1)\left(1 - \dfrac{m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{4n}, \\[2ex] D_m = \mathfrak{D}_m - m(m-1)\left(1 + \dfrac{n-m}{\varepsilon}\right)\dfrac{d_m}{h_{m-1}}\,\dfrac{p\lambda}{4n}. \end{cases}$$

Für den gewöhnlichsten Fall eines positiven ϱ erhält man in oben erwähnter Weise die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift (der erste Grenzwerth nicht genau, aber zu ungünstig),

$$(6)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2},$$

speziell für $\varrho = 0$ (symmetrische Gurtungen etc.)

$$(7)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2};$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$(8)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m + m(n-m)\frac{p\lambda\varrho}{4} + \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m.$$

speziell für $\varrho = 0$ (symmetrische Gurtungen etc.)

$$(9) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Formeln a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Formeln b).

Andere Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ zwischen 0 und m, d. h. schneiden sich die Richtungslinien o_m, u_m innerhalb l, dann sind nach § 32, 10) die Grenzwerthe von D_m

$$(10) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \left(n - 2m + 1 - m\,\frac{n-m}{\varepsilon}\right)\frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{p\lambda}{4}, \quad D_m = \mathfrak{D}_m,$$

und speziell bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte

$$(11) \qquad D_m = \frac{q}{g}\,\mathfrak{D}_m, \qquad D_m = \mathfrak{D}_m.$$

In dem nicht allzuoft vorkommenden Falle eines negativen ϱ ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$(12) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + m\,(n-m)\,\frac{p\lambda\varrho}{4} - \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m,$$

speziell für $\varrho = 0$ (symmetrische Gurtungen etc.)

$$(13) \qquad H_m = H_m - \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m;$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift (der erste Grenzwerth nicht genau, aber zu ungünstig),

$$(14) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + m\,(n-m)\,\frac{p\lambda\varrho}{4}, \qquad \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2},$$

speziell für $\varrho = 0$ (symmetrische Gurtungen etc.)

$$(15) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Gleichungen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Gleichungen b). — (Beispiel 109.)

§ 92. Einfaches Balkenfachwerk doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen und beliebigen Gurtungsformen. Bewegte Radlastzüge.

Die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte sind für alle Fälle aus § 90 zu entnehmen. Da für jede Belastung

$$O_m = -\frac{o_m}{u_m} U_m, \qquad D'_m = -\frac{d'_m}{d_m} D_m, \tag{1}$$

so sind auch die Grenzwerthe von O_m, D'_m mit denjenigen von U_m, D_m bestimmt, wir haben uns wie im vorigen Paragraphen nur mit U_m, D_m, H_m zu beschäftigen. Bei jeder Stellung eines beliebigen Lastsystems $P_1, P_2 \ldots$ auf der Fahrbahn hat man nach § 90, 1) und § 87, 11) — 13) für Gurtungen und Diagonalen:

$$(2)\quad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[\Big(\frac{n-m}{h_m} + \frac{n-m+1}{h_{m-1}}\Big)\sum_0^{m-1} Pa \\ \qquad + \Big(\frac{n-m}{h_m} - \frac{m-1}{h_{m-1}}\Big)\sum_{m-1}^{m} P(a-z) \\ \qquad + \Big(\frac{m}{h_m} + \frac{m-1}{h_{m-1}}\Big)\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{u_m}{2l} \\ \text{mit} \quad z = -\frac{(m-1)h_m}{(n-m)h_{m-1} - (m-1)h_m}\, l, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[(n-m+\varepsilon)\sum_0^{m-1} Pa \\ \qquad + (n\varepsilon - \varepsilon - n + m)\sum_{m-1}^{m} P(z-a) \\ \qquad - (\varepsilon - m)\sum_m^n P(l-a)\Big]\frac{d_m}{2\varepsilon l h_{m-1}} \\ \text{mit} \quad z = \frac{m-1}{(n-1)\varepsilon - n + m}\,\varepsilon l, \end{cases}$$

und für die Verticalen mit der Bezeichnung

$$K = \Big[\sum_{m-1}^{m} P(a - m\lambda + \lambda) + \sum_m^{m+1} P(m\lambda + \lambda - a)\Big]\frac{1}{\lambda}: \tag{4}$$

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

(5) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{\varrho}{2l} - \frac{K}{2},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

(6) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{\varrho}{2l} + \frac{K}{2}.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, dann gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die vorstehende Gleichung a) und unten angegebenen Grenzbeanspruchungen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die vorstehende Gleichung b) und unten angegebenen Grenzbeanspruchungen b). In allen Gleichungen bedeuten die Grenzen der $\sum$ Verticalennummern. K drückt den bei Verticale m auf den Träger übertragenen Theil der Verkehrslast aus.

Aus 2) ersieht man, dass die Richtungslinie der Influenzlinie für U_m zwischen den Verticalen $m-1$ und m bei $a = z$ die Abscissenaxe schneidet (Fig. 334). Da nun nach der ersten Gleichung § 90, 1) alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu U_m beitragen, also der Durchschnitt z ausserhalb der Strecke von $c = (m-1)\lambda$ bis $v = m\lambda$ liegt, so ist der Beitrag einer bestimmten Last P anf dieser Strecke zu U_m um so grösser, jemehr sich die Last nähert für $z > c$ der Verticale $m-1$, für $z < c$ der Verticale m, wir erhalten die Grenzwerthe von U_m wie folgt:

Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m-1$ für $z > m\lambda$, bei Verticale m für $z < (m-1)\lambda$, U_m nach 2),
Belastung durch Eigengewicht allein, $U_m = \mathfrak{U}_m$.

Für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen kommen die Gurtungsformen in Frage. Diejenigen der Diagonalen sind halb so gross wie in § 33 angegeben.

Gewöhnlichste Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ nicht zwischen 0 und n, das heisst, schneiden sich die Richtungslinien der Gurtungsstäbe o_m und u_m ausserhalb der Spannweite l, dann hat man nach § 33, 7) 8) folgende Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

Belastung durch Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

(7) $$D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{h_{m-1}}\,\frac{\varepsilon - m}{2\varepsilon l}\sum_m^n P(l-a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{h_{m-1}} \frac{\varepsilon - m + n}{2\varepsilon l} \sum_0^{m-1} Pa. \tag{8}$$

Für den am meisten vorkommenden Fall eines positiven ϱ ergeben sich nach 5) 6) die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift, mit der grössten in m möglichen Verkehrslast K,

$$H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{K}{2}, \tag{9}$$

und (nicht genau, aber zu ungünstig) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$H_m = \mathfrak{H}_m + \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{\varrho}{2l}; \tag{10}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m, H_m nach 6),
mit Eigengewicht allein, $H_m = \mathfrak{H}_m$.

Für D_1, D_n tritt ein Grenzwerth für Eigengewicht allein ein und ergibt sich dann der andere nach 3) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1 bezw. $n-1$ gewöhnlich noch ungünstiger als mit Zug II (§ 33).

Andere Gurtungsformen. Liegt $m - \varepsilon$ zwischen 0 und n, d. h. schneiden sich die Richtungslinien der Gurtungsstäbe o_m, u_m innerhalb l, dann erhält man nach § 33 die Grenzbeanspruchungen der Diagonale m:

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m-1$ für $\varepsilon > m\lambda$, bei Verticale m für $\varepsilon < (m-1)\lambda$, D_m nach 3),
mit Eigengewicht allein, $D_m = \mathfrak{D}_m$.

In dem nicht häufig vorkommenden Falle eines negativen ϱ ergeben sich die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m, H_m nach 5),
„ Eigengewicht allein, $H_m = \mathfrak{H}_m$;

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift, mit der grössten in m möglichen Verkehrslast K,

$$H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2}, \tag{11}$$

und (nicht genau, aber zu ungünstig) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m,

$$H_m = \mathfrak{H}_m + \left[(n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{\varrho}{2l}. \tag{12}$$

(Beispiele 110, 111, Aufgaben 48—50.)

§ 93. Einfacher Parallelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen.

Bei beliebigen Richtungen paralleler und gerader Gurtungen hat man in den Gleichungen der §§ 90—92

$$h_m = h, \qquad o_m = u_m = u, \qquad d_m = d, \qquad d'_m = d'; \tag{1}$$

$$\varepsilon = \infty, \qquad \varrho = 0. \tag{2}$$

Für horizontale Gurtungen (Fig. 335), welche wir in den folgenden Spezialisirungen voraussetzen, werden aus 1)

$$h_m = h, \qquad o_m = u_m = \lambda, \qquad d_m = d'_m = d. \tag{3}$$

Wir erhalten damit nach § 90, 1) für beliebige Belastung

$$\begin{cases} U_m = [(2n-2m+1)S + (2m-1)S']\dfrac{1}{2nh} = -O_m, \\ D_m = (S'-S)\dfrac{d}{2lh} = -D'_m, \\ H_m = \dfrac{1}{2}(K_u - K_o). \end{cases} \tag{4}$$

Die S, S' sind aus § 87 zu entnehmen. Neben 4) gelten für beliebige Belastung auch die unten folgenden Gleichungen 12)—15).

Wird das Eigengewicht mit $g = g_o + g_u$ per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angenommen, dann folgen aus § 90, 7) die für Belastung durch Eigengewicht allein entstehenden Stabkräfte

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_m = [m(n-m) + (m-1)(n-m+1)]\dfrac{g\lambda^2}{4h} = -\mathfrak{O}_m, \\ \mathfrak{D}_m = (n-2m+1)\dfrac{g\lambda d}{4h} = -\mathfrak{D}'_m, \\ \mathfrak{H}_m = \dfrac{g_u - g_o}{2}\lambda. \end{cases} \tag{5}$$

Für g_u, g_o gilt alles in § 90 Gesagte. Bei nicht gleichmässig ver-

theiltem Eigengewichte sind $\mathfrak{U}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{H}_m$ aus 4) zu berechnen. Da nach 4) auch für die Grenzbeanspruchungen

$$O_m = -U_m, \qquad D'_m = -D_m,$$

so genügt es, die Grenzwerthe von U_m, D_m, H_m auszudrücken. Diejenigen von D_m können aus §§ 35, 36 entnommen werden.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke, dann folgen aus § 91 mit 2) 3) die Grenzwerthe von U_m

$$(6) \qquad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + [(m(n-m) + (m-1)(n-m+1)] \frac{p\lambda^2}{4h}, \\ U_m = \mathfrak{U}_m, \end{cases}$$

und aus § 35 die Grenzwerthe von $\mathfrak{D}_m$

$$(7) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n-m)^2 \frac{p\lambda d}{(n-1)4h}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - (m-1)^2 \frac{p\lambda d}{(n-1)4h}, \end{cases}$$

oder (für vorausbestimmte Knotenpunktslasten) etwas zu ungünstig

$$(8) \qquad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + (n-m)(n-m+1) \frac{p\lambda d}{4nh}, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - m(m-1) \frac{p\lambda d}{4nh}. \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen der Verticale m ergeben sich:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$(9) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m;$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$(10) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Formeln a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Formeln b).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angesehen, dann hat man nach 5) 6) die Grenzwerthe von U_m

$$(11) \qquad U_m = \frac{q}{g}\mathfrak{U}_m, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m.$$

Bewegte Radlastzüge. Bei jeder Stellung eines beliebigen Lastsystems $P_1, P_2, \ldots$ auf dem Träger hat man nach § 92, 2) — 6) mit 2) 3) für Gurtungen und Diagonalen:

$$(12)\quad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[(2n-2m+1)\sum\limits_0^{m-1} Pa \\ \qquad + (n-2m+1)\sum\limits_{m-1}^{m} P(a-z) \\ \qquad + (2m-1)\sum\limits_m^n P(l-a)\Big]\dfrac{1}{2nh} \\ \text{mit}\quad z = -\dfrac{m-1}{n-2m+1}\,l, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[\sum\limits_0^{m-1} Pa + (n-1)\sum\limits_{m-1}^{m} P(z-a) \\ \qquad - \sum\limits_m^n P(l-a)\Big]\dfrac{d}{2lh} \\ \text{mit}\quad z = \dfrac{m-1}{n-1}\,l, \end{cases}$$

und für die Verticalen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$(14)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{K}{2},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$(15)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2},$$

unter K die in Verticale m auf den Träger übertragene Verkehrslast verstanden, welche durch § 92, 4) ausgedrückt werden kann. Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Untergurt durch a), diejenige des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Obergurt durch b) bestimmt.

Nach § 92 oder unmittelbar nach vorstehenden Gleichungen treten die unteren Grenzwerthe von U_m, H_m für Eigengewicht allein ein, der obere Grenzwerth von U_m ergibt sich aus 12) bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O für die U_m der ersten Trägerhälfte

bei Verticale m, für die U_m der zweiten bei Verticale $m-1$. Der obere Grenzwerth von H_m folgt aus 14) oder 15) mit der grössten in Verticale m angreifenden Verkehrslast K. Für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen schliesslich hat man:

bei Belastung durch Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(16) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d}{2lh} \sum_m^n P(l-a),$$

bei Belastung durch Zug II von 0 bis $m-1$, Vorderrad O bei Verticale $m-1$,

$$(17) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d}{2lh} \sum_0^{m-1} Pa .$$

Für D_1, D_n tritt ein Grenzwerth für Eigengewicht allein ein und ergibt sich dann der andere nach 13) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1 bezw. $n-1$ gewöhnlich noch ungünstiger als mit Zug II. — (Beispiele 112—114.)

§ 94. **Einfacher Parallelträger doppelten Systems mit ungleichlangen Feldern.** †

Ein Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern werde als Fachwerk doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen und horizontalen Gurtungen hergestellt. Die Fahrbahnträger überspannen je ein Feld, die einzeln Felder brauchen aber nicht gleichlang zu sein. Es sollen die Stabkräfte für beliebige Belastung und ihre Grenzwerthe für gleichmässig vertheilte bewegte Last und bewegte Radlastzüge abgeleitet werden.

Wir führen die in Fig. 336 ersichtlichen Bezeichnungen ein. Ferner seien e_m die Abscisse der Verticale m, S und S' die Momente der Lasten, welche vor und nach Schnitt s auf den Träger kommen, in Hinsicht der Auflager 0 und l, K_o und K_u die Lastensummen, welche in Verticale m oberhalb und unterhalb eines zu berechnenden Stücks angreifen. Wird nun das doppelte System Fig. 336 in die einfachen Systeme Fig. 337 und 338 zerlegt, so hat man bei den in Letzterem eingetragenen Bezeichnungen der Stabkräfte mit Rücksicht auf § 37

$$O_m = X_m + Z'_m = -[(l - e_m)\,S + e_m\,S']\,\frac{1}{2lh}$$

$$-[(l - e_{m-1})\,S + e_{m-1}\,S']\,\frac{1}{2lh},$$

$$U_m = X'_m + Z_m = \quad [(l - e_m)\,S + e_m\,S']\,\frac{1}{2lh}$$

$$+[(l - e_{m-1})\,S + e_{m-1}\,S']\,\frac{1}{2lh},$$

$$H_m = V_m + V' = -[S' - S - lK_u]\,\frac{1}{2l} + [S' - S - lK_o]\,\frac{1}{2l},$$

während die Diagonalbeanspruchungen in allen Fällen halb so gross wie in § 37 für einfaches System angegeben sind. Wir erhalten durch Reduction für beliebige Belastung

$$(1)\qquad \begin{cases} U_m = [(2l - e_m - e_{m-1})\,S + (e_m + e_{m-1})\,S']\,\frac{1}{2lh} = -\,O_m, \\ D_m = (S' - S)\,\frac{d_m}{2lh} = -\,D'_m, \\ H_m = \frac{1}{2}\,(K_u - K_o). \end{cases}$$

Die Werthe von S, S' lassen sich aus § 10 entnehmen. Der Ausdruck für H_m wie die daraus folgenden weiteren Formeln gelten im Allgemeinen nicht für Endverticalen. Neben 1) bestehen für beliebige Belastung auch die Gleichungen 8)—12).

Wird das Eigengewicht mit $g = g_o + g_u$ als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angenommen und gilt bezüglich g_o, g_u das in § 90 Gesagte, so hat man für Eigengewicht allein nach § 10, 5)

$$S = \frac{g}{2}\,e_m\,e_{m-1}, \qquad S' = \frac{g}{2}\,(l - e_m)(l - e_{m-1})$$

und unmittelbar

$$K_o = g_o\,\frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}, \qquad K_u = g_u\,\frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2},$$

womit nach 1) die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte folgen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_m = [(l - e_m)\,e_m + (l - e_{m-1})\,e_{m-1}]\,\frac{g}{4h} = -\,\mathfrak{O}_m, \\ \mathfrak{D}_m = (l - e_m - e_{m-1})\,\frac{g\,d_m}{4h} = -\,\mathfrak{D}'_m, \\ \mathfrak{H}_m = (\lambda_m + \lambda_{m+1})\,\frac{g_u - g_o}{4}. \end{cases}$$

Bei nicht gleichmässig vertheiltem Eigengewichte sind $\mathfrak{U}_m$, $\mathfrak{D}_m$, $\mathfrak{H}_m$ aus 1) zu berechnen. Da nach 1) auch für die Grenzbeanspruchungen

$$O_m = - U_m, \qquad D'_m = - D_m,$$

so genügt es die Grenzwerthe von U_m, D_m, H_m anzugeben.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Wie aus 1) ersichtlich, treten die Grenzwerthe von U_m bei möglichst grossen und möglichst kleinen S, S', für Totalbelastung und Eigengewicht allein, ein, wir erhalten dieselben

$$(3) \qquad U_m = \mathfrak{U}_m + [(l - e_m)\, e_m + (l - e_{m-1})\, e_{m-1}]\, \frac{p}{4h}, \quad U_m = \mathfrak{U}_m.$$

Die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind nach § 37, 5)

$$(4) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{(l - e_m)^2}{l - \lambda_m} \frac{p d_m}{4h}, \quad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{e^2_{m-1}}{l - \lambda_m} \frac{p d_m}{4h},$$

und die Grenzbeanspruchungen der Verticalen nach 1):

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$(5) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - (\lambda_m + \lambda_{m+1})\, \frac{p}{4}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$(6) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + (\lambda_m + \lambda_{m+1})\, \frac{p}{4}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Formeln a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Formeln b).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angesehen, dann sind nach 2) 3) die Grenzwerthe von U_m

$$(7) \qquad U_m = \frac{q}{g}\, U_m, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m.$$

Bewegte Radlastzüge. Für jede Stellung eines beliebigen Lastsystems auf der Fahrbahn hat man nach 1) mit § 10, 2), wenn die Grenzen der $\sum$ Verticalennummern bedeuten, für Gurtungen und Diagonalen:

$$(8)\quad \begin{cases} U_m = \mathfrak{U}_m + \Big[(2l - e_m - e_{m-1})\sum\limits_0^{m-1} Pa \\ \qquad + (l - e_m - e_{m-1})\sum\limits_{m-1}^{m} P(a - z) \\ \qquad + (e_m + e_{m-1})\sum\limits_m^n P(l - a)\Big]\frac{1}{2lh} \\ \quad \text{mit} \quad z = -\frac{l e_{m-1}}{l - e_m - e_{m-1}}, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m - \Big[\sum\limits_0^{m-1} Pa + \left(\frac{l}{\lambda_m} - 1\right)\sum\limits_{m-1}^{m} P(z - a) \\ \qquad - \sum\limits_m^n P(l - a)\Big]\frac{d_m}{2lh} \\ \quad \text{mit} \quad z = \frac{l e_{m-1}}{l - \lambda_m}, \end{cases}$$

und für die Verticalen, da von der Verkehrslast bei Verticale m

$$(10)\qquad K = \frac{1}{\lambda_m}\sum_{m-1}^{m} P(a - e_{m-1}) + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{m}^{m+1} P(e_{m+1} - a)$$

auf den Träger übertragen worden:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$(11)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{K}{2},$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$(12)\qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2}.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, dann ist die Beanspruchung des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Untergurt durch a), diejenige des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Obergurt durch b) bestimmt.

Nach 8) ändert sich der Beitrag einer Last P zwischen den Verticalen $m - 1$ und m nach der Gleichung einer geraden Linie, deren Verlängerung bei $a = z$ die Abscissenaxe schneidet. Da nun schon aus 1) ersichtlich, dass alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne

zu U_m beitragen, der Durchschnitt $a = z$ also ausserhalb der Strecke von e_{m-1} bis e_m liegt, so wächst der Beitrag einer bestimmten Last P auf dieser Strecke, wenn sich die Last nähert für $z > e_m$ der Verticale $m - 1$, für $z < e_{m-1}$ der Verticale m. Wir erhalten den oberen Grenzwerth von U_m aus 8) bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m - 1$ für $z > e_m$, bei Verticale m für $z < e_{m-1}$. Der obere Grenzwerth von H_m folgt aus 11) oder 12) mit der grössten in Verticale m angreifenden Verkehrslast K. Die unteren Grenzwerthe von U_m, H_m treten für Eigengewicht allein ein. Schliesslich hat man nach 9) oder § 37, 13) 14) für die Grenzbeanspruchungen der Diagonalen:

Belastung durch Zug II von m bis n, Vorderrad O bei Verticale m,

$$(13) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{d_m}{2lh} \sum_m^n P(l - a),$$

Belastung durch Zug II von 0 bis $m - 1$, Vorderrad O bei Verticale $m - 1$,

$$(14) \qquad D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{d_m}{2lh} \sum_0^{m-1} Pa.$$

Für D_1, D_n tritt ein Grenzwerth für Eigengewicht allein ein und ergibt sich dann der andere nach 9) mit Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale 1 bezw. $n - 1$ gewöhnlich noch ungünstiger als mit Zug II (§ 37).

Alle in diesem Paragraphen abgeleiteten Gleichungen gehen mit $e_m = m\lambda$ in die für Parallelträger mit gleichlangen Feldern gültigen Spezialformeln des § 93 über. Wir setzen von nun an wieder gleichlange Felder voraus. — (Beispiele 115—118.)

§ 95. Dreieckstr äger und Trapezträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen.

Wir betrachten weitere spezielle Fälle des in §§ 90—92 behandelten einfachen Balkenfachwerks. Die geometrische Anordnung der Dreiecksträger und Trapezträger ist aus § 17 zu entnehmen. Beide Gurtungsaxen sind entweder vollständig gerade oder sie bilden, von einer Verticale ausgehend, gerade Strecken. Da im letzteren Falle immer Symmetrie zur Verticallinie durch die Trägermitte besteht, so genügen Formeln unter Voraussetzung von Abscisse 0 ausgehender gerader Gurtungen. Bezeichnet nun $\mu\lambda$ den (absoluten) Horizontal-

abstand des Schnittpuuktes der Gurtungsaxen vom Auflager 0, so hat man nach § 17 bei nach 0 hin abnehmenden Verticalenlängen

$$(1) \qquad \begin{cases} h_m = h_0 + mc, & o_m = o, \qquad u_m = u, \\ \varepsilon = m + \mu, & \varrho = 0, \end{cases}$$

und bei nach 0 hin zunehmenden Verticalenlängen

$$(2) \qquad \begin{cases} h_m = h_0 - mc, & o_m = o, \qquad u_m = u, \\ \varepsilon = m - \mu, & \varrho = 0. \end{cases}$$

Die Constanten c, μ sind in § 17 ausgedrückt, der Werth $\varrho = 0$ folgt aus dem ersten Ausdrucke § 87, 3) mit Rücksicht auf § 17, 10) 15).

Mit vorstehenden Werthen gelten nun die Formeln der §§ 90—92, wobei wegen $\varrho = 0$ besonders für die Verticalen wesentliche Vereinfachungen eintreten. Die Beanspruchungen und Grenzbeanspruchungen derselben sind in allen Fällen wie für Träger mit symmetrisch zu einer Horizontale liegenden Gurtungen oder Parallelträger ausgedrückt.

Schneiden sich die Gurtungsaxen bei Abscisse 0 oder l, so treten noch weitere Vereinfachungen ein.. Wir haben dann wie in § 37, wenn sich die Gurtungsaxen bei Abscisse 0 schneiden,

$$(3) \qquad h_m = mc, \qquad \varepsilon = m,$$

und wenn sich die Gurtungsaxen bei Abscisse l schneiden,

$$(4) \qquad h_m = (n - m)c, \qquad \varepsilon = m - n.$$

Im ersten Falle hat man also

$$\frac{m}{h_m} = \frac{m-1}{h_{m-1}} = \frac{1}{c}$$

und im zweiten

$$\frac{n-m}{h_m} = \frac{n-m+1}{h_{m-1}} = \frac{1}{c}.$$

Damit folgen beispielsweise die Eigengewichtsbeanspruchungen der Gurtungen für ein gleichmässig auf die Trägerlänge vertheiltes Eigengewicht, wenn sich die Gurtungsaxen bei Abscisse 0 schneiden,

$$(5) \qquad U_m = (2n - 2m + 1)\frac{g\lambda u}{4c} = -\frac{u}{o}\,O_m$$

und wenn sie sich bei Abscisse l schneiden,

$$(6) \qquad U_m = (2m - 1)\frac{g\lambda u}{4c} = -\frac{u}{o}\,O_m.$$

Ferner ergeben die Grenzwerthe von $U_m = -\frac{u}{o}\,O_m$ bei gleichmässig

vertheilter Verkehrslast von p per Längeneinheit der ergriffenen Strecke, wenn sich die Gurtungsaxen bei Abscisse 0 schneiden,

$$(7) \qquad U_m = \mathfrak{U}_m + (2n - 2m + 1)\frac{p\lambda u}{4c}, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m,$$

und wenn sie sich bei Abscisse l schneiden,

$$(8) \qquad U_m = \mathfrak{U}_m - (2m - 1)\frac{p\lambda u}{4c}, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m.$$

Wenn auch das Eigengewicht als gleichmässig vertheilt gilt, hat man also die Grenzwerthe in beiden Fällen

$$(9) \qquad U_m = \frac{q}{g}\mathfrak{U}_m, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m.$$

Die Beanspruchungen und Grenzbeanspruchungen der Diagonalen sind halb so gross als in §§ 38—40 für einfaches System angegeben. Es ist überflüssig dieselben noch besonders anzuschreiben und genügt zu bemerken, dass für D_m (wegen oben liegender X-Gurtung) die oberen Vorzeichen gelten. — (Beispiele 119—121.)

§ 96. Parabelträger und Halbparabelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Allgemeines.

Die geometrische Anordnung dieser Träger ist aus § 17 zu entnehmen. Beide Gurtungsaxen sind Parabeln von verticaler Axe eingeschrieben. Bezeichnen f_o, f_u die positiven oder negativen (jenachdem die Krümmung in positiver oder negativer Ordinatenrichtung erfolgt) Pfeile der betreffenden Parabelbogen, f den Absolutwerth der Pfeildifferenz, und werden die Gurtungen symmetrisch zur Verticallinie durch die Trägermitte vorausgesetzt, so hat man, wenn die Verticalenlängen nach den Trägerenden hin abnehmen,

$$(1) \qquad \begin{cases} h_m = h_0 + m(n-m)\dfrac{4f}{n^2}, \qquad \varepsilon = \dfrac{m(n-m) + \dfrac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + 1}, \\[2ex] \varrho = \dfrac{2\omega}{m(n-m) + \dfrac{n^2 h_0}{4f}}, \end{cases}$$

und wenn die Verticalenlängen nach den Trägerenden hin zunehmen,

$$(2) \qquad \begin{cases} h_m = h_0 - m(n-m)\dfrac{4f}{n^2}, \qquad \varepsilon = \dfrac{m(n-m) - \dfrac{n^2 h_0}{4f}}{n - 2m + 1}, \\[2ex] \varrho = \dfrac{2\omega}{m(n-m) - \dfrac{n^2 h_0}{4f}}, \end{cases}$$

worin f durch § 17, 31) 35) bestimmt und

$$\omega = \frac{f_o + f_u}{f_o - f_u}, \tag{3}$$

also bei horizontalem Obergurte $\omega = -1$,

„ „ Untergurte $\omega = 1$,

„ zu einer Horizontale symmetrischen Gurtungen $\omega = 0$,

entsprechend $f_o = 0$, $f_u = 0$ und $f_o + f_u = 0$. Die angeführten Werthe von ϱ erhält man am einfachsten aus dem ersten Ausdrucke § 87, 3) mit Rücksicht auf § 17, 30) 34).

Da die Stabkräfte und ihre Grenzwerthe in §§ 90—92 für beliebige Gurtungsformen festgestellt wurden, so wollen wir hier Spezialisirungen nur insoweit vornehmen, als sich wesentliche Vereinfachungen ergeben, und das ist wie schon bei einfachem Systeme nur für Parabelträger der Fall. Für diese haben wir nach 1) mit $h_0 = 0$

$$h_m = m(n-m)\frac{4f}{n^2}, \quad \varepsilon = \frac{m(n-m)}{n-2m+1}, \quad \varrho = \frac{2\omega}{m(n-m)}, \tag{4}$$

und es ist danach ϱ zugleich mit ω positiv oder negativ. Mit 4) folgen aus 90, 1) für beliebige Belastung

$$\left\{\begin{aligned} U_m &= \left[\frac{2m-1}{m(m-1)}S + \frac{2n-2m+1}{(n-m)(n-m+1)}S'\right]\frac{nu_m}{8\lambda f} = -\frac{u_m}{o_m}O_m, \\ D_m &= \left[\frac{S'}{(n-m)(n-m+1)} - \frac{S}{m(m-1)}\right]\frac{nd_m}{8\lambda f} = -\frac{d_m}{d'_m}D'_m, \\ H_m &= \left[\frac{S}{m} + \frac{S'}{n-m}\right]\frac{\omega}{l} + \frac{1}{2}(K_u - K_o), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

welche Formeln übrigens kaum einfacher wie die allgemeineren § 90, 1) sind. Die S, S' lassen sich aus § 87 entnehmen.

Wird das Eigengewicht mit $g = g_o + g_u$ per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angenommen und gilt für g_o, g_u das in § 90 Gesagte, dann folgen aus § 90, 7) die vom Eigengewichte allein herrührenden Stabkräfte:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{U}_m = \frac{ngl}{8f}u_m = -\frac{u_m}{o_m}O_m, \\ &\mathfrak{D}_m = 0 = \mathfrak{D}'_m, \qquad \mathfrak{H}_m = \left(\frac{g_u - g_o}{g} + \omega\right)\frac{g\lambda}{2} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und beispielsweise:

(7) bei horizontalem Obergurte $\mathfrak{H}_m = -g_o\lambda,$

(8) „ „ Untergurte $\mathfrak{H}_m = g_u\lambda,$

(9) „ zu einer Horizontale symmetrischen Gurtungen $\mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}\lambda.$

Auf Grund von 6) lässt sich der am Schlusse des § 41 hervorgehobene Satz auch hier aussprechen.

Es sollen im nächsten Paragraphen noch die Grenzbeanspruchungen der Parabelträger für gleichmässig vertheilte bewegte Last angegeben werden, während bezüglich ihrer Berechnung für bewegte Radlastzüge auf § 92 hingewiesen wird.

§ 97. Parabelträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last.

Es sei p die Verkehrslast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. Die Beanspruchungen durch das Eigengewicht allein lassen sich für alle Fälle aus § 96 entnehmen. Die Grenzwerthe von O_m, D'_m sind nach § 91, 1) durch diejenigen von U_m, D_m bestimmt. Letztere und die Grenzwerthe von H_m folgen aus den Gleichungen des § 91 mit h_m, ε, ϱ nach § 96, 4), doch können die D_m auch aus § 42 entnommen werden. Wir erhalten

(1) $$U_m = \mathfrak{U}_m + \frac{npl}{8f}u_m, \qquad U_m = \mathfrak{U}_m,$$

(2) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{n}{n+1}\frac{pl}{16f}d_m, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{n}{n+1}\frac{pl}{16f}d_m, \end{cases}$$

oder etwas zu ungünstig (für vorausbestimmte Knotenpunktslasten)

(3) $$\begin{cases} D_m = \mathfrak{D}_m + \frac{pl}{16f}d_m, \\ D_m = \mathfrak{D}_m - \frac{pl}{16f}d_m. \end{cases}$$

Die Grenzbeanspruchungen der Verticalen ergeben sich:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift, bei positivem ω etwas zu ungünstig

(4) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \omega\frac{p\lambda}{2}, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2},$$

und bei negativem ω genau

(5) $$H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{\omega - 1}{2}p\lambda, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m,$$

also beispielsweise bei horizontalem Obergurte mit $\omega = -1$

(6) $$H_m^* = \mathfrak{H}_m - p\lambda\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m\,,$$

und bei zu einer Horizontale symmetrischen Gurtungen mit $\omega = 0$

(7) $$H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2}\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m;$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift, bei positivem ω

(8) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{\omega+1}{2} p\lambda\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m\,,$$

bei negativem ω etwas zu ungünstig

(9) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \omega \frac{p\lambda}{2}\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}\,,$$

also beispielsweise bei horizontalem Untergurte mit $\omega = 1$

(10) $$H_m = \mathfrak{H}_m + p\lambda\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m\,,$$

und bei zu einer Horizontale symmetrischen Gurtungen

(11) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}\,, \qquad H_m = \mathfrak{H}_m\,.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, dann gelten für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Untergurt die Gleichungen a), für das Verticalenstück von Fahrbahn bis Obergurt die Gleichungen b).

Wird das Eigengewicht mit g per Längeneinheit als gleichmässig vertheilt auf die Trägerlänge angenommen, dann hat man nach 1) 2) mit § 96, 6) und $q = g + p$ die Grenzwerthe

(12) $$U_m = \frac{nql}{8f} u_m = \frac{q}{g} \mathfrak{U}_m\,,$$

(13) $$D_m = \frac{n}{n+1} \frac{pl}{16f} d_m\,, \qquad D_m = -\frac{n}{n+1} \frac{pl}{16f} d_m\,,$$

oder etwas zu ungünstig (für vorausbestimmte Knotenpunktslasten)

(14) $$D_m = \frac{pl}{16f} d_m\,, \qquad D_m = -\frac{pl}{16f} d_m\,.$$

Auf Grund von 12) 13) kann derselbe Satz ausgesprochen werden, welcher in § 42 auf Grund der dortigen Gleichungen 8) 9) gegeben wurde. — (Beispiele 122—124.)

§ 98. Paulische Linsenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Gleichmässig vertheilte bewegte Last. †

Wir haben in §§ 46—48 Träger einfachen Systems kennen gelernt, für welche die Maximalbeanspruchungen einer Gurtung constant sind. Erhalten diese Träger Linsenform, dann werden auch die Maximalbeanspruchungen der anderen Gurtung nur wenig verschieden. Vollständig constante und numerisch gleiche Maximalbeanspruchungen beider Gurtungen lassen sich jedoch bei einfachen Balkenfachwerken doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen erreichen, wenn die Berechnung auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme stattfindet. Speziell für gleichmässig vertheilte feste und bewegte Last werden dann auch die Minimalbeanspruchungen beider Gurtungen constant und gleich, während beim parabolischen Segmentträger im selben Falle die beiden Grenzbeanspruchungen des Horizontalgurts constant sind (§ 97). Da nach § 91, 1) bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen für jede Belastung

$$\frac{O_m}{o_m} = - \frac{U_m}{u_m},$$

so muss für Grenzbeanspruchungen $O_m = - U_m$ auch $o_m = u_m$ sein, die Gurtungsstäbe jedes Feldes müssen parallel laufen oder symmetrisch zu einer Horizontalen liegen. Im ersteren Falle erhält man unbrauchbare Formen und wir ziehen den letzteren allein in Betracht. Die Berechnung soll in diesem Paragraphen für gleichmässig vertheilte feste und bewegte Last, im nächsten für bewegte Radlastzüge bei ebenfalls gleichmässig vertheilter fester Last gezeigt werden. Aus dem in § 46 hervorgehobenen Grunde wird es fast immer genügen, die Formberechnung für gleichmässig vertheilte Lasten vorzunehmen.

Formberechnung. Wenn das Eigengewicht mit g per Längeneinheit des Trägers und die Verkehrslast mit p per Längeneinheit der ergriffenen Strecke gleichmässig vertheilt sind, dann hat man nach § 91, 2) 3) mit $q = g + p$ den oberen Grenzwerth von U_m bei beliebigen Gurtungsformen

$$U_m = \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right] u_m \frac{q\lambda}{4}.$$

Da nun für symmetrisch zu einer Horizontale liegende Gurtungen

$$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2},$$

so wird constant verlangt

$$(1)\qquad c = \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2},$$

woraus

$$(2)\qquad h_{m-1} = \frac{(m-1)((n-m+1)h_m}{\frac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}} - m(n-m)}.$$

Diese Gleichung liefert für $m = 1$ und $m = n + 1$ die Verticalenlängen $h_0 = 0$ und $h_n = 0$, die beiden Gurtungen treffen sich also über den Auflagern, der Paulische Träger hat Linsenform. Bei Berechnung der Constanten c für eine gegebene grösste Trägerhöhe h hat man zu unterscheiden, ob die Felderzahl n gerade oder ungerade ist.

Ungerade Felderzahl. Bei ungeradem $n = 2\sigma + 1$ sind für $m = \sigma + 1$ die Verticalenlängen $h_m = h_{m-1} = h$. Die Substitution dieser Werthe in 1) ergibt

$$(3)\qquad c = \frac{n^2 - 1}{2}\,\frac{\lambda}{h}.$$

Da die Längen der zwei mittleren Verticalen gleich h bekannt sind, so lässt sich nun nach 1) mit 3) von jenen nach Auflager 0 oder l hin die Länge jeder Verticale aus der vorhergehenden berechnen. Am einfachsten verfährt man jedoch in folgender Weise. Der gegenüber λ^2 ohnehin nur kleine zweite Summand unterm Wurzelzeichen in 2) wird dem Parabelträger von ungeradem n entsprechend gesetzt

$$\left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{n - 2m + 1}{n^2 - 1}\,2h\right)^2,$$

womit zur vorläufigen Berechnung der Verticalenlängen folgt

$$(4)\qquad h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)h_m}{\frac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{n-2m+1}{n^2-1}\,2h\right)^2}} - m(n-m)}.$$

Zu genauerer Berechnung setze man die mittelst 4) gefundenen Differenzen $h_m - h_{m-1}$ auf der rechten Seite von 2) ein, womit diese Gleichung genauere Werthe der h_{m-1} liefert.

Gerade Felderzahl. Bei geradem $n = 2\sigma$ würde es sehr umständlich sein, die Constante c absolut genau durch n, λ, h auszudrücken. Man kann jedoch wie folgt verfahren. Da die Gurtungs-

curve schon im Allgemeinen der Parabel nahe kommt, in der Mitte aber, wo sie sehr flach verläuft, kaum noch von ihr abweicht, so setze man für $m = \sigma$ dem Parabelträger von geradem n entsprechend

$$\frac{m(n-m)}{h_m} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}} = \frac{n^2}{4h},$$

$$\frac{h_m - h_{m-1}}{2} = \frac{n-2m+1}{n^2} 2h = \frac{2h}{n^2},$$

womit aus 1)

$$c = \sqrt{1 + \left(\frac{nl}{2h}\right)^2}, \tag{5}$$

also sehr angenähert

$$c = \frac{nl}{2h}. \tag{6}$$

Zur vorläufigen Berechnung der Verticalenlängen dient mit c nach 5) oder 6 die Formel

$$h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)h_m}{\dfrac{ch_m}{\sqrt{\lambda^2 - \left(\dfrac{n-2m+1}{n^2} 2h\right)^2}} - m(n-m)}, \tag{7}$$

welche aus 2) durch Substitution des über 5) angeschriebenen ersten Ausdrucks für $h_m - h_{m-1}$ entstanden ist. Das im Anschlusse an 4) Gesagte gilt auch hier, doch kann man vor Beginn einer zweiten Berechnung auch c aus 1) mit $m = \sigma$ noch einmal berechnen, wenn überhaupt das zuletzt gefundene $h_{\sigma-1}$ von dem dem Parabelträger entsprechenden abweicht.

Die gegebenen Formeln zeigen, dass sowohl bei gerader wie bei ungerader Felderzahl die Trägerform unabhängig von den Werthen der g, p, q ist.

Beanspruchungen. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind

$$U = c\frac{q\lambda}{4} = -O, \qquad \mathfrak{U} = c\frac{g\lambda}{4} = -\mathfrak{O}. \tag{8}$$

Für die Verticale m hat man nach §§ 90, 91, da die Gurtungen symmetrisch zu einer Horizontalen liegen, folgende Grenzbeanspruchungen:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{p\lambda}{2}, \qquad \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}, \tag{9}$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpnnkte m des Untergurts angreift,

(10) $$H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{p\lambda}{2}, \qquad \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2}\lambda.$$

Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so sind die Grenzbeanspruchungen des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Untergurt durch a), diejenigen des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Obergurt durch b) bestimmt. Das Eigengewicht der Fahrbahn ist für erstere in g_o, für letztere in g_u einzurechnen. Für die Diagonalen bleiben die Gleichungen § 90, 2) 7) und § 91, 1) 4) gültig. — (Beispiel 125.)

§ 99. Paulische Linsenträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. Bewegte Radlastzüge. †

Wie im vorigen Paragraphen sollen beide Gurtungen numerisch gleiche, auf der ganzen Trägerlänge constante Maximalbeanspruchungen erhalten. Wir wissen bereits, dass dann die Gurtungen symmetrisch zu einer Horizontalen liegen müssen.

Formberechnung. Nach § 87, 1) mit § 33, 1) 2) und § 31, 16) oder auch nach § 92, 2) mit § 90, 7) hat man bei beliebigen Gurtungsformen für beliebige Belastung der Fahrbahn

$$\begin{aligned} U_m = &\left[m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a)\right]\frac{u_m}{2lh_m} \\ &+ \left[(m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa \right. \\ &\left. + (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a)\right]\frac{u_m}{2lh_{m-1}}. \end{aligned}$$

Das grösste U_m entsteht nach § 92 bei Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale $m-1$ wenn $z > m\lambda$, bei Verticale m wenn $z < (m-1)\lambda$. Der Werth

$$z = \frac{l}{1 - \frac{n-m}{m-1}\frac{h_{m-1}}{h_m}}$$

drückt sich mit Rücksicht auf § 96, 4) speziell für den Parabelträger aus

$$z = -\frac{ml}{n-2m+1},$$

er ist also für diesen auf der ersten Trägerhälfte negativ, auf der zweiten positiv. Dasselbe gilt für den nur wenig vom Parabelträger abweichenden Paulischen Träger, wovon man sich, wenn man will, nachträglich überzeugen kann. Setzen wir also für die ungünstigste Belastung durch Zug I von 0 bis n, Rad O bei Verticale m (für die erste Trägerhälfte, bei Verticale $m-1$ für die zweite Trägerhälfte, welche jedoch wegen Symmetrie zur Trägermitte nicht berechnet zu werden braucht),

$$(1) \qquad R_m = m(n-m)\frac{gl^2}{2n} + (n-m)\sum_0^m Pa + m\sum_m^n P(l-a),$$

$$(2) \qquad Q_m = (m-1)(n-m+1)\frac{gl^2}{2n} + (n-m+1)\sum_0^{m-1} Pa$$

$$+ (m-1)\sum_{m-1}^n P(l-a),$$

dann wird der obere Grenzwerth von U_m

$$U_m = \left(\frac{R_m}{h_m} + \frac{Q_m}{h_{m-1}}\right)\frac{u_m}{2l} = -O_m,$$

und weil für symmetrisch zu einer Horizontalen liegende Gurtungen

$$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2},$$

so muss beim Paulischen Träger constant sein

$$(3) \qquad c = \left(\frac{R_m}{h_m} + \frac{Q_m}{h_{m-1}}\right)\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2},$$

woraus folgt

$$(4) \qquad h_{m-1} = \frac{Q_m h_m}{\dfrac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2}} - R_m}.$$

Diese Gleichung liefert mit Rücksicht auf den Ausdruck von Q_m für $m = 1$ und $m = n+1$ die Verticalenlängen $h_0 = 0$, $h_n = 0$, der Träger hat auch bei Berechnung für bewegte Radlastzüge Linsenform. Bei Ableitung der Constanten c für eine gegebene grösste Trägerhöhe h ist wieder zu unterscheiden, ob die Felderzahl n gerade oder ungerade ist.

Ungerade Felderzahl Bei ungeradem $n = 2\sigma + 1$ folgt aus 3) mit $m = \sigma$ wegen $h_{\sigma+1} = h_\sigma = h$,

(5) $$c = (R_{\sigma+1} + Q_{\sigma+1}) \frac{\lambda}{h}.$$

Mit diesem Werthe von c könnte die Berechnung der Verticalenlängen von der Mitte aus nach den Auflagern hin nach 3) erfolgen. Doch hat man entsprechend § 98, 4) zu bequemerer Berechnung

(6) $$h_{m-1} = \frac{Q_m h_m}{\frac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{n-2m+1}{n^2-1} 2h\right)^2}} - R_m}.$$

Die hieraus folgenden Verticalenlängen können in 4) unterm Wurzelzeichen zu nochmaliger, genauerer Berechnung verwendet werden.

Gerade Felderzahl. Bei geradem $n = 2\sigma$ folgt aus 3), wenn wie im vorigen Paragraphen für $m = \sigma$

$$h_{m-1} = (m-1)(n-m+1)\frac{4h}{n^2} = \frac{n^2-4}{n^2} h,$$
$$h_m = h, \qquad \frac{h_m - h_{m-1}}{2} = \frac{2h}{n^2}$$

gesetzt werden,

(7) $$c = \frac{2}{n^2}\left(R_\sigma + Q_\sigma \frac{n^2}{n^2-4}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{nl}{2h}\right)^2},$$

also angenähert

(8) $$c = (R_\sigma + Q_\sigma)\frac{\lambda}{h}.$$

Zu bequemer Berechnung der Verticalenlängen hat man entsprechend § 98, 7),

(9) $$h_{m-1} = \frac{Q_m h_m}{\frac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{n-2m+1}{n^2} 2h\right)^2}} - R_m},$$

und lässt sich mit den hieraus folgenden $h_m - h_{m-1}$ nach 4) wieder genauer rechnen, wozu auch c aus 3) mit $m = \sigma$ noch einmal berechnet werden kann, wenn das zuletzt gefundene $h_{\sigma-1}$ von dem für den Parabelträger geltenden abweicht.

Beanspruchungen. Die Grenzbeanspruchungen der Gurtungen sind

(10) $$\begin{cases} U_m = \frac{c}{2l} = -O_m, \\ \mathfrak{U}_m = \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\frac{g\lambda u_m}{4} = -\mathfrak{O}_m, \end{cases}$$

und nach § 92 die Grenzbeanspruchungen der Verticale m:

a) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Obergurts angreift,

$$(11) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m - \frac{K}{2}, \qquad \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2} \lambda,$$

b) wenn die Fahrbahnlast im Knotenpunkte m des Untergurts angreift,

$$(12) \qquad H_m = \mathfrak{H}_m + \frac{K}{2}, \qquad \mathfrak{H}_m = \frac{g_u - g_o}{2} \lambda,$$

worin K die grösste in Verticale m auf den Träger übertragene Verkehrslast bezeichnet (Belastung durch Zug I von $m - 1$ bis $m + 1$, Rad O bei Verticale m), welche beispielsweise durch § 92, 4) ausgedrückt ist. Greift die Fahrbahnlast zwischen beiden Gurten in Verticale m an, so sind die Grenzbeanspruchungen des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Untergurt durch a), diejenigen des Verticalenstücks von Fahrbahn bis Obergurt durch b) bestimmt. Das Eigengewicht der Fahrbahn ist für erstere in g_o, für letztere in g_u einzurechnen. Für die Diagonalen bleiben die Gleichungen § 90, 2) 7) und § 92, 1) 7) 8) gültig. — (Beispiele 126, 127.)

§ 100. Paulische Segmentträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen. †

Sollen bei einfachen Balkenfachwerken doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen beide Gurtungen gleiche und constante Maximalbeanspruchungen erleiden, so erhält der Träger Linsenform. Will man Segmentkörper anwenden, so lässt sich für gleichmässig vertheilte feste und bewegte Last eine constante, für gleichmässig vertheilte feste Last und bewegte Radlastzüge eine annähernd constante Maximalbeanspruchung der Horizontalgurtung erreichen, wenn die Polygonalgurtung parabolisch gewählt wird. Es kann sich nun noch darum handeln, Segmentträger doppelten Systems mit gekreuzten Diagonalen herzustellen, bei welchen die Polygonalgurtung constante Maximalbeanspruchungen erleidet. Da die Ableitung der Gleichungen für die Formberechnung dann ganz wie in §§ 98, 99 vor sich geht, nur dass die Stablängen

$$s_m = \sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}$$

der constant beanspruchten Gurtung etwas anders ausgedrückt sind, so können wir uns im Folgenden sehr kurz halten. Bezeichen S_m und T_m die Beanspruchungen der Polygonalgurtung und Horizontal-

gurtung im Felde m allgemein, $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{T}_m$ die entsprechenden Beanspruchungen für Eigengewicht allein, dann gelten in den folgenden Gleichungen die oberen Vorzeichen bei oben liegender Polygonalgurtung, die unteren Vorzeichen bei unten liegender Polygonalgurtung.

Gleichmässig vertheilte bewegte Last. Bei gleichmässig vertheiltem Eigengewichte von g per Längeneinheit Träger und ebensolcher Verkehrslast von p per Längeneinheit der ergriffenen Strecke hat man nach § 91, 1) — 3) die obere Grenzbeanspruchung der Polygonalgurtung beliebiger Segmentträger

$$S_m = \mp \frac{q\lambda}{4}\left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}.$$

Wählen wir also constant

$$(1) \qquad c = \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2},$$

dann werden beide Grenzbeanspruchungen der Polygonalgurtung constant

$$(2) \qquad S = \mp c\frac{q\lambda}{4}, \qquad \mathfrak{S} = \frac{g}{q}S,$$

während man nach § 91, 1) für diejenigen der Horizontalgurtung hat

$$(3) \qquad T_m = \pm c\frac{q\lambda^2}{4 s_m}, \qquad \mathfrak{T}_m = \frac{g}{q}T_m,$$

und die Beanspruchungen der Diagonalen und Verticalen durch §§ 90, 91 bestimmt bleiben. Aus 1) folgt

$$(4) \qquad h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)h_m}{\frac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}} - m(n-m)}.$$

Bei Berechnung der Constanten c für eine gegebene grösste Trägerhöhe h hat man zu unterscheiden, ob die Felderzahl gerade oder ungerade ist.

Ungerade Felderzahl. Für ein ungerades $n = 2\sigma + 1$ folgt ganz wie in § 98

$$(5) \qquad c = \frac{n^2-1}{2}\frac{\lambda}{h},$$

und zu vorläufiger Berechnung der Verticalenlängen

$$(6) \qquad h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)h_m}{\frac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{n-2m+1}{n^2-1}4h\right)^2}} - m(n-m)}.$$

Die hieraus folgenden $h_m - h_{m-1}$ sind in 4) unterm Wurzelzeichen zu nochmaliger, genauerer Berechnung der Verticalenlängen zu verwenden.

Gerade Felderzahl. Bei geradem $n = 2\sigma$ wird unsere Constante

$$(7) \qquad c = 2\sqrt{1 + \left(\frac{nl}{4h}\right)^2},$$

also angenähert

$$(8) \qquad c = \frac{nl}{2h}.$$

Zur vorläufigen Berechnung der Verticalenlängen hat man 4) oder

$$(9) \qquad h_{m-1} = \frac{(m-1)(n-m+1)h_m}{\dfrac{ch_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\dfrac{n-2m+1}{n^2}4h\right)^2}} - m(n-m)}.$$

Mit den hieraus folgenden Werthen der h kann wieder nach 4) genauer gerechnet werden, wozu man auch c aus 1) mit $m = \sigma$ noch einmal berechnen kann, wenn das zuletzt gefundene $h_{\sigma-1}$ überhaupt von dem dem Parabelträger entsprechenden abweicht. Unsere Gleichungen zeigen, dass sowohl bei gerader wie ungerader Felderzahl die Trägerform unabhängig von den Werthen g, p, q ist.

Bewegte Radlastzüge. Mit den im vorigen Paragraphen gegebenen Werthen von R_m, Q_m hat man den oberen Grenzwerth von S_m bei beliebigen Segmentträgern

$$S_m = \mp \frac{1}{2l}\left(\frac{R_m}{h_m} + \frac{Q_m}{h_{m-1}}\right)\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}.$$

Wählen wir nun constant

$$(10) \qquad c = \left(\frac{R_m}{h_m} + \frac{Q_m}{h_{m-1}}\right)\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2},$$

so werden die Grenzbeanspruchungen der Polygonalgurtung

$$(11) \qquad S_m = \mp \frac{c}{2l}, \qquad \mathfrak{S}_m = \mp \left[\frac{m(n-m)}{h_m} + \frac{(m-1)(n-m+1)}{h_{m-1}}\right]\frac{g\lambda s_m}{4}$$

und diejenigen der Horizontalgurtung

$$(12) \qquad T_m = -\frac{\lambda}{s_m}S_m = \pm \frac{c}{2ns_m}, \qquad \mathfrak{T}_m = -\frac{\lambda}{s_m}\mathfrak{S}_m,$$

während die Beanspruchungen der Diagonalen und Verticalen durch §§ 90, 92 bestimmt bleiben. Aus 10) folgt

$$h_{m-1} = \frac{Q_m h_m}{\dfrac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + (h_m - h_{m-1})^2}} - R_m}. \tag{13}$$

Die Berechnung von c bei gegebener grösster Trägerhöhe h hängt davon ab, ob die Felderzahl gerade oder ungerade ist.

Ungerade Felderzahl. Bei ungeradem $n = 2\sigma + 1$ erhält man

$$c = (R_{\sigma+1} + Q_{\sigma+1}) \frac{\lambda}{h}, \tag{14}$$

und für die Verticalenlängen zunächst

$$h_{m-1} = \frac{Q_m h_m}{\dfrac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{n - 2m + 1}{n^2 - 1} 4h\right)^2}} - R_m}. \tag{15}$$

Mit den hieraus folgenden h kann nach 13) genauer gerechnet werden.

Gerade Felderzahl. Bei geradem $n = 2\sigma$ ergibt sich

$$c = \frac{4}{n^2}\left(R_\sigma + Q_\sigma \frac{n^2}{n^2 - 4}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{nl}{4h}\right)^2} \tag{16}$$

und angenähert

$$c = (R_\sigma + Q_\sigma) \frac{\lambda}{h}. \tag{17}$$

Die Verticalenlängen folgen zunächst aus

$$h_{m-1} = \frac{Q_m h_m}{\dfrac{c h_m}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{n - 2m + 1}{n^2} 4h\right)^2}} - R_m} \tag{18}$$

und lassen sich wieder nach 13) genauer berechnen. Hierzu kann natürlich auch c aus 10) mit $m = \sigma$ nochmals berechnet werden, wenn das zuletzt gefundene $h_{\sigma-1}$ überhaupt von dem für den Parabelträger geltenden abweicht. — (Beispiele 128—130.)

Anhang.

Bemerkungen über statisch unbestimmte Träger.

Wir hatten in diesem Werke in erster Linie statisch bestimmte Träger im Auge. Indessen gelten die Beziehungen und Methoden der zwei ersten Abschnitte und der §§ 86—89 auch für statisch unbestimmte Trägerarten. Man kann danach die Schnittkräfte und Schnittmomente vollwandiger Träger sowie die Stabkräfte von Fachwerkträgern berechnen und nach den Methoden § 12 f oder e ohne besondere Theorie auch annähernd deren Grenzwerthe erhalten, sobald nur die in den Formeln auftretenden Momente M, M' und der Horizontalschub H bekannt sind. Für alle im Ingenieurwesen üblichen statisch unbestimmten Träger lassen sich diese Grössen aus des Verfassers „Aufgaben zur Theorie elastischer Körper", Leipzig, Teubner 1885 entnehmen (Aufgaben 46, 47, 48, 53, 54, 57, 89, 104).

Von statisch unbestimmten Trägerarten kommen als Fachwerke gegenwärtig fast allein vor continuirliche Balkenträger und einfache symmetrische Bogenträger mit Kämpfergelenken. Wir wollen deshalb für diese Trägerarten auf die fehlenden Grössen noch besonders hinweisen. Im Folgenden beziehen sich die Nummern No. auf die am Schlusse dieses Buches verzeichneten Schriften.

Continuirliche Balkenfachwerke wurden bisher fast immer als Parallelträger ausgeführt und stets unter Voraussetzung einer im spannungslosen Zustande geraden Axe berechnet. Gibt man (Fig. 340) dann von links nach rechts gehend den Stützen die Indices 0, 1, 2, $..r$, $..n$, $n+1$ und den Oeffnungen die Indices 0, 1, 2, $..l_{r-1}$, l_r, $..n$, womit n die Anzahl der Zwischenstützen bezeichnet, so hat man im Falle frei aufliegender Enden bei verticalen Schnitten 0, l durch die Auflager allgemein

$$(1)\qquad H=0,\qquad M_0=M_{n+1}=0$$

und mit genügender Annäherung für irgendwelche bei Abscissen a auf die Hauptträger oder auch erst auf Zwischenträger kommende Lasten P

$$(2)\quad M_{r-1}\,l_{r-1}+2M_r(l_{r-1}+l_r)+M_{r+1}\,l_r$$
$$=-\frac{1}{l_{r-1}}\sum_{r-1}Pa(l-a)(l+a)$$
$$-\frac{1}{l_r}\sum_{r}Pa(l-a)(2l-a),$$

für beliebige über je eine Oeffnung gleichmässig vertheilte Lasten von p per Längeneinheit

$$(3)\quad M_{r-1}\,l_{r-1}+2M_r(l_{r-1}+l_r)+M_{r+1}\,l_r=-\frac{1}{4}(p_{r-1}\,l^3_{r-1}+p_r\,l^3_r).$$

Die Indices der M deuten an, welchen Stützen diese Momente entsprechen, die Indices der Σ, l, p besagen, auf welche Oeffnungen sich die Summen, Spannweiten und Belastungen beziehen. Da ebensoviel Gleichungen der Form 2) oder 3) als Zwischenstützen existiren, so können sämmtliche Stützenmomente für jede Belastung berechnet werden. Mit den damit bekannten M, M' gelten beispielsweise in jeder Oeffnung von Parallelträgern bei einfachem Systeme mit Verticalen die Gleichungen des § 21, bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen die Gleichungen des § 89. Für die Reaction einer beliebigen Stütze r hat man, wenn V'_{r-1}, V_r die Werthe von V' und V in der vorhergehenden bezw. nachfolgenden Oeffnung bezeichnen,

$$(4)\qquad R_r=V'_{r-1}+V_r,$$

worin für beliebige bei Abscissen a angreifende Lasten P

$$(5)\quad V'=\frac{1}{l}\Big[M-M'+\sum_0^l Pa\Big],\quad V=\frac{1}{l}\Big[M'-M+\sum_0^l P(l-a)\Big]$$

und für eine auf die betreffende Oeffnung gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit

$$(6)\qquad V'=\frac{1}{l}\Big(M-M'+\frac{pl^2}{2}\Big),\quad V=\frac{1}{l}\Big(M'-M+\frac{pl^2}{2}\Big).$$

Ueber Formeln zu directer Berechnung einzelner Stützenmomente siehe No. 29 A 48, über den Einfluss beabsichtigter oder unbeabsichtigter Aenderungen der einer geraden Trägeraxe entsprechenden Stützhöhen No. 29 A 47, über den Einfluss ungleichmässiger Temperaturänderungen No. 29 A 57, über Berechnung der R und damit der M aus den Längenänderungen der einzeln Fachwerkstäbe No. 28 A 104. Die Belastungen für die Grenzwerthe der Stützenreactionen und Stabkräfte lassen sich aus No. 3 §§ 19, 24, 27, 28 entnehmen, indem die dort für M_x gefundenen Belastungen den Gurtungen, die

für V_x gefundenen den Füllungsgliedern entsprechen, wenn x für die Gurtungsstäbe und Diagonalen eines Feldes m in der Mitte des Letzteren, für die Verticale m aber bei einfachem Systeme inmitten des Feldes m oder $m+1$ gewählt wird, jenachdem die Fahrbahnlast auf die Knotenpunkte der X-Gurtung oder Z-Gurtung wirkt. Bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen sind die Grenzbeanspruchungen der Verticalen wie für einfache Parallelträger in § 93 bestimmt.

Für *symmetrische Bogenfachwerke mit Kämpfergelenken* hat man stets $M = M' = 0$, womit die Verticalenreactionen der Stützen aus 5) 6) folgen. Bezüglich des Ausdrucks von H kommt es darauf an, ob der Bogen eine in den Kämpfergelenken endigende ausgesprochene Axe hat oder nicht. Im ersteren Falle, also insbesondere bei Sichelträgern und concentrischen Gurtungen, kann man die für stabförmige Bogen mit voller Wand gültigen Formeln verwenden, wonach für irgendwelche bei Abscissen a_1, a_2, .. auf den Bogen oder auch auf Zwischenträger kommende Lasten P_1, P_2, ..

$$H = \frac{5}{8fl^3} \sum_0^l Pa(l-a)(l^2 + la - a^2) \tag{7}$$

und für eine auf die ganze Länge gleichmässig vertheilte Last von p per Längeneinheit

$$H = \frac{pl^2}{8f}, \tag{8}$$

unter f den Pfeil der Bogenaxe verstanden. Letztere ist für die Ableitung dieser Formeln zwar parabolisch vorausgesetzt, doch gelten dieselben genügend genau auch für andre nicht ungewöhnlich steile Bogen. Ueber den Einfluss von Temperaturänderungen und Ausweichen der Widerlager siehe No. 29 A 54e, über etwas genauere Ausdrücke für H (mit Berücksichtigung der Axialkraft) No. 29 A 88, über Formeln für H bei beliebiger Axform und beliebig veränderlichen Querschnitten No. 16.

Handelt es sich jedoch um einen Bogen ohne ausgesprochene Axe durch die Kämpfergelenke oder will man sonst den Horizontalschub aus den Längenänderungen der einzeln Fachwerkstäbe berechnen, so bezeichne A diejenige Belastung eines Stabes, welche derselbe für irgend eine in Frage kommende Belastung erhielte, wenn $H = 0$ wäre, π seine Beanspruchung für eine Kraft $H = 1$ allein und s, F, E Länge, Querschnitt und Elasticitätsmodul dieses Stabes, dann hat man

$$(9) \qquad H = -\frac{\Sigma e \pi A}{\Sigma e \pi^2} \qquad \text{mit} \qquad e = \frac{s}{EF}.$$

Die Summen $\sum$ sind auf alle diejenigen Stäbe auszudehnen, welche zur statisch bestimmten Stabilität gehören, also in dem gewöhnlichen Falle einfachen Systems mit Verticalen auf alle Stäbe, bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen auf alle Stäbe mit Ausnahme einer der beiden Diagonalen jedes Feldes. Die π der zweiten Trägerhälfte sind der vorausgesetzten Symmetrie wegen mit denjenigen der ersten bestimmt und die Summe im Zähler von 9) bleibt für alle Belastungen dieselbe. Erhalten nun bei einfachem Systeme mit Verticalen die der X-Gurtung und Z-Gurtung, den Diagonalen und Verticalen entsprechenden π bezw. die Indices x, z, d, v, so hat man nach § 18, 2) oder § 20, 1)

$$(10) \qquad \begin{cases} \pi_x = \pm \dfrac{\mathfrak{z}_m x_m}{\lambda h_m}, & \pi_z = \mp \dfrac{\mathfrak{x}_{m-1} z_m}{\lambda h_{m-1}}, \\ \pi_d = \pm \dfrac{w_d d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, & \pi_v = \mp \dfrac{w_v}{\nu \lambda}, \end{cases}$$

worin die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, jenachdem die X-Gurtung oben oder unten liegt. Ausnahmsweise ist π für die beiden Endverticalen Null und für eine Verticale in der Trägermitte mit $n = 2\sigma$

$$(11) \qquad \pi_\sigma = -\frac{2\mathfrak{z}_\sigma}{\lambda} \frac{\mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_{\sigma-1}}{h_\sigma}.$$

Nach 10) 11) hat man z. B. bei horizontalem Obergurte, wenn die X-Gurtung oben liegt,

$$(12) \qquad \begin{cases} \pi_x = \dfrac{\mathfrak{z}_m}{h_m}, \quad \pi_z = -\dfrac{h_0 z_m}{\lambda h_{m-1}}, \quad \pi_d = \dfrac{h_0 d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \\ \pi_v = -\dfrac{h_0}{\nu \lambda}, \qquad \pi_\sigma = 0, \end{cases}$$

und wenn die X-Gurtung unten liegt

$$(13) \qquad \begin{cases} \pi_x = -\dfrac{h_0 x_m}{\lambda h_m}, \quad \pi_z = \dfrac{\mathfrak{x}_{m-1}}{h_{m-1}}, \quad \pi_d = -\dfrac{h_0 d_m}{\varepsilon \lambda h_{m-1}}, \\ \pi_v = \dfrac{h_0}{\nu \lambda}, \qquad \pi_\sigma = -\dfrac{2 h_0}{\lambda} \dfrac{\mathfrak{x}_\sigma - \mathfrak{x}_{\sigma-1}}{h_\sigma}. \end{cases}$$

Die A für beliebige Belastung sind aus § 33, 1) — 5), jedoch für Endstäbe und Mittelverticalen eventuell aus Aufgabe 19 und 28 der Aufgabensammlung zu entnehmen. — Erhalten ferner bei doppeltem

Systeme mit gekreuzten Diagonalen die dem Obergurte und Untergurte, den Diagonalen d_m und Verticalen entsprechenden $\varkappa$ bezw. die Indices o, u, d, h, so liefert § 87, 2) 5) wegen $k = 0$

$$(14) \qquad \begin{cases} \varkappa_o = \left(\frac{u_m}{h_m} + \frac{u_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\frac{o_m}{2\lambda}, & \varkappa_u = -\left(\frac{o_m}{h_m} + \frac{o_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\frac{u_m}{2\lambda}, \\ \varkappa_d = \frac{w_d d_m}{2\varepsilon\lambda h_{m-1}}, & \varkappa_h = \frac{\eta}{2\lambda}. \end{cases}$$

Nur die $\varkappa$ der Endverticalen sind ausnahmsweise gleich Null. Speziell bei horizontalem Obergurte folgen

$$(15) \qquad \begin{cases} \varkappa_o = \frac{1}{2}\left(\frac{u_m}{h_m} + \frac{u_{m-1}}{h_{m-1}}\right), & \varkappa_u = -\frac{h_0 u_m}{2\lambda}\left(\frac{1}{h_m} + \frac{1}{h_{m-1}}\right), \\ \varkappa_d = \frac{h_0 d_m}{2\varepsilon\lambda h_{m-1}}, & \varkappa_h = -\frac{\varrho h_0}{2\lambda}. \end{cases}$$

Die A für beliebige Belastung sind aus § 92, 2) — 6), jedoch für Endstäbe eventuell aus Aufgabe 46 und 47 der Aufgabensammlung zu entnehmen. Die ganze Beanspruchung eines Stabes kann am bequemsten aus

$$(16) \qquad S = A + \varkappa H$$

berechnet werden, worin A, $\varkappa$ dem betreffenden Stabe entsprechen und schon in 9) verwendet wurden. Die Beanspruchungen der Diagonalen d_m', deren A, $\varkappa$ nicht berechnet zu werden brauchen, sind nach

$$(17) \qquad \frac{D_m'}{d_m'} = -\frac{D_m}{d_m}$$

immer mit denjenigen der d_m bestimmt, was übrigens auch für deren A, $\varkappa$ gilt. — Bei der Berechnung von H nach 9) müssen die Querschnitte der einzeln Stäbe bereits bekannt sein. Es hat also zunächst eine vorläufige Berechnung stattzufinden, für welche wenige Belastungsfälle genügen und der Horizontalschub dem Bogen mit drei Gelenken entsprechend aus § 66, 8) 12) (d, f Scheitelcoordinaten des Verbindungsgurts der Auflager) oder auch, insbesondere bei Bogen mit ausgesprochener Axe, aus 7) 8) berechnet werden kann. An Stelle von 7) kann dann noch die etwas weniger genaue Formel

$$(18) \qquad H = \frac{35}{48 f l}\sum_0^l Pa(l-a)$$

treten. — Ueber den Einfluss von Temperaturänderungen und Ausweichen der Widerlager siehe No. 29 A 104.

Weiteres über Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke auf Grund der Längenänderungen der einzeln Stäbe siehe in No. 28 §§ 80—85 und No. 28 A 104—106, wo auch die genauere Berechnung statisch unbestimmter Systeme, ohne Zerlegung in einfache Systeme, zu finden ist. Ueber Einsenkung beliebiger Fachwerke siehe No. 29 A 97, über Secundärspannungen No. 29 A 107. Die statische Berechnung einfacher vollwandiger Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern (gewöhnliche Balkenträger) ist in Aufgabe 7—14 und Beispiel 1, 4—12 der zu diesem Werke gehörigen Aufgabensammlung No. 33 für alle Fälle gezeigt. Bezüglich continuirlicher Balkenträger wird auf die Schriften No. 3, 29, bezüglich vollwandiger Bogenträger auf die Schriften No. 14, 16, 25, 29 hingewiesen. Der Verfasser hat den Wunsch, seine Vorträge über statisch unbestimmte Träger mit einer Aufgabensammlung später ebenfalls im Zusammenhange herausgeben zu können.

Wortverzeichniss.

(Die Seitenzahlen beziehen sich auf das erstmalige Vorkommen der Bezeichnungen.)

Buchstabenbezeichnungen.

Bezeichnungen, welche nur in einem Paragraphen vorkommen, sind im Allgemeinen weggelassen.
Die Seitenzahlen beziehen sich auf das erstmalige Auftreten der Bezeichnungen.)

Seite

a Abscisse des Angriffspunkts einer Last P 12

a Abscissen von Influenzlinien 29

b Ordinaten von Influenzlinien 29

c, v Abscissen derjenigen Punkte, bei welchen der von Schnitt s getroffene Fahrbahnträger aufliegt, $c < v$ 28

c Constante bei Dreiecksträgern und Trapezträgern 61, 62

c Constante bei Trägern nach der Grenzform gleichartiger Diagonalbeanspruchungen (Schwedlerträgern) 137

c Constante bei Trägern mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen (Paulischen Trägern) 147, 151, 339, 342, 345, 346

d Länge der Füllungsglieder beim Parallelträger einfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks. 93

d Abscisse des Zwischengelenks bei Bogen mit drei Gelenken 229

d Schnitt durch das Zwischengelenk bei Bogen mit drei Gelenken 230

d_m Länge der Diagonale m bei einfachem Systeme mit Verticalen, für gleiche Längen ohne Index 56

d_m, d'_m Längen der beiden Diagonalen im Felde m bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen, für gleiche Längen ohne Index. 307

e Abscisse des Angriffspunkts einer Last K 19

f Absolutwerth eines Bogenpfeils. 63

f Absolutwerth der Differenz von f_x und f_z oder von f_o und f_u 64

f Ordinate des Zwischengelenks bei Bogen mit drei Gelenken 229

f_x, f_z Scheitelordinaten derjenigen Parabeln, welche die Formen der X-Gurtung und Z-Gurtung eines Parabelträgers einfachen Systems bestimmen 63

f_x, f_z Pfeile (positive oder negative) derjenigen Parabeln, welche die Formen der X-Gurtung und Z-Gurtung eines Halbparabelträgers einfachen Systems bestimmen 65

f_o, f_u Scheitelordinaten derjenigen Parabeln, welche die Formen des Obergurts und Untergurts eines Parabelträgers doppelten Systems bestimmen 334

f_o, f_u Pfeile (positive oder negative) derjenigen Parabeln, welche die Formen des Obergurts und Untergurts eines Halbparabelträgers doppelten Systems bestimmen 334

g Gleichmässig vertheiltes Eigengewicht per Längeneinheit eines Trägers . 10

Seite

g_1 Gleichmässig vertheiltes Eigengewicht per Längeneinheit für die Formberechnung von Schwedlerträgern und Trägern nach der Grenzform gleichartiger Diagonalenbeanspruchungen überhaupt, $g_1 \leq g$ 137

g_x, g_z Theile von $g = g_x + g_z$, welche auf Knotenpunkt m der X-Gurtung und Z-Gurtung kommen (für zwischen beiden Gurten angreifende Fahrbahnlast siehe S. 71) 71

g_o, g_u Theile von $g = g_o + g_u$, welche auf Knotenpunkt m des Obergurts und Untergurts kommen (für zwischen beiden Gurten angreifende Fahrbahnlast siehe S. 308). 310

h Grösste oder kleinste Trägerhöhe innerhalb einer Oeffnung 61, 63

h_m Länge der Verticale m bei einfachem Systeme mit Verticalen und doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen, für Parallelträger ohne Index 56

i Abscisse eines Influenzpunktes 30

k Anzahl der Knotenpunkte eines Fachwerks 47

k Ordinate eines Auflagers oder sonstigen Trägerpunktes der Abscisse l . . 20

l Abscisse eines Auflagers oder sonstigen Trägerpunktes, Spannweite . 10, 20

l Schnitt durch das Auflager oder den sonstigen Trägerpunkt der Coordinaten l, k 20

l_a, l_b Spannweite der ersten und zweiten einer Stütze vorhergehenden Oeffnung bei continuirlichen Gelenkträgern 191

l_1, l_2 Spannweiten der ersten und zweiten einer Stütze nachfolgenden Oeffnung bei continuirlichen Gelenkträgern 190

l_v, l_n Spannweiten der ersten Oeffnungen, welche einer Oeffnung ohne Zwischengelenk vorhergehen und nachfolgen, bei continuirlichen Gelenkträgern 189

m Ordnungsnummer eines Feldes, Stabes oder Knotenpunktes, welchen die Indices der Stablängen und Stabkräfte entsprechen 56

n Felderzahl innerhalb der Spannweite l 55

o_m Länge des Obergurtstabes m, bei gleichen Längen ohne Index. . . 91, 307

p Gleichmässig vertheilte bewegte Last (Verkehrslast) per Längeneinheit der ergriffenen Strecke 36

p, p' Stetig vertheilte Lasten per Längeneinheit einer Strecke 15

$q = g + p$ Gleichmässig vertheilte Totallast per Längeneinheit der ergriffenen Strecke. 37

r Anzahl der von einander unabhängigen Grössen, welche die Stützenreactionen eines Trägers bestimmen 6

r Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit drei Gelenken 231, 234

r, t Abscissen der beiden Gelenke in Oeffnungen mit Zwischengelenken continuirlicher Gelenkträger, $r < t$ 186

r, t Schnitte durch die soeben erwähnten Gelenke. 186

s Anzahl der wirksamen Stäbe eines Fachwerks. 47

s Bezeichnung für einen beliebigen Schnitt durch den Träger. 18

s_m Länge des Polygonalgurtstabes m bei Paulischen Segmentträgern doppelten Systems 344

t Anzahl der Trägerstücke eines Trägers 6

t Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit drei Gelenken 231, 234

Seite

N_s Componente von R_s in einer Richtung, welche den Winkel φ mit der Abscissenaxe einschliesst 20

O_m Beanspruchung des Obergurtstabes m bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen 307

P Concentrirte Last bei Abscisse a 12

P Last, welche bei a zunächst auf Zwischenträger kommt, Verkehrslast . . 26

Q_m Abkürzende Bezeichnung bei Paulischen Trägern doppelten Systems . . 342

R Gesammtreaction einer Stütze 191, 275

R_m Abkürzende Bezeichnung bei Paulischen Trägern einfachen und doppelten Systems sowie Trägern mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen 151, 342

R_s Resultirende Kraft in einem Schnitte s (Absolutwerth) 20

S, S' Statische Momente der zwischen den Schnitten 0 und s bezw. s und l auf den Träger übertragenen Lasten in Hinsicht der Punkte 0 und l . 21

S_m Beanspruchung des Polygonalgurtstabes m bei Paulischen Segmentträgern doppelten Systems 345

T_m Beanspruchung des Horizontalgurtstabes m bei Paulischen Segmentträgern doppelten Systems 345

T_s Componente von R_s in einer Richtung, welche den Winkel φ mit der Ordinatenaxe, oder $90 + \varphi$ mit der Abscissenaxe, einschliesst 20

U_m Beanspruchung des Untergurtstabes m bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen 307

V, V' Verticalreactionen bei 0 und l oder Werthe von V_s für $s = 0$ und von $- V_s$ für $s = l$ 19, 20

V_s Resultirende Verticalkraft im Schnitte s 19

V_m Beanspruchung der Verticale m bei einfachem Systeme mit Verticalen 56

X_m Beanspruchung des Stabes m der X-Gurtung 56

Y_m, Y_m' Beanspruchungen der Füllungsglieder m bei Parallelträgern einfachen Systems des gleichschenkligen Dreiecks 93

Z_m Beanspruchung des Stabes m der Z-Gurtung 56

Zur Unterscheidung verschiedener Werthe gleich bezeichneter Grössen sind mitunter Klammern angewandt, insbesondere bei Berechnung einer Grenzbeanspruchung aus der andern für gleichmässig vertheilte bewegte Last.

$\mathfrak{o}_m$ Ordinate des Knotenpunkts m im Obergurte, bei gleichen Werthen ohne Index 81

$\mathfrak{u}_m$ „ „ „ m im Untergurte, „ „ „ „ „ 81

$\mathfrak{x}_m$ „ „ „ m im X-Gurte, „ „ „ „ „ 56

$\mathfrak{z}_m$ „ „ „ m im Z-Gurte, „ „ „ „ „ 56

$\mathfrak{B}$ Werth von B bei Belastung durch das Eigengewicht allein 36

$\mathfrak{D}_m$ „ „ D_m „ „ „ „ „ „ 71

$\mathfrak{D}_m'$ „ „ D_m' „ „ „ „ „ „ 314

$\mathfrak{H}$ „ „ H „ „ „ „ „ „ 71

$\mathfrak{H}_m$ „ „ H_m „ „ „ „ „ „ 313

		Seite
$\mathfrak{K}_0$	Werth von K_0 bei Belastung durch das Eigengewicht allein	160
$\mathfrak{M}$	„ „ M „ „ „ „ „ „	71
$\mathfrak{M}'$	„ „ M' „ „ „ „ „ „	71
$\mathfrak{M}_s$	„ „ M_s „ „ „ „ „ „	39
$\mathfrak{O}_m$	„ „ O_m „ „ „ „ „ „	313
$\mathfrak{R}$	„ „ R „ „ „ „ „ „	193
$\mathfrak{S}_m$	„ „ S_m „ „ „ „ „ „	345
$\mathfrak{T}_m$	„ „ T_m „ „ „ „ „ „	345
$\mathfrak{U}_m$	„ „ U_m „ „ „ „ „ „	313
$\mathfrak{V}$	„ „ V „ „ „ „ „ „	33
$\mathfrak{V}'$	„ „ V' „ „ „ „ „ „	294
$\mathfrak{V}_m$	„ „ V_m „ „ „ „ „ „	71
$\mathfrak{X}_m$	„ „ X_m „ „ „ „ „ „	71
$\mathfrak{Y}_m$	„ „ Y_m „ „ „ „ „ „	95
$\mathfrak{Z}_m$	„ „ Z_m „ „ „ „ „ „	71

α (Alpha) Abkürzende Bezeichnung beim Bogen mit drei Gelenken 257

α Abkürzende Bezeichnung bei Trägern nach der Grenzform gleichartiger Diagonalbeanspruchungen (Schwedlerträger) 137, 141

α Winkel der Verschiebungsbahn gegen die Horizontale bei Trägern mit schief verschiebbarem Auflager. 289

β (Beta) Abkürzende Bezeichnung beim Träger mit schief verschiebbarem Auflager 290

γ (Gamma) Verhältniss $h_0 : f$ beim Bogenfachwerk mit drei Gelenken . . . 257

γ Abkürzende Bezeichnung beim Träger mit schief verschiebbarem Auflager 292

δ (Delta) Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit drei Gelenken 246

δ Werth von ε für das Feld $m + 1$ bei Behandlung der Gegendiagonalen. 171

ε (Epsilon) Funktion der Verticalenlängen bei einfachem Systeme mit Verticalen und doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen. . . . 56, 310

ζ (Zeta) Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit drei Gelenken. 246

ζ_m Länge des Perpendikels vom Knotenpunkte $m - 1$ der X-Gurtung auf Stab m der Z-Gurtung bei Trägern einfachen Systems mit constanten Maximalgurtungsbeanspruchungen (Paulischen Träger) 147

η (Eta) Funktion der Knotenpunktscoordinaten bei doppeltem Systeme mit gekreuzten Diagonalen 309, 311, 312

λ (Lambda) Länge eines Feldes 56

λ_m Länge des Feldes m bei Parallelträger einfachen und doppelten Systems mit Verticalen und ungleich langen Feldern 121, 329

μ (My) Bei Trapezträgern $\mu\lambda$ Abstand des Durchschnittspunkts der Gurtungsaxen vom Auflager 0 62

ν (Ny) Funktion der Verticalenlängen oder Knotenpunktscoordinaten bei einfachem Systeme mit Verticalen 57, 59

ξ (Xi) Abkürzende Bezeichnung bei Bogen mit drei Gelenken 246

ξ_m Länge des Perpendikels vom Knotenpunkte m der Z-Gurtung auf Stab

Verzeichniss von Schriften des Verfassers.

(Ausgeschlossen sind Recensionen, gelegentliche Berichte, Repliken u. s. w.

1. **Der Escher-Linth-Kanal.** Historisch-technische Studie. Zürich, Orell Füssli, 1868. — 131 S. gr. 8 mit 2 lithogr. Tafeln.
2. **Zur Theorie der Determinanten.** Crelle-Borchardts Journ. für reine u. angew. Mathematik, 1872 S. 273—276.
3. **Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger.** Für den akademischen Unterricht und zum Gebrauch der Ingenieure. Leipzig, Teubner, 1872. — 175 S. gr. 8 mit 76 Textfiguren u. 4 lithogr. Tafeln.
4. **Die Gleichung der elastischen Linie beliebig belasteter gerader Stäbe.** Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1873 S. 392—410.
5. **Ueber die graphische Statik.** Zur Orientirung. Mit Literaturverzeichniss. Leipzig, Teubner, 1874. (Abgesehen von einigen Ergänzungen zuerst erschienen in Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik 1874 S. 361—390, Zusätze daselbst 1875 S. 165—171. Englische Uebersetzung von *Jay du Bois* in dessen Elements of graphical statics, New-York, Wiley, 1875. Russische Uebersetzung von *Matimenko*, Petersburg 1880, auch abgedruckt in der Zeitschr. d. russ. Ministeriums d. Wegecommunicationen, 1880.)
6. **Die Gleichung der elastischen Linie beliebig belasteter gerader Stäbe bei gleichzeitiger Wirkung von Horizontal- (Axial-) Kräften.** Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik 1874, S. 536—549.
7. **Die Maximalmomente einfacher Träger bei festen und mobilen Lastsystemen.** Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1875, S. 467—500.
8. **Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlconstructionen mit Rücksicht auf die neueren Versuche.** Ein elementarer Anhang zu allen Lehrbüchern über Eisen- und Stahlconstructionen. Leipzig, Teubner, 1876. — 116 S. gr. 8 mit 4 lithogr. Tafeln. (Englische Ausgabe von *Jay du Bois,* New-York, Wiley, 1877. Erweiterte italienische Ausgabe von *Crugnola,* Torino, Negro, 1879. Neu bearbeitete französische Ausgabe, übersetzt von Svilokositch, Paris, Bernard 1887).
9. **Von den überhitzten Dämpfen.** Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure, 1876, S. 1—10, 71—86.
10. **Zur Theorie der Dämpfe.** Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure, 1876, S. 193—216 (die beiden letzten Aufsätze zusammen auch separat erschienen, Berlin, Gärtner, 1876).

11. **Noch einmal die überhitzten Dämpfe.** Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure, 1877, S. 241—246.

12. **Zur Theorie des Erddrucks.** Zeitschr. f. Baukunde, 1878, S. 193—208. (Englische Bearbeitung von *Jay du Bois* im Journ. of the Franklin Institute, 1879 und separat, Philadelphia, Merrihew 1879. Andre englische Bearbeitung mit Ergänzungen und Beispielen von *Walwerd A. Howe*, New-York, Wiley, 1886. Tabellen zur Erleichterung der Anwendung in *Crugnolas* Sui muri di sostegno, Torino, Negro, 1883.)

13. **Ueber die neuere Dimensionenberechnung.** Zeitschr. d. östr. Ing.- u. Arch.-Vereins, 1878, S. 189—191.

14. **Theorie der elastischen Bogenträger.** München, Ackermann, 1879. — 86 S. mit 43 Textfiguren. (Zuerst erschienen in der Zeitschr. f. Baukunde, 1878, S. 31—48, 367—390, 549—564.)

15. **Berücksichtigung der Zerknickungsgefahr bei der neueren Dimensionenberechnung.** Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover, 1879, S. 57—62.

16. **Ueber die Berechnung der Dourobrücke.** Zeitschr. f. Baukunde, 1879, S. 421—434.

17. **Temperatureinflüsse bei continuirlichen Trägern.** Zeitschr. f. Baukunde, 1879, S. 437—440.

18. **Zur Beurtheilung von Luft- und Gasmaschinen.** Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure, 1880, S. 185—195. (Eine Zahlencorrectur hierzu Wochenbl. d. Vereins deutscher Ing. 1881, S. 226.)

19. **Ueber Spannungsmessungen an Metallconstructionen.** Centralz. f. Optik u. Mechanik, 1880, S. 178—179.

20. **Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Fachwerke.** Zeitschr. f. Baukunde, 1880, S. 247—252. (Genauere Formulirung in No. 32 § 14 und und No. 33 A 16)

21. **Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen.** Wien, Waldheim, 1881. — 52 S. mit 34 Textfiguren. (Zuerst erschienen in d. Allg. Bauzeit. 1880.)

22. **On the calculation of dimensions as depending on the ultimate working strength of materials.** London, Institution of Civil Engineers, 1880. — 24 S. (Separatabdruck aus den Proceedings of the Inst. of Civil Engineers, Session 1880—81, Part i.)

23. **Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Trägerarten.** Zeitschrift für Baukunde, 1881, S. 55—64. (Genauere Formulirung in No. 32 § 2.)

24. **Various methods of determining dimensions,** London, Institution of Civil Engineers, 1883. — 38 S. (Separatabdruck aus den Proceedings of the Inst. of Civil Engineers, Session 1882—83, Part i.)

25. **Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme.** Wochenbl. f. Arch. u. Ingenieure, 1884, S. 290—291.

26. **Einfache Ableitung der Schallgeschwindigkeit.** Poggendorff-Wiedemanns Ann. d. Phys. u. Chemie, 1884, XXIII, S. 147—149.

27. **Statik der Bauconstructionen.** Regelmässige Berichte über die neueren Erscheinungen auf diesem Gebiete. Zeitschr. f. Baukunde, 1878—1884.

28. **Theorie elastischer Körper.** Eine Einleitung zur mathematischen Physik und technischen Mechanik. Leipzig, Teubner, 1884. — 280 S. gr. 8 mit 42 Textfiguren.

29. **Aufgaben zur Theorie elastischer Körper.** Leipzig, Teubner, 1885. — 350 S. gr. 8 mit 110 Textfiguren.

30. **Das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer.** Zu Orientirung. Leipzig, Teubner, 1885. — 48 S. gr. 8.

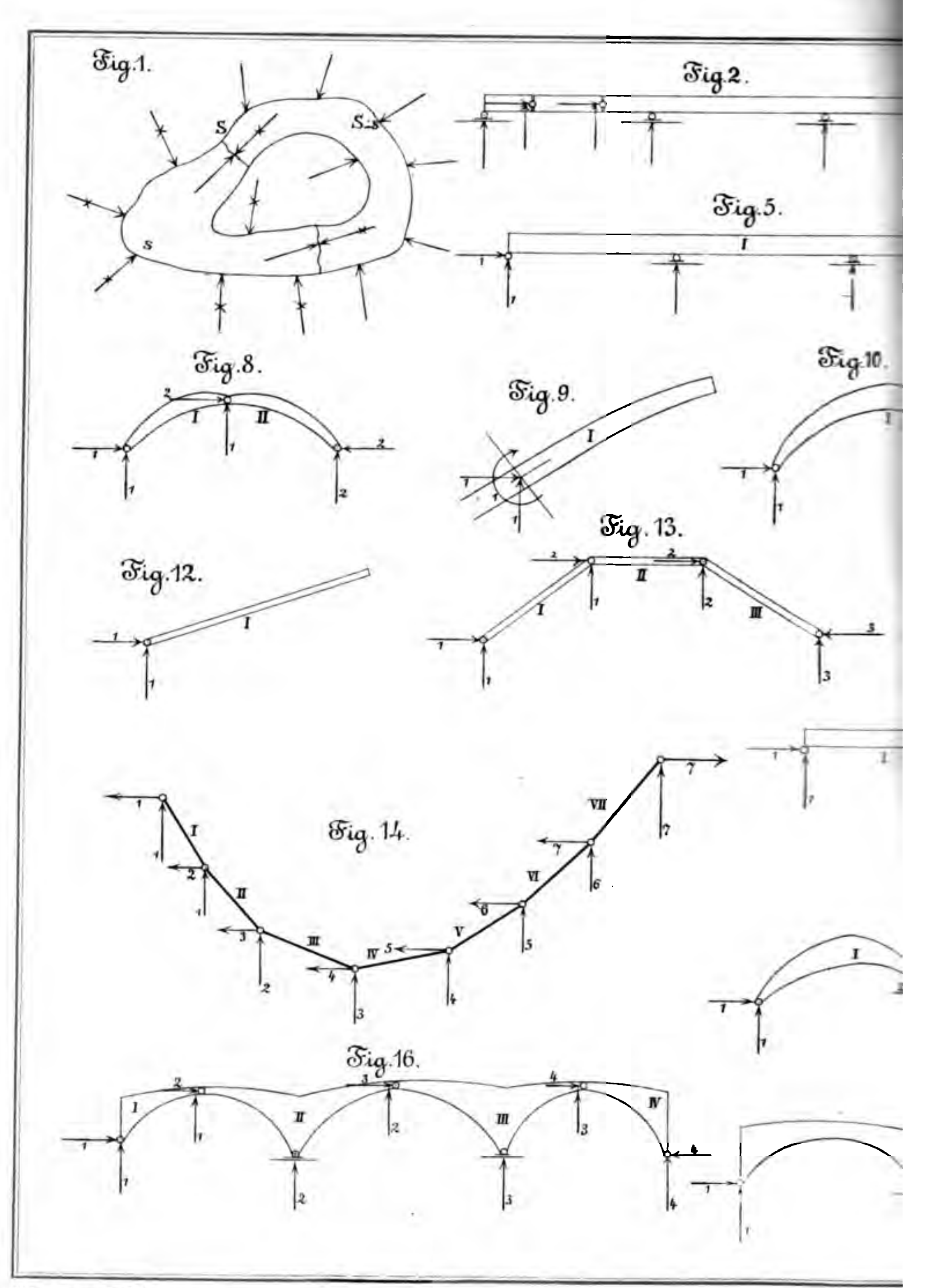
31. **Ueber das Princip der virtuellen Verrückungen.** Civilingenieur 1887, Heft I und V.

32. **Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer.** Nach Vorträgen an der technischen Hochschule zu Stuttgart. Leipzig, Teubner, 1887. — 366 S. gr. 8 mit 340 Figuren auf lithogr. Tafeln.

33. **Beispiele und Aufgaben zur Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer.** Leipzig, Teubner 1888. — ca. 480 S. gr. 8 mit 222 Figuren auf lithogr. Tafeln. (Im Drucke).

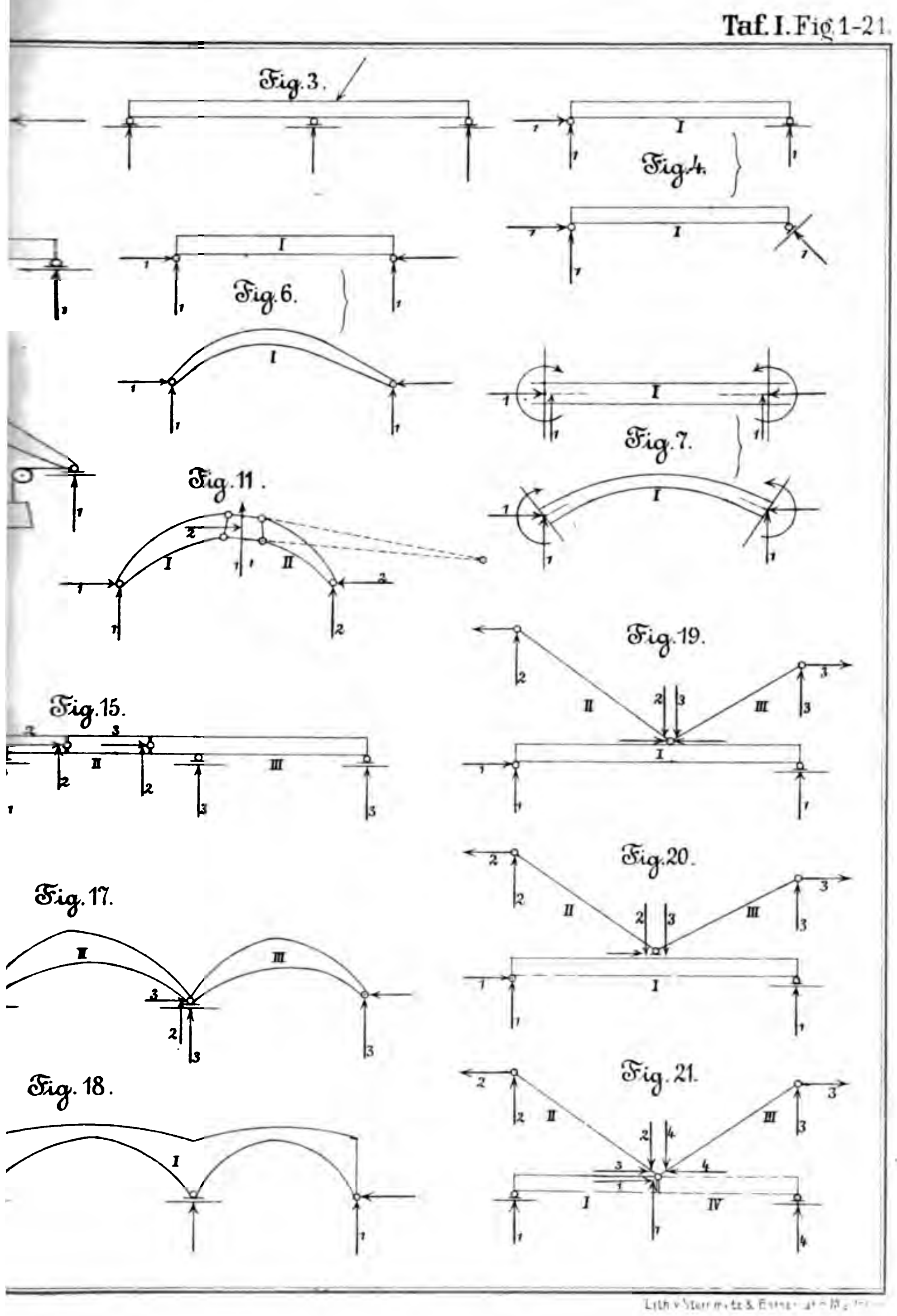
Fehlerverzeichniss.

Seite 7 Zeile 10 von unten ist labil für stabil zu setzen.
„ 40 „ 3 von oben soll zweimal $\mathfrak{B}_s$ an Stelle von $\mathfrak{B}_u$ stehen.
„ 183 „ 12 von oben ist $\mathfrak{K}_u$ durch $\mathfrak{K}_o$ zu ersetzen.
„ 195 „ 12 von oben hat 11) an Stelle von 10) zu treten.
Tafel XV Fig. 254 sollen die horizontalen Pfeile nach aussen gerichtet sein.

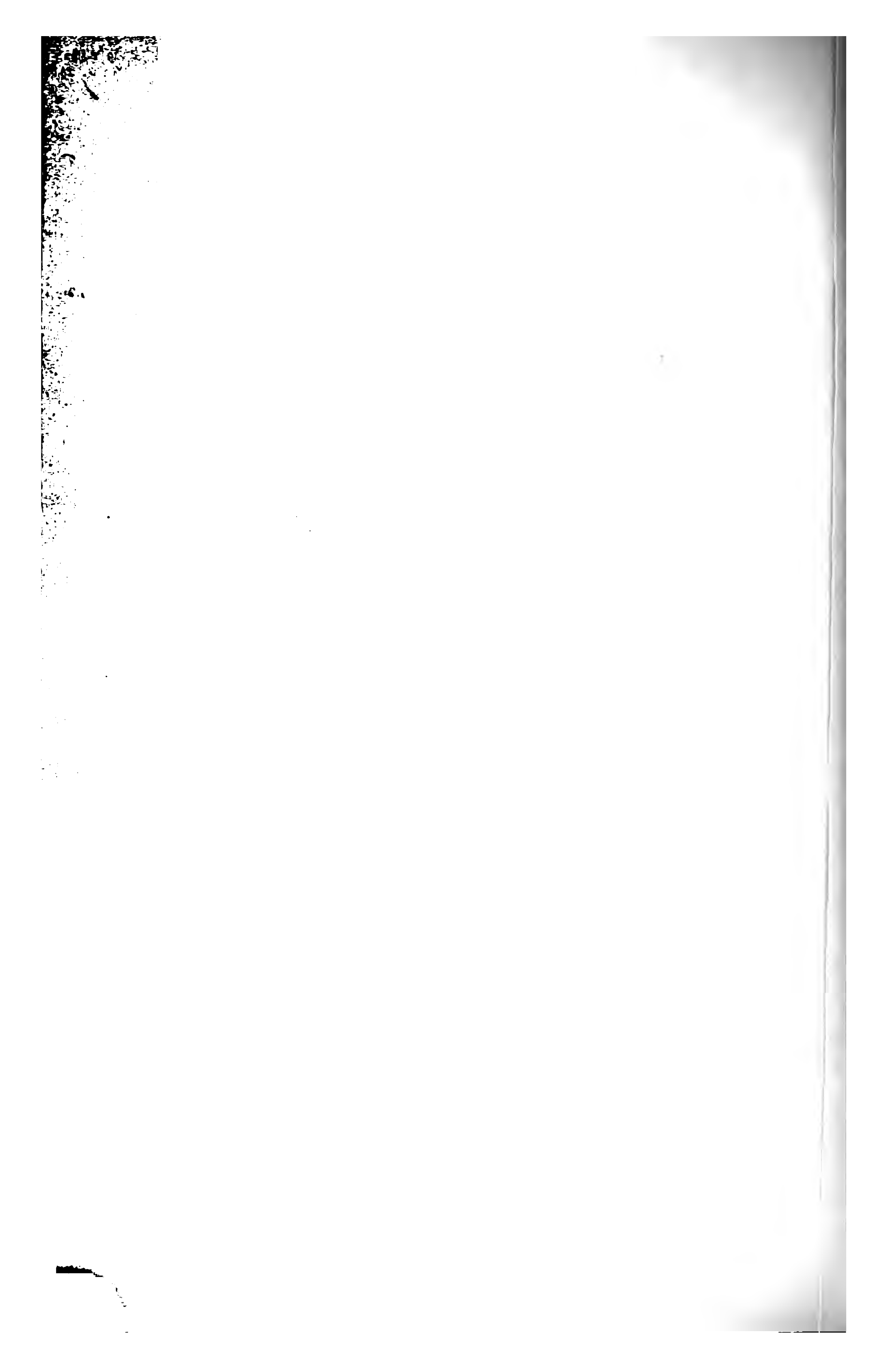


Weyrauch, Theorie.

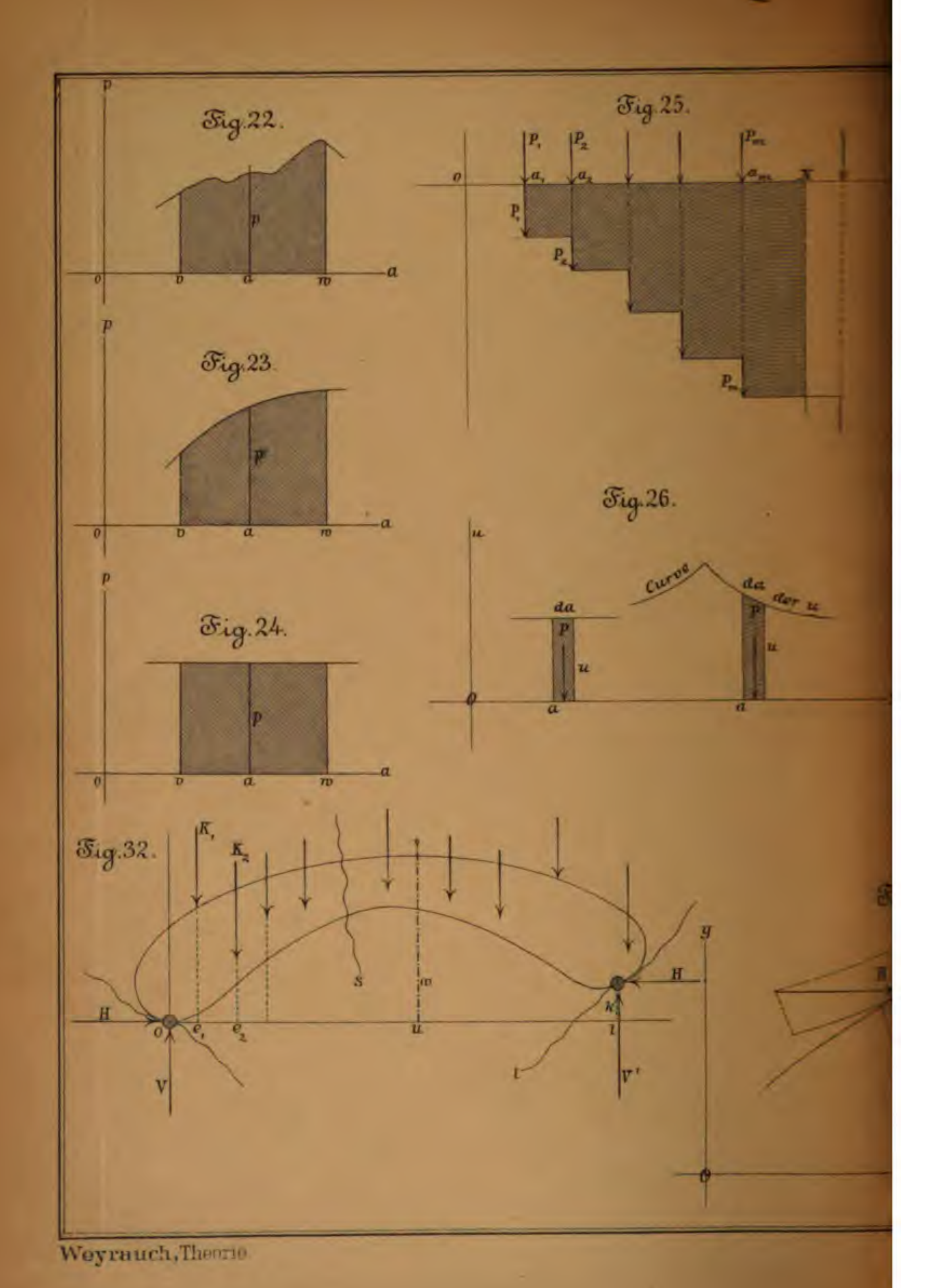
Taf. I. Fig. 1-21.



Lith. v. Stürmhöfel & Ertner in ...

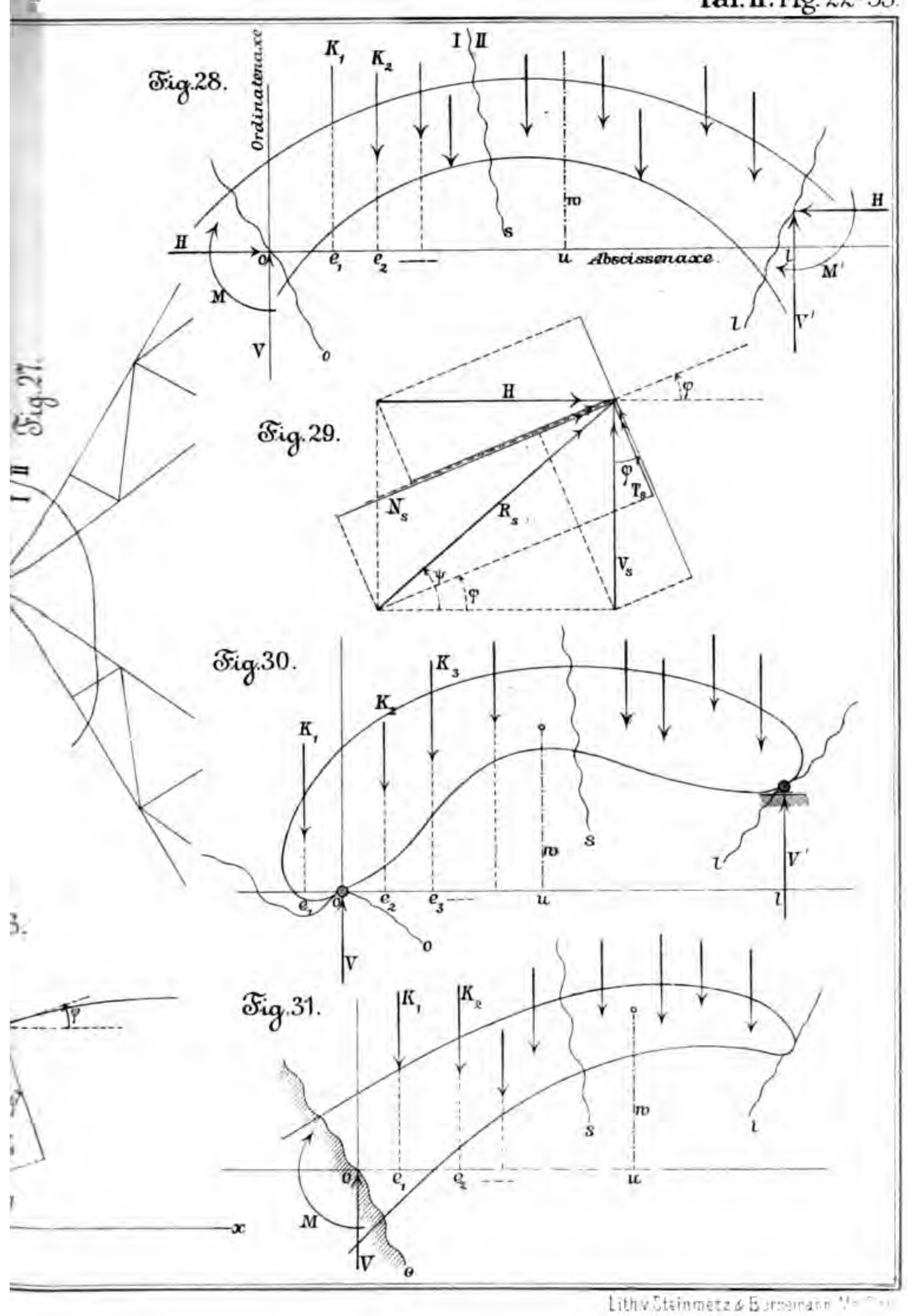






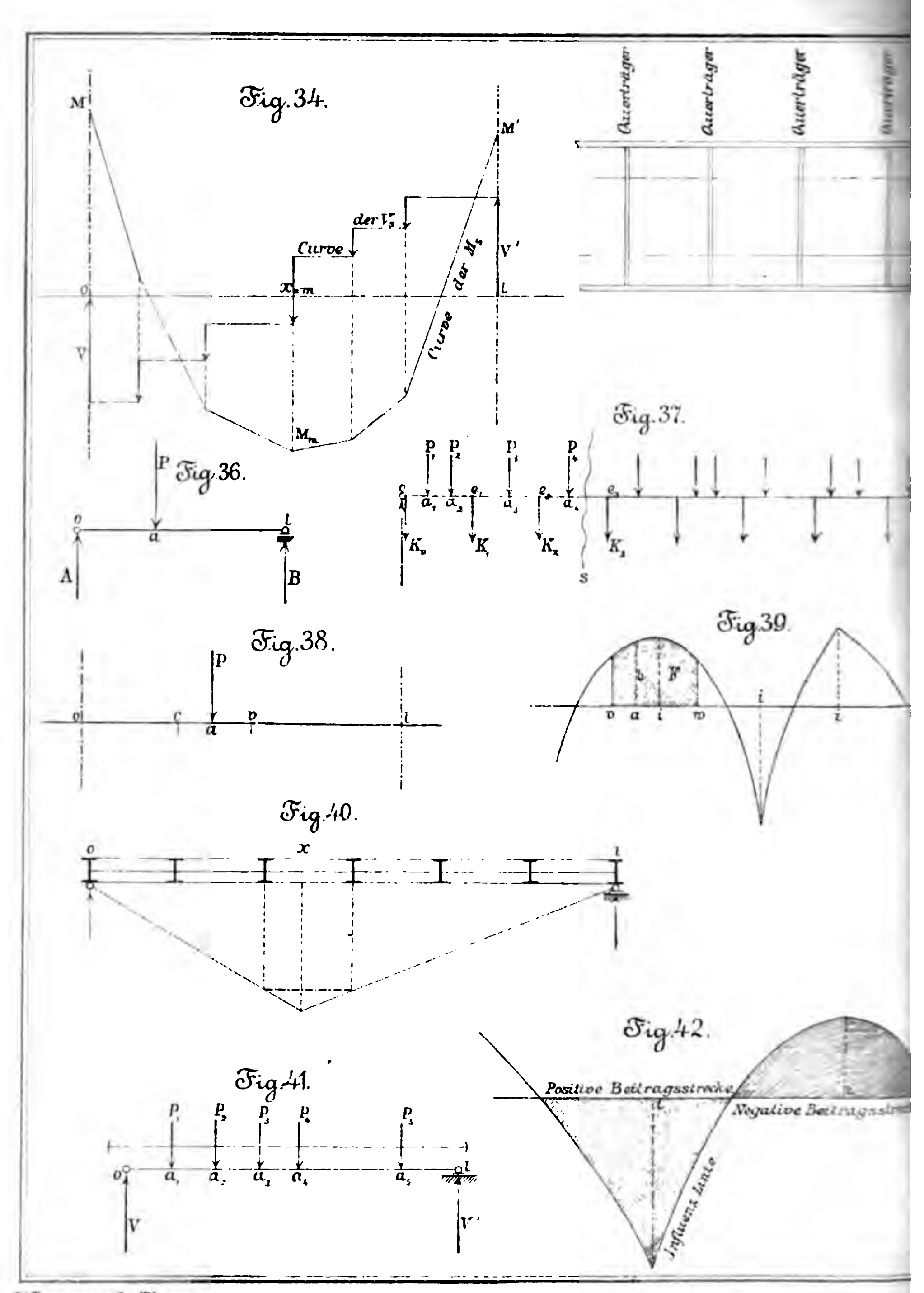
Weyrauch, Theorie.

Taf. II. Fig. 22-33.

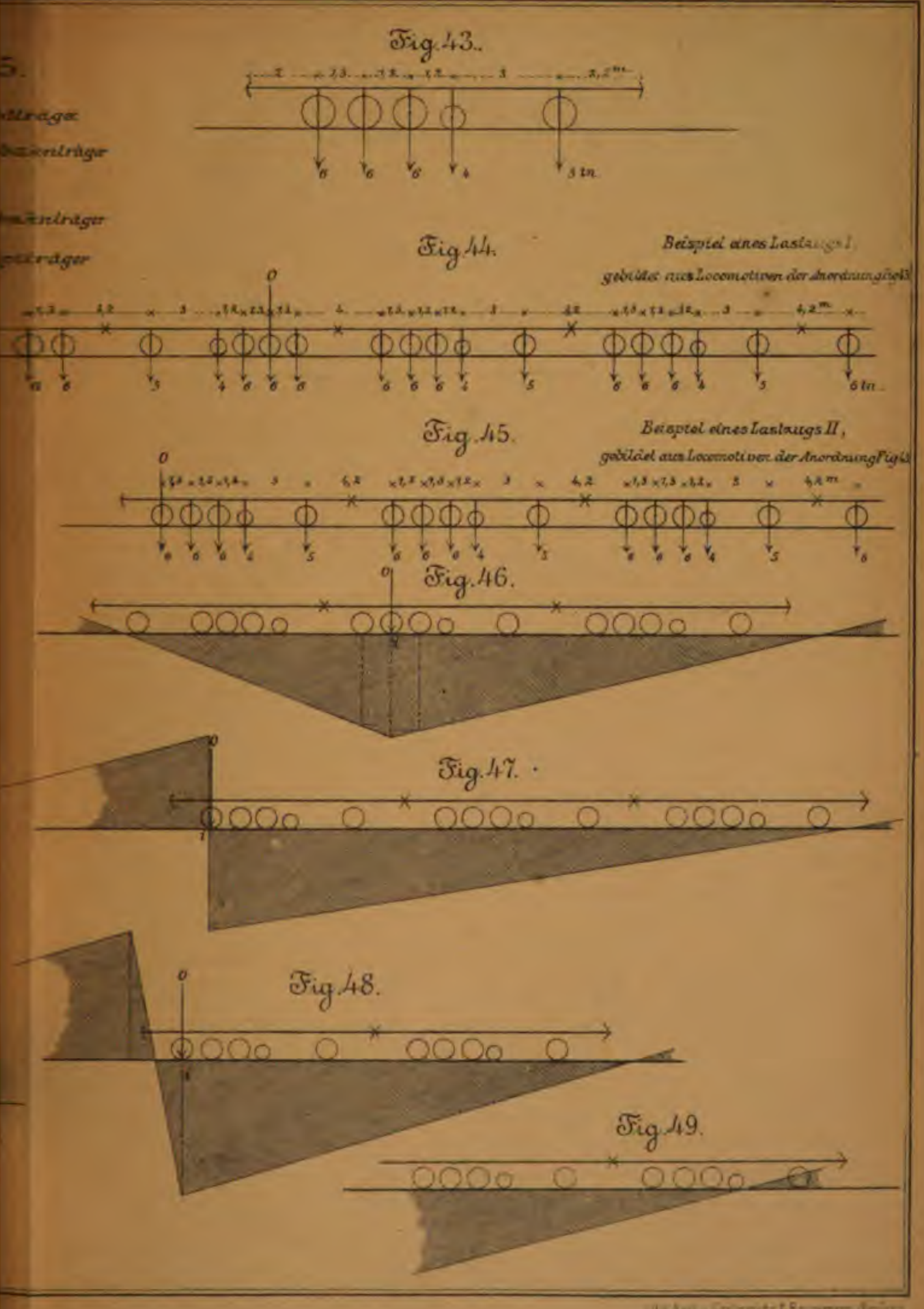


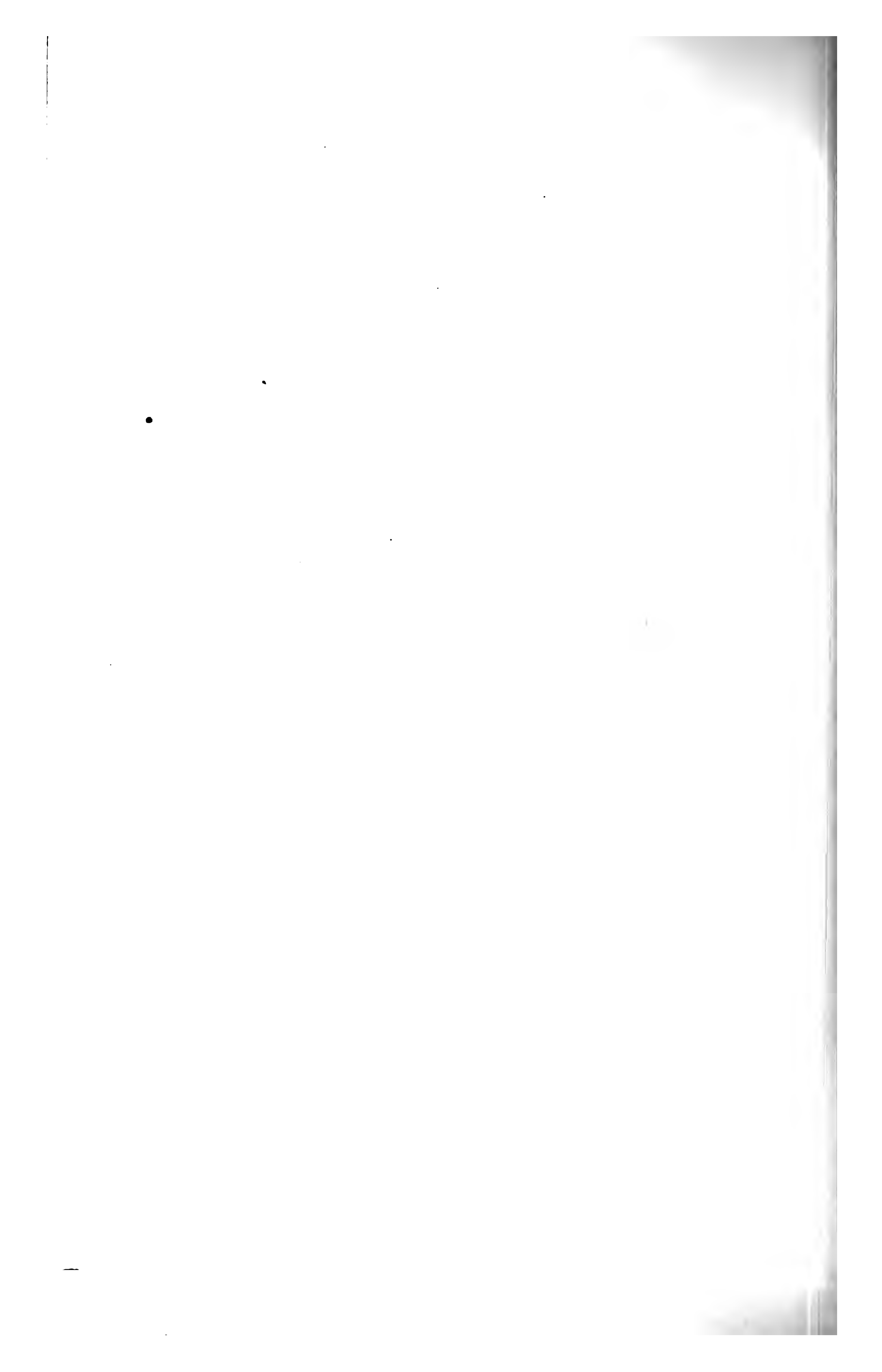
Lith. v. Steinmetz & Bornemann

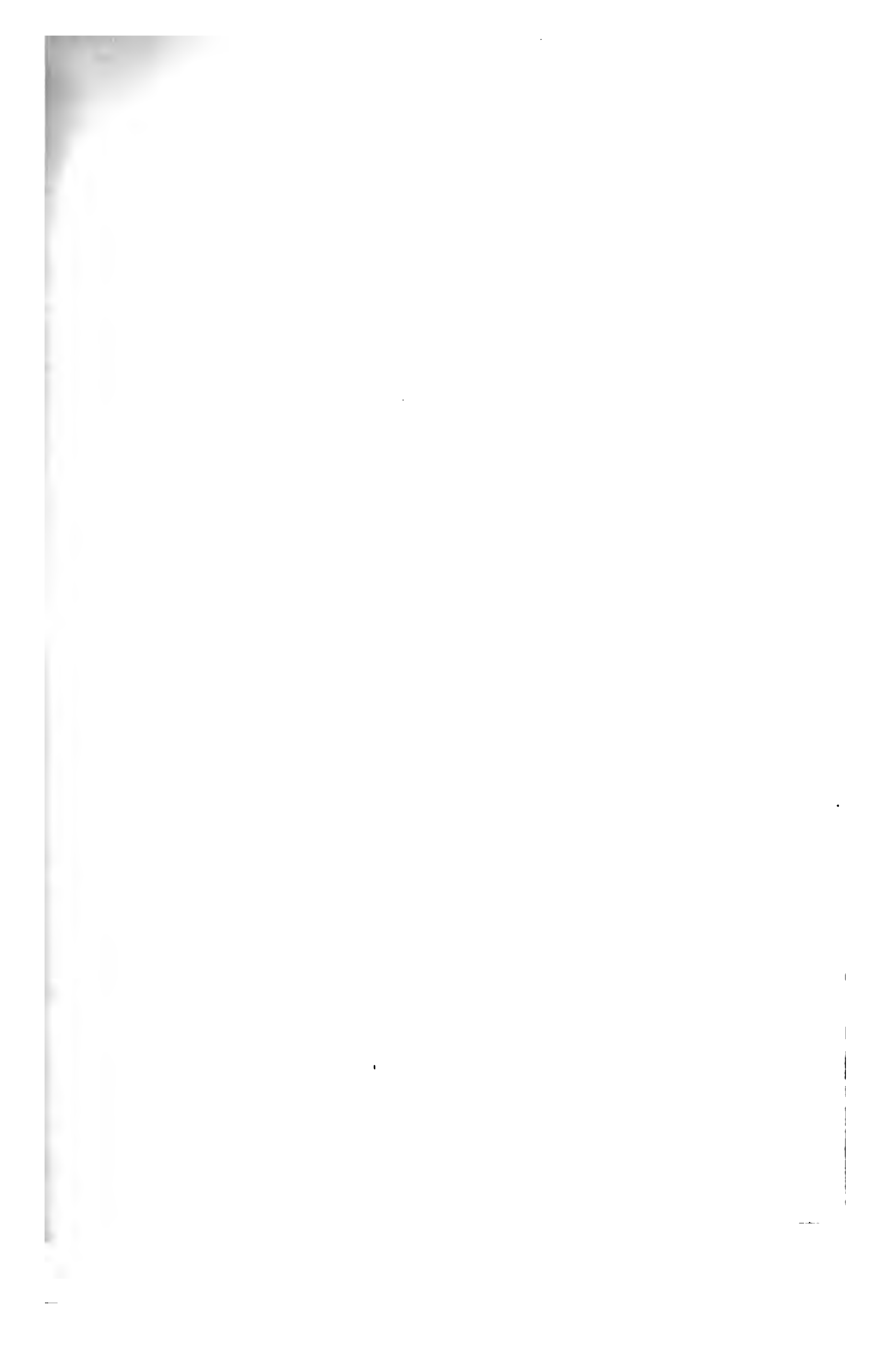


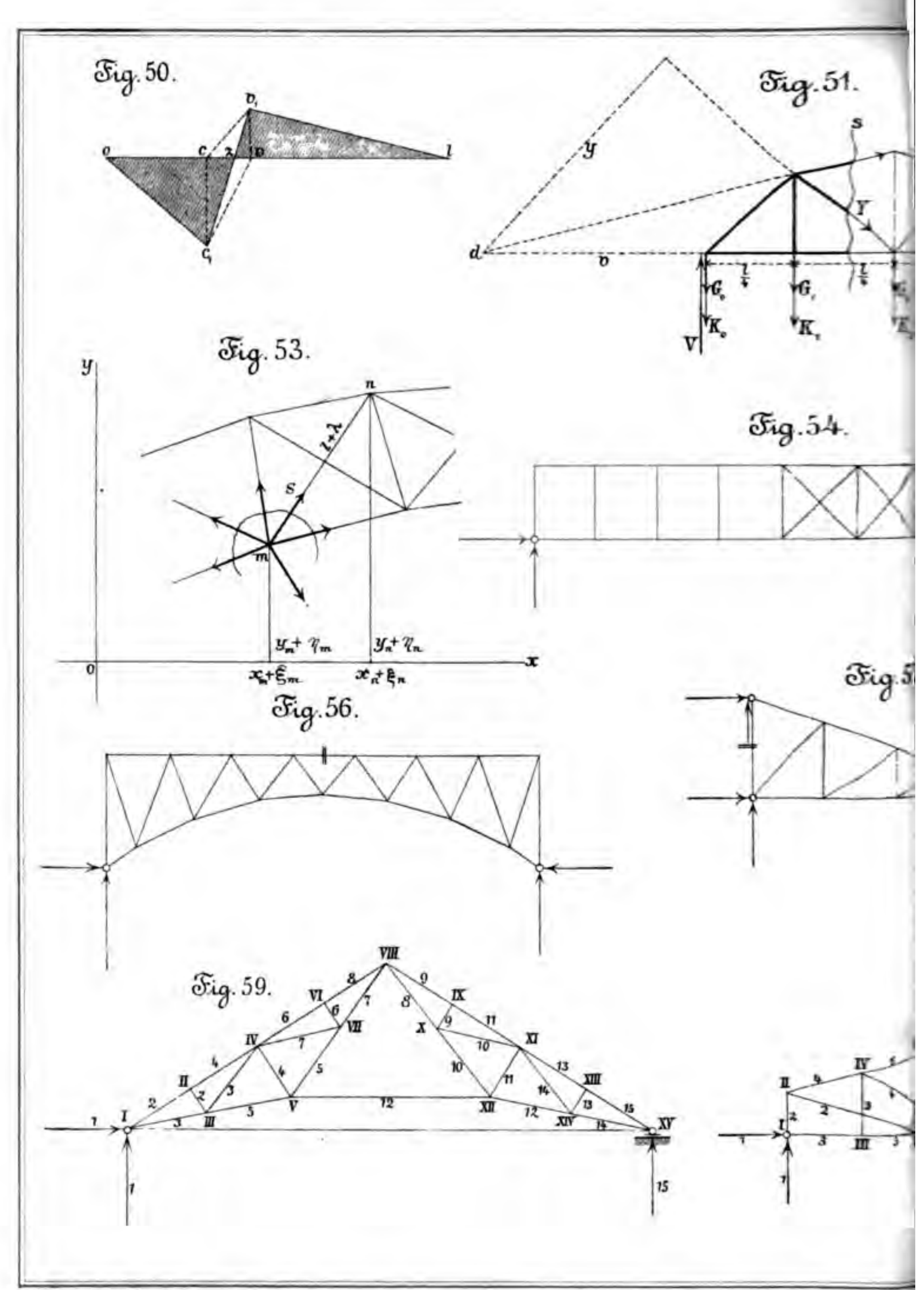


Weyrauch, Theorie.

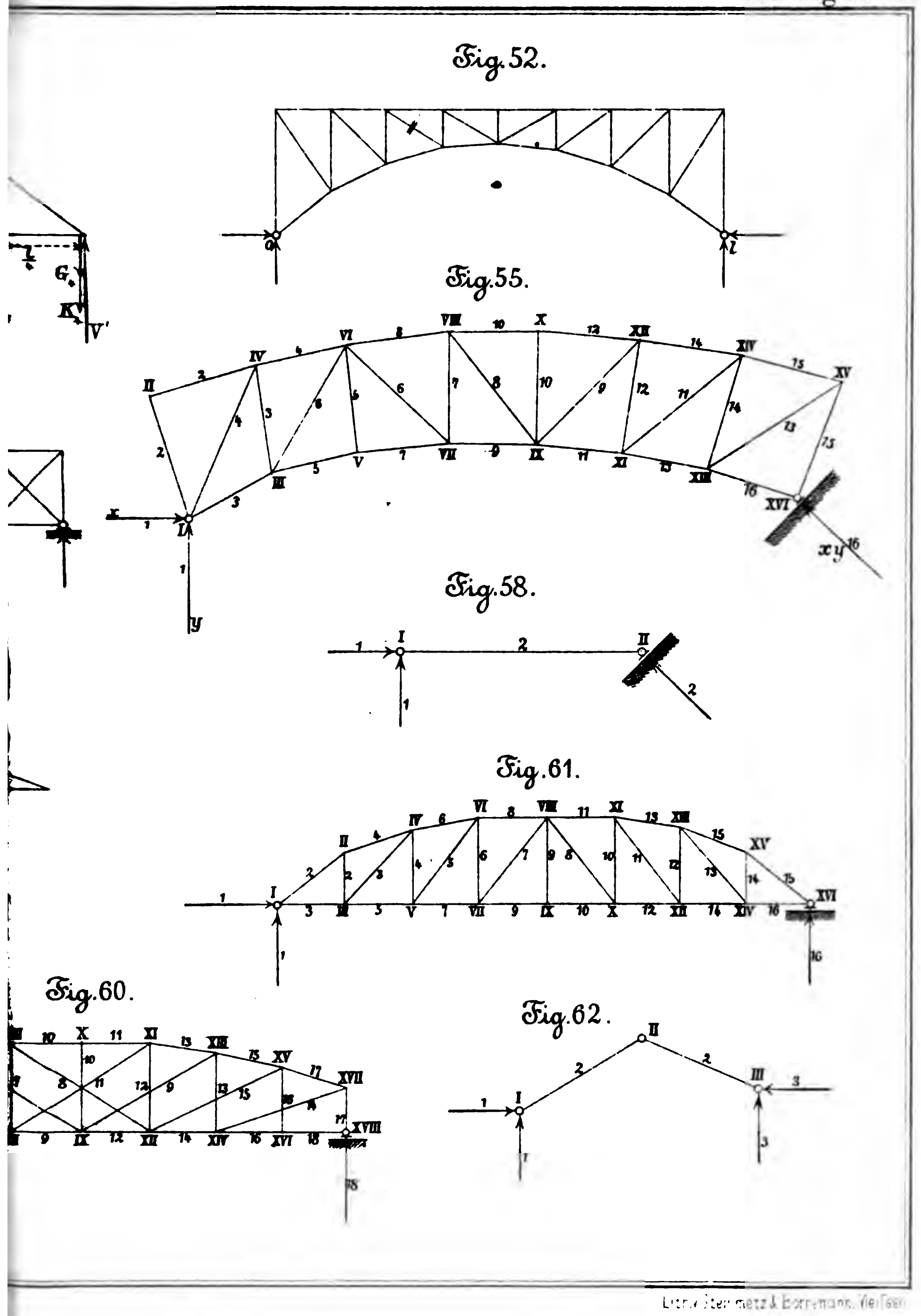

Fig. 43.
Fig. 44.
Beispiel eines Lastzugs I,
gebildet aus Locomotiven der Anordnung Fig. 43
Fig. 45.
Beispiel eines Lastzugs II,
gebildet aus Locomotiven der Anordnung Fig. 43
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.



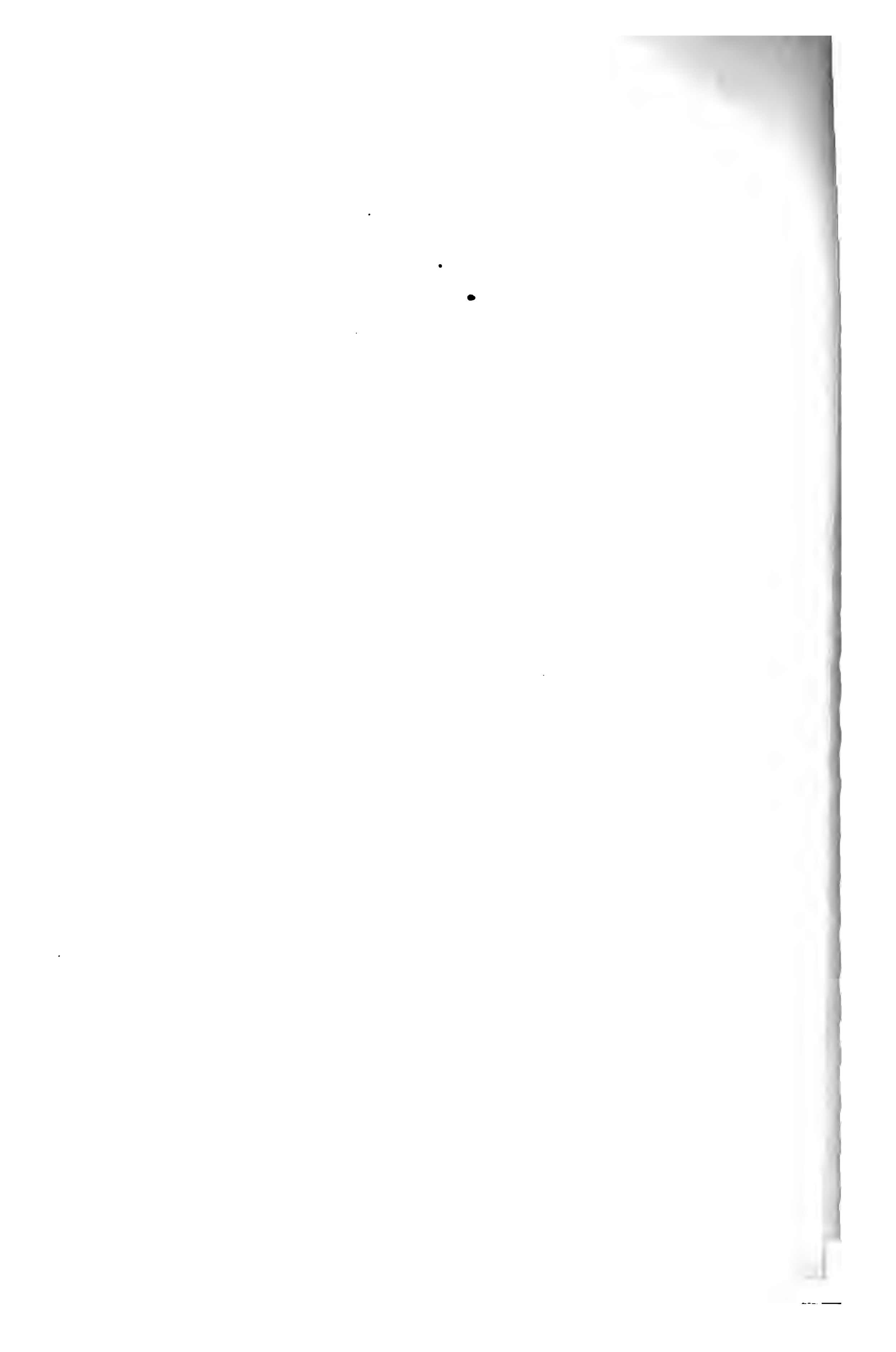


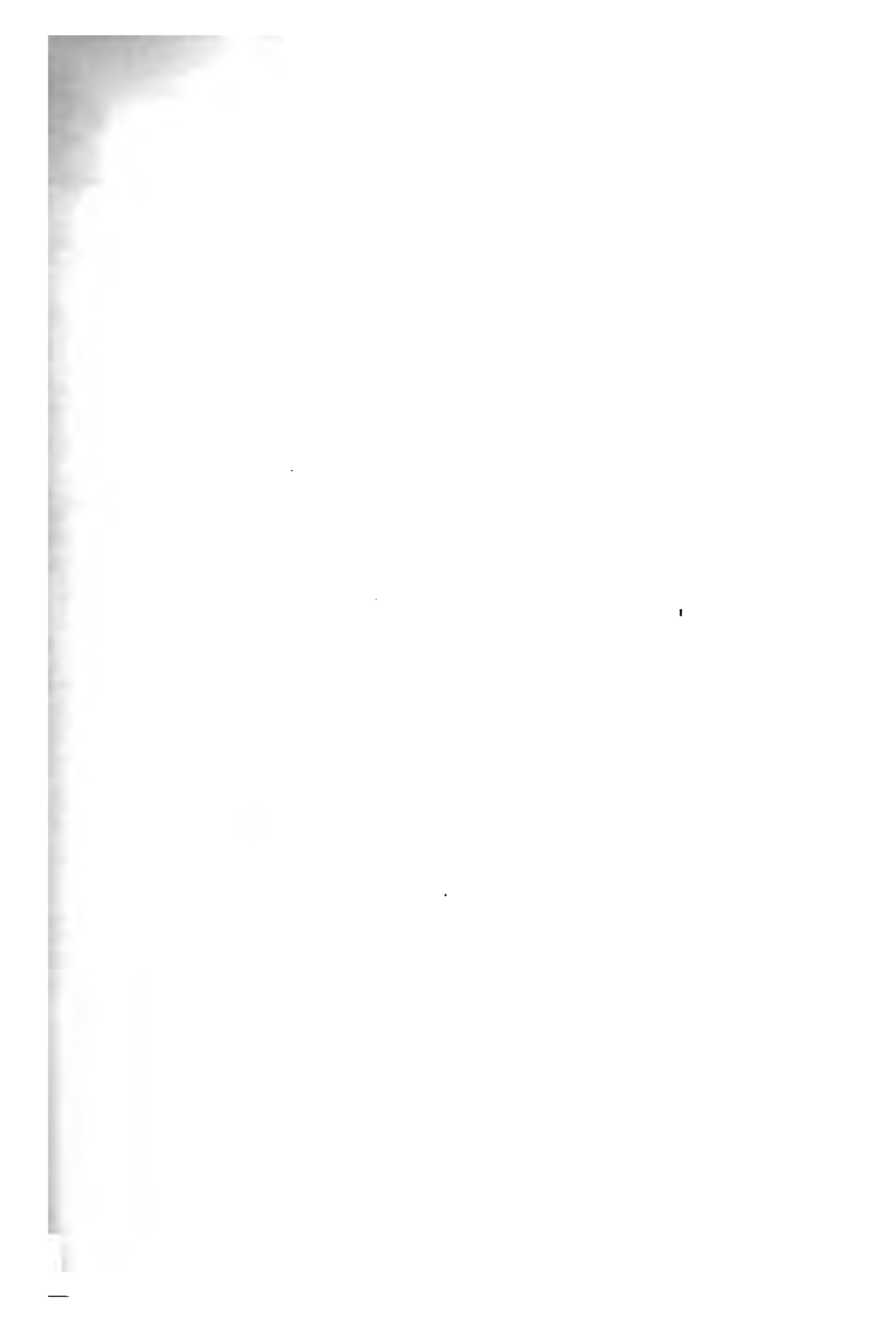


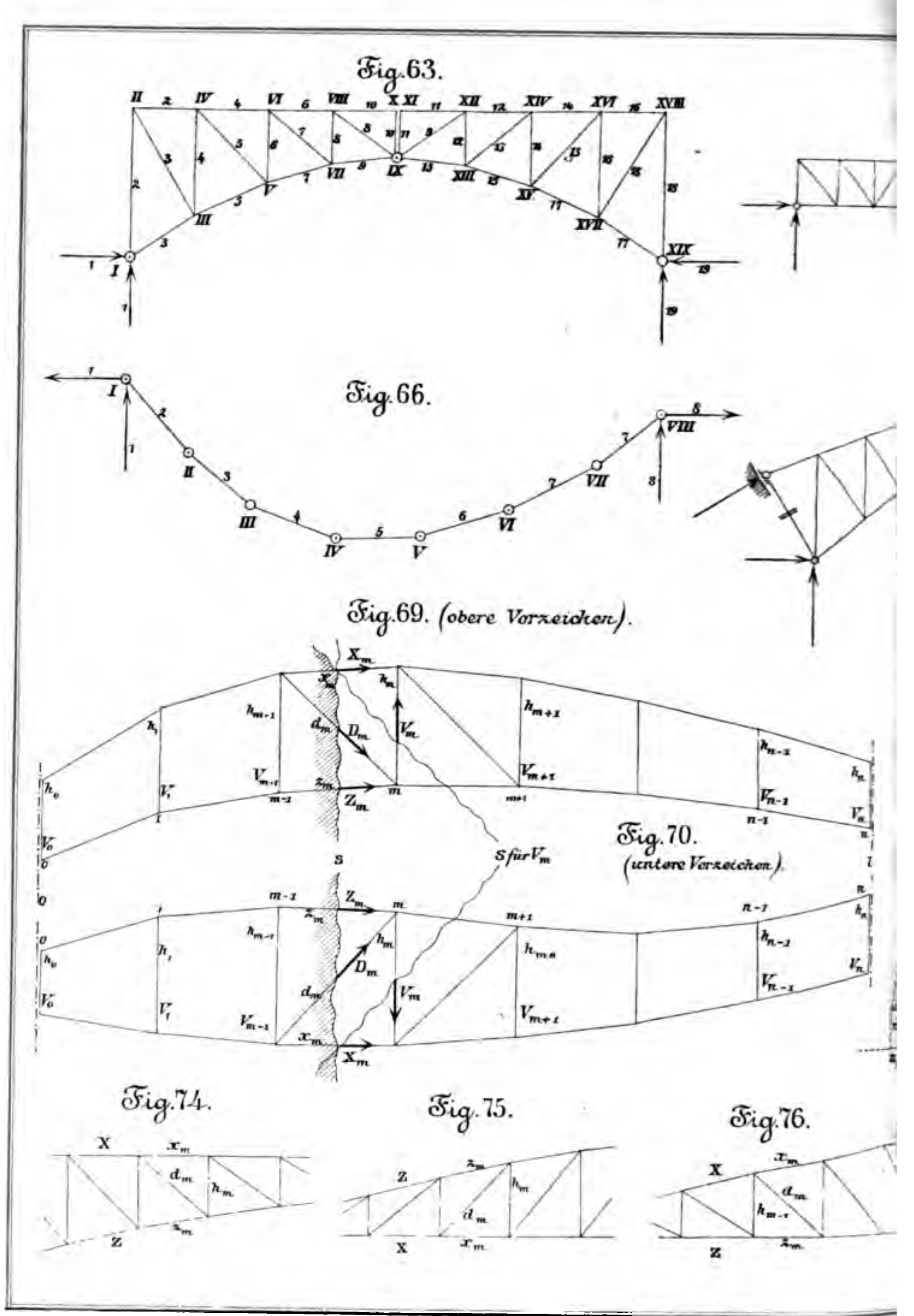
Weyrauch, Theorie.

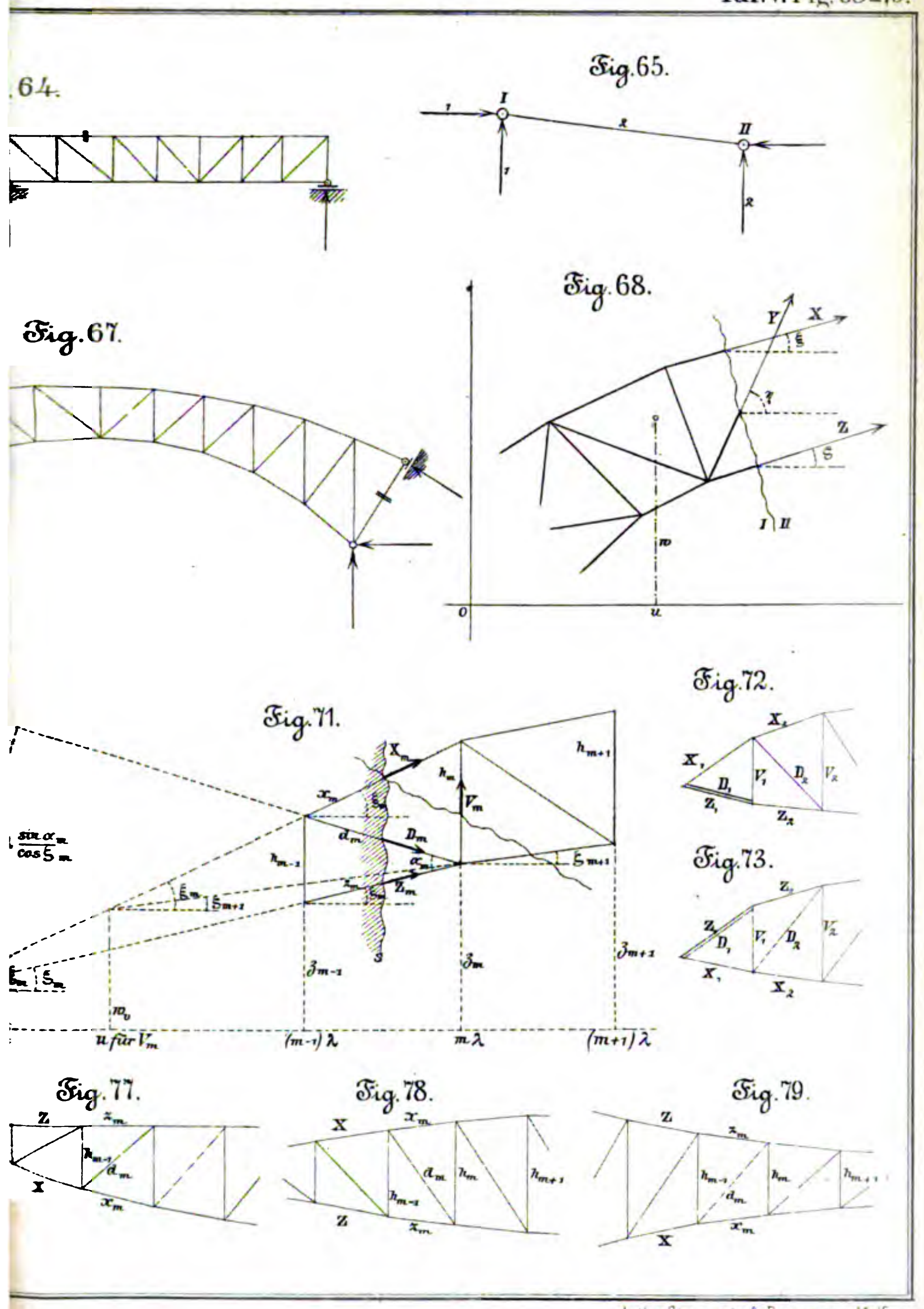


Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen.

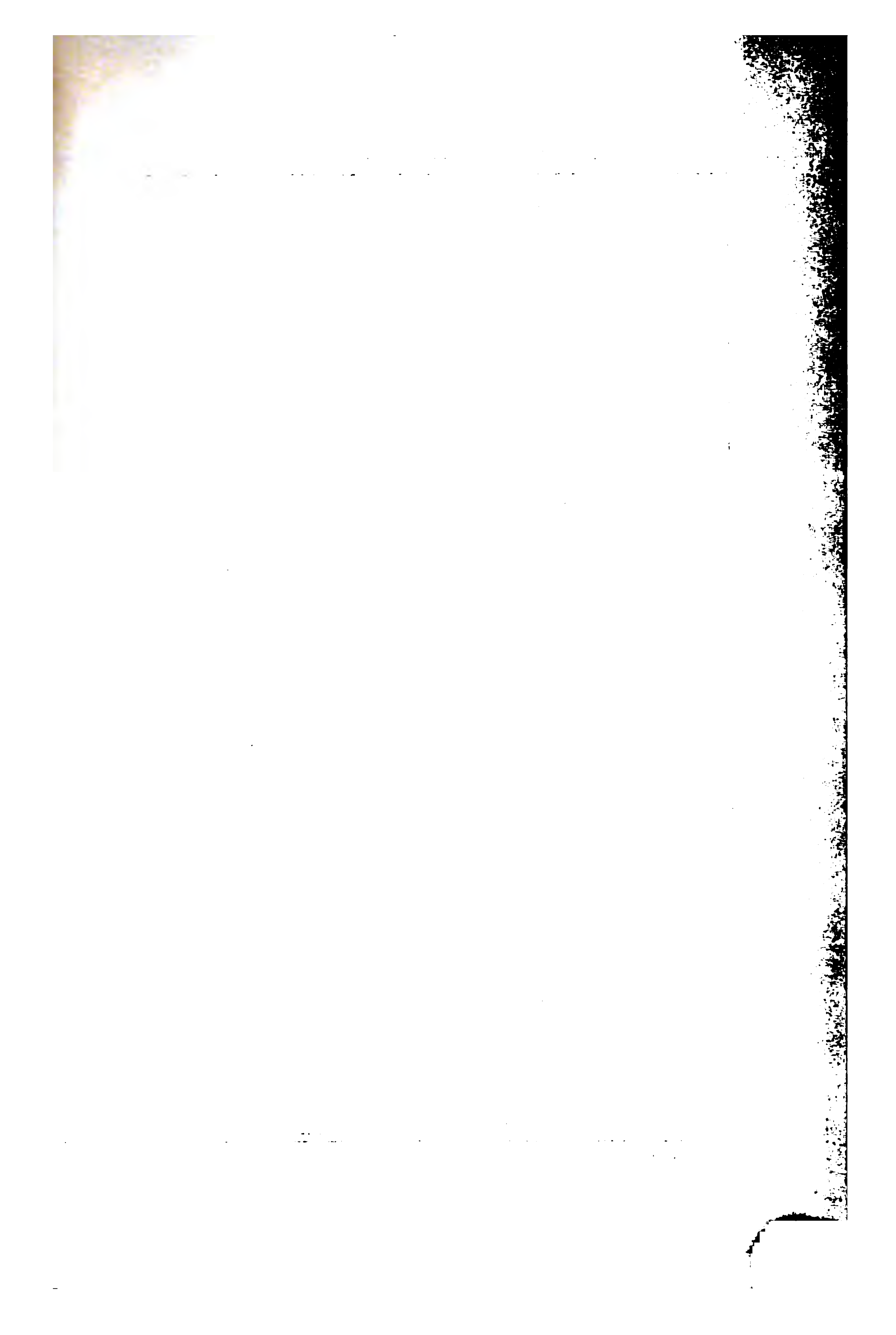


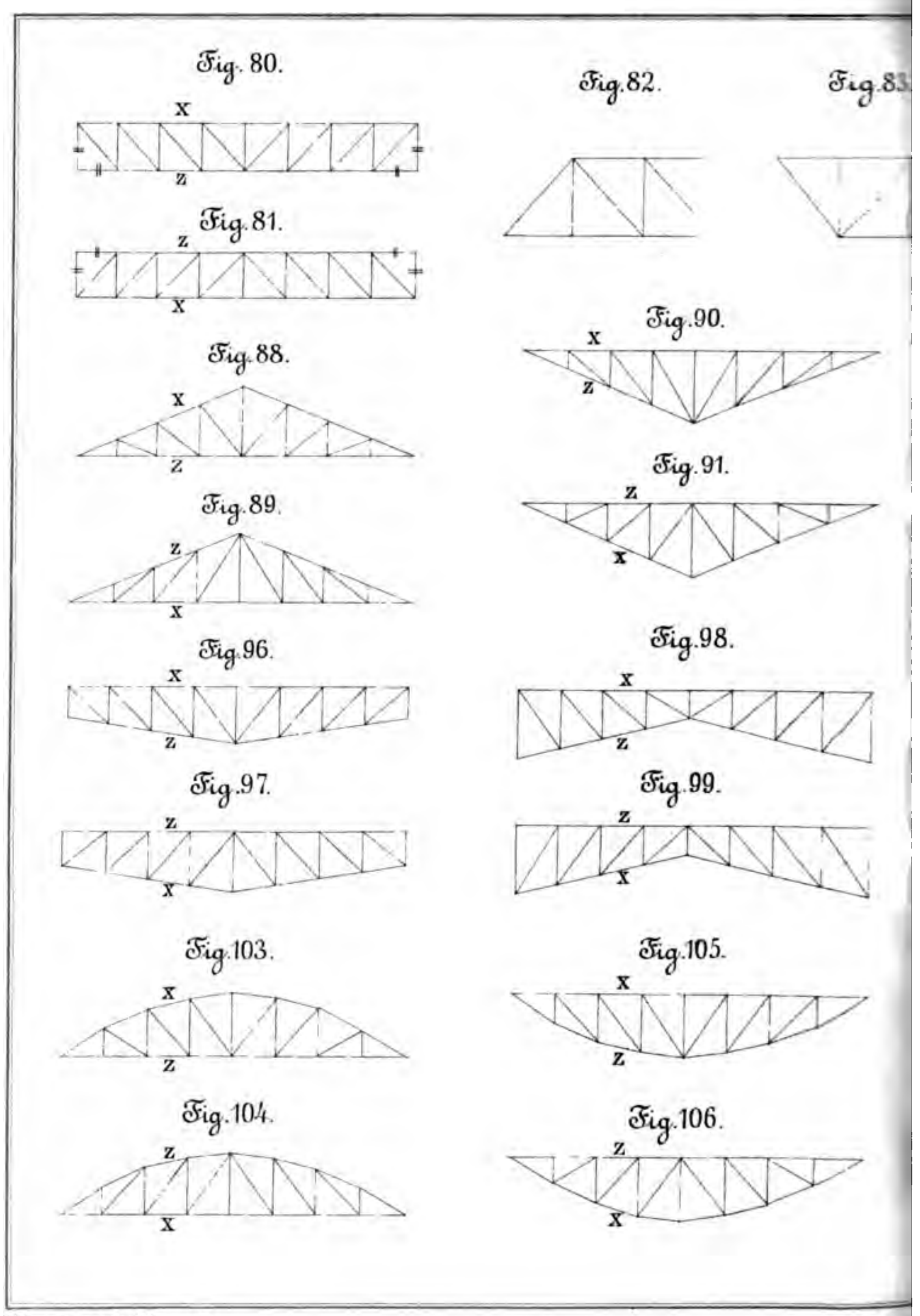



Fig. 63.
Fig. 66.
Fig. 69. (obere Vorzeichen).
Fig. 70.
(untere Vorzeichen).
S für V_m
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.

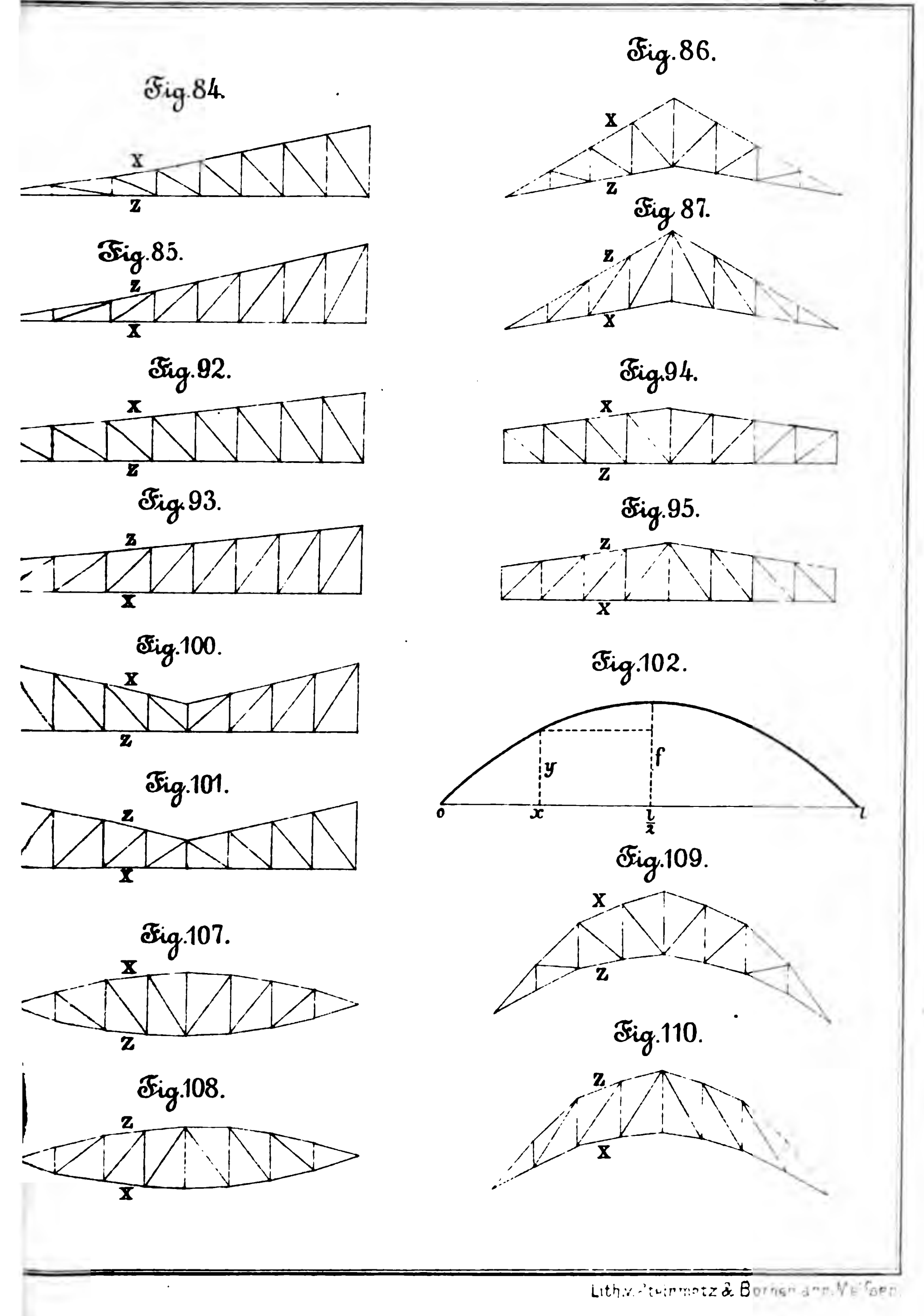


Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meifsen.



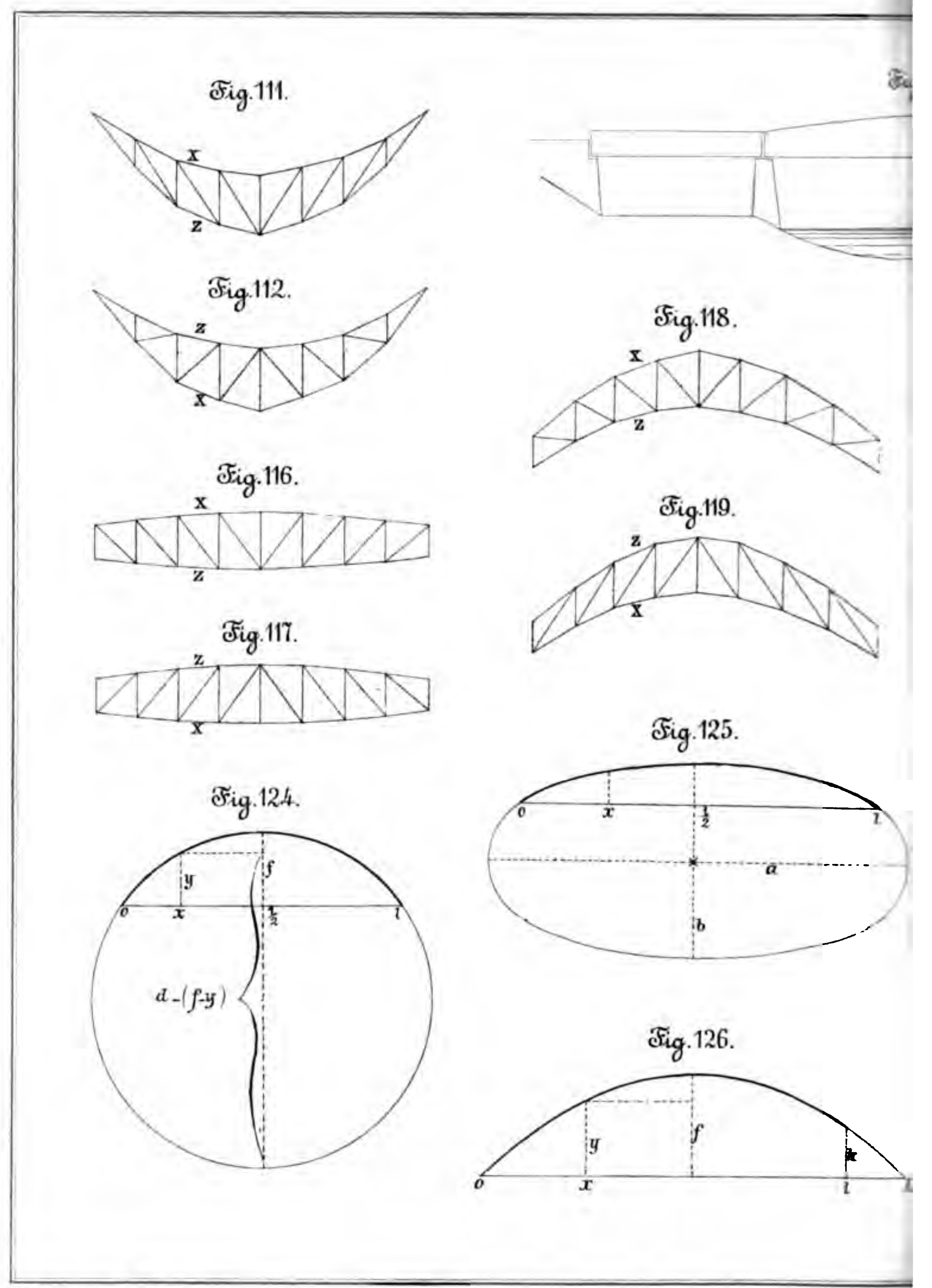


Weyrauch, Theorie.

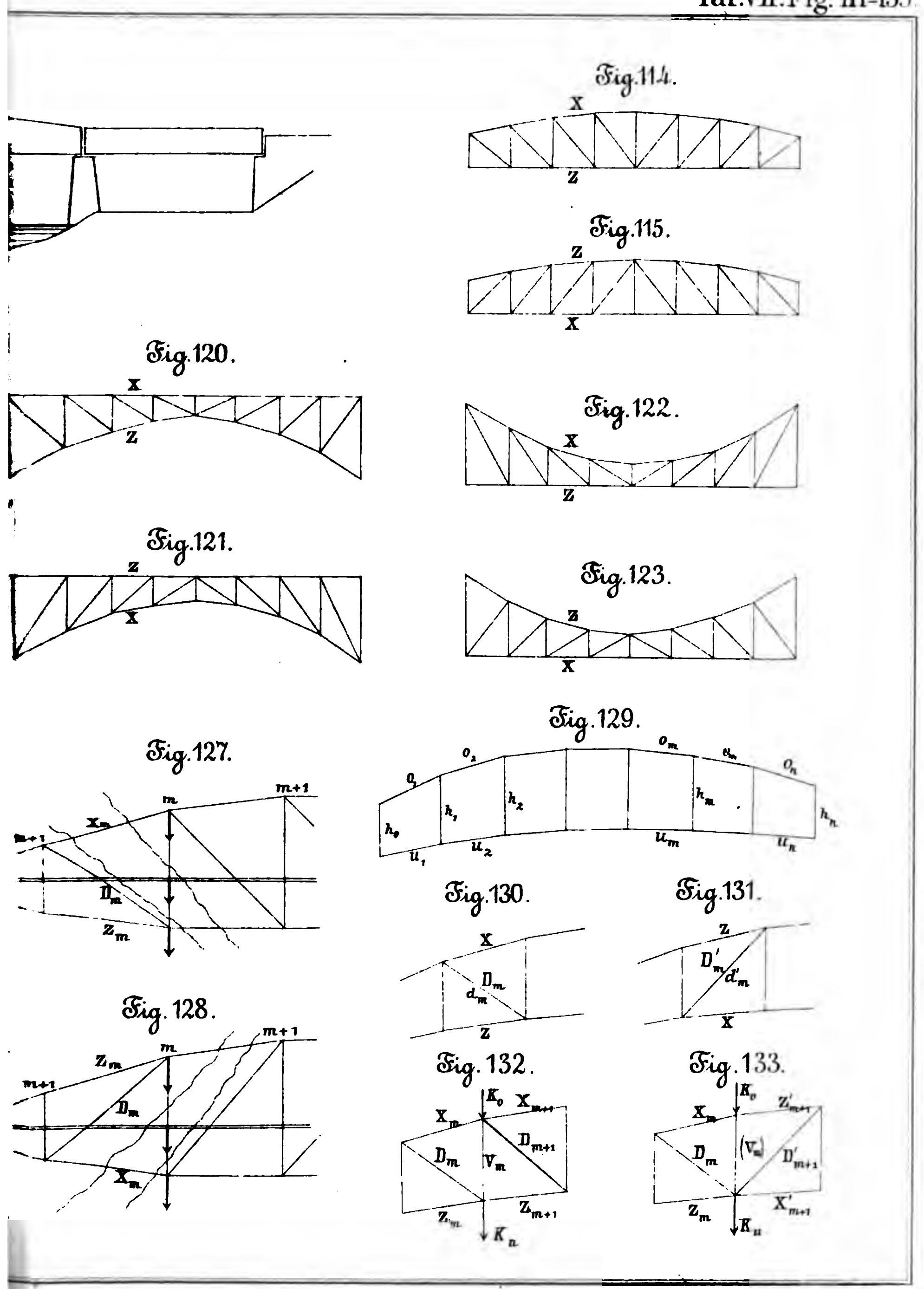


Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen.

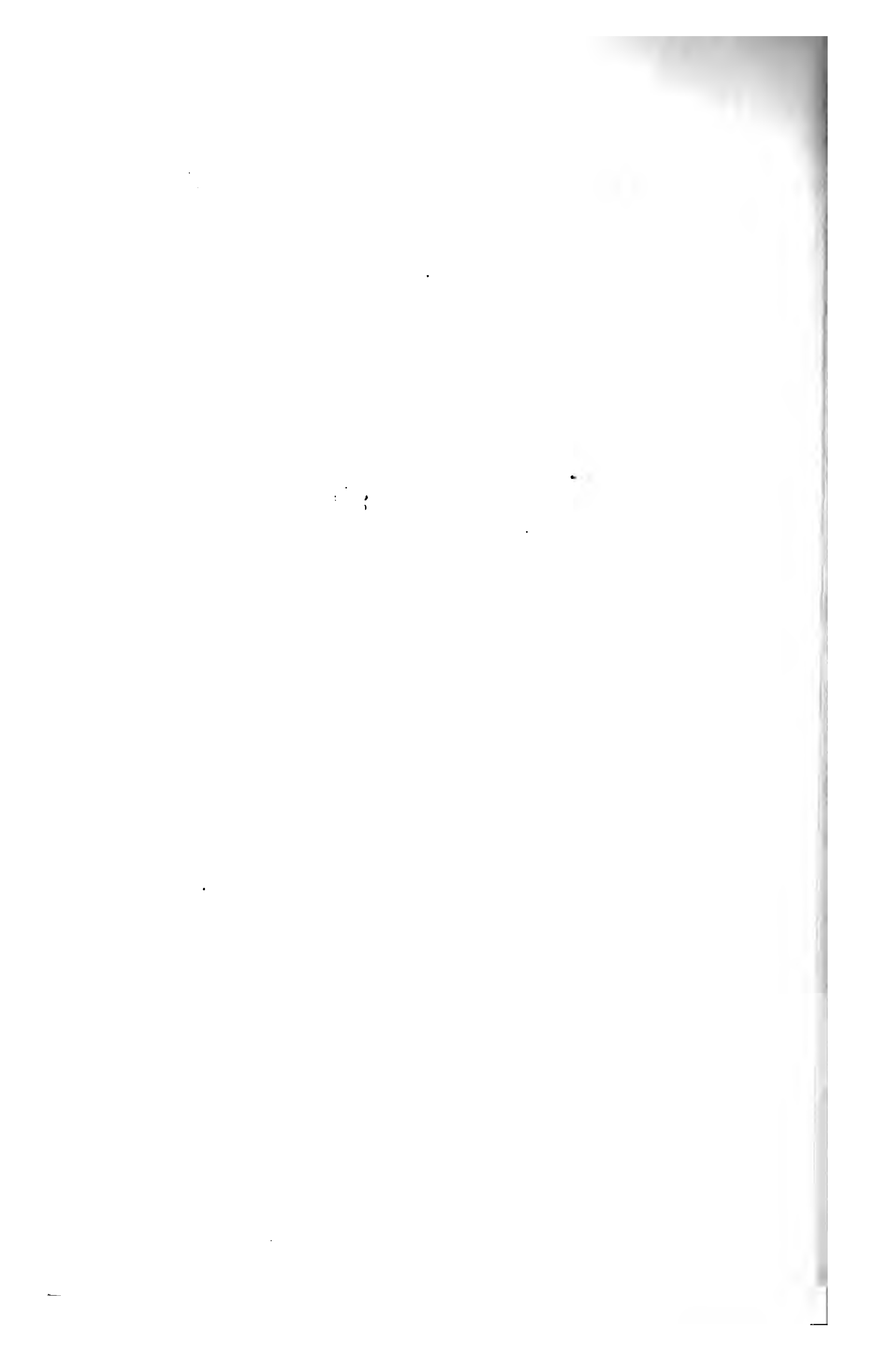


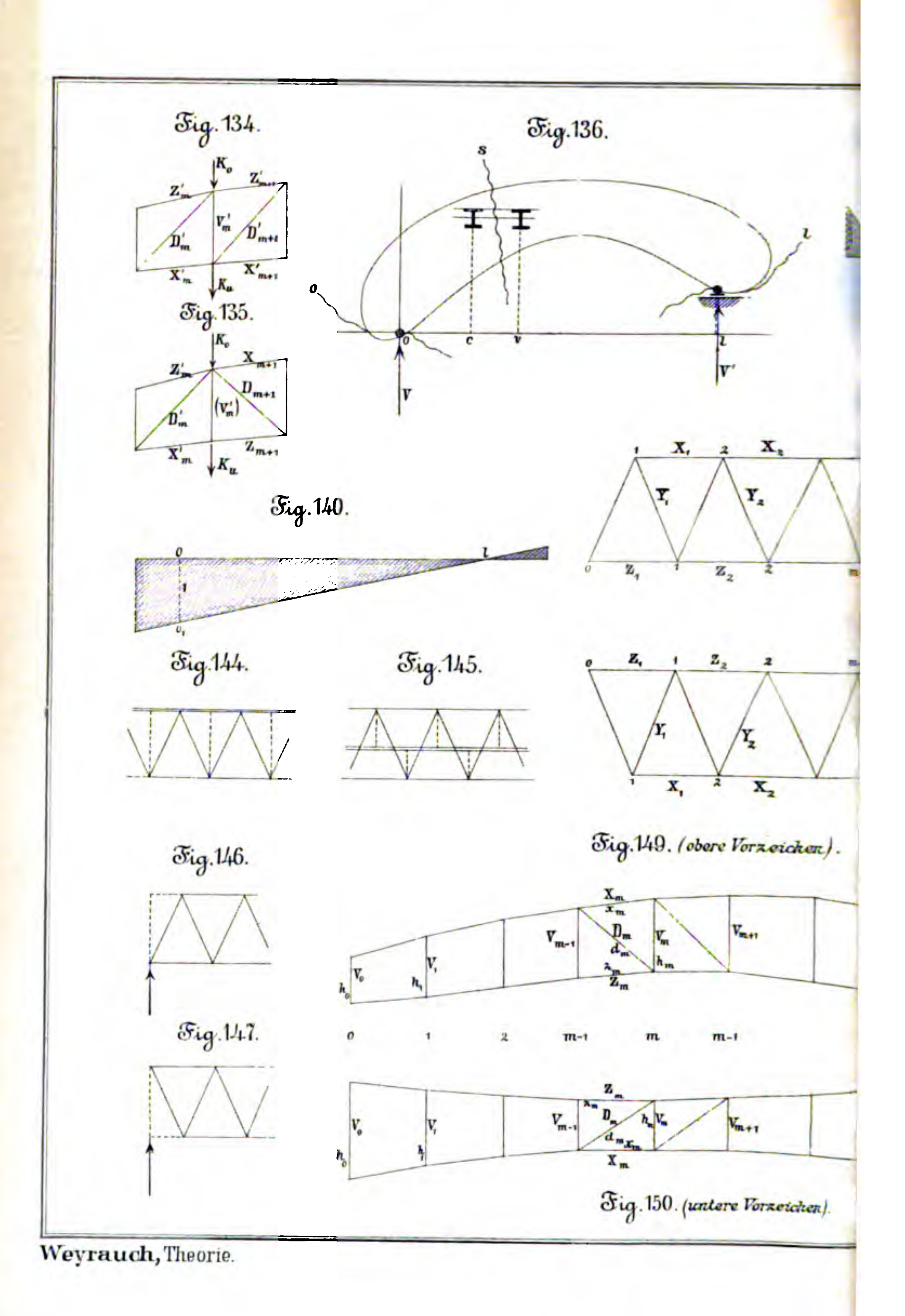


Weyrauch, Theorie.

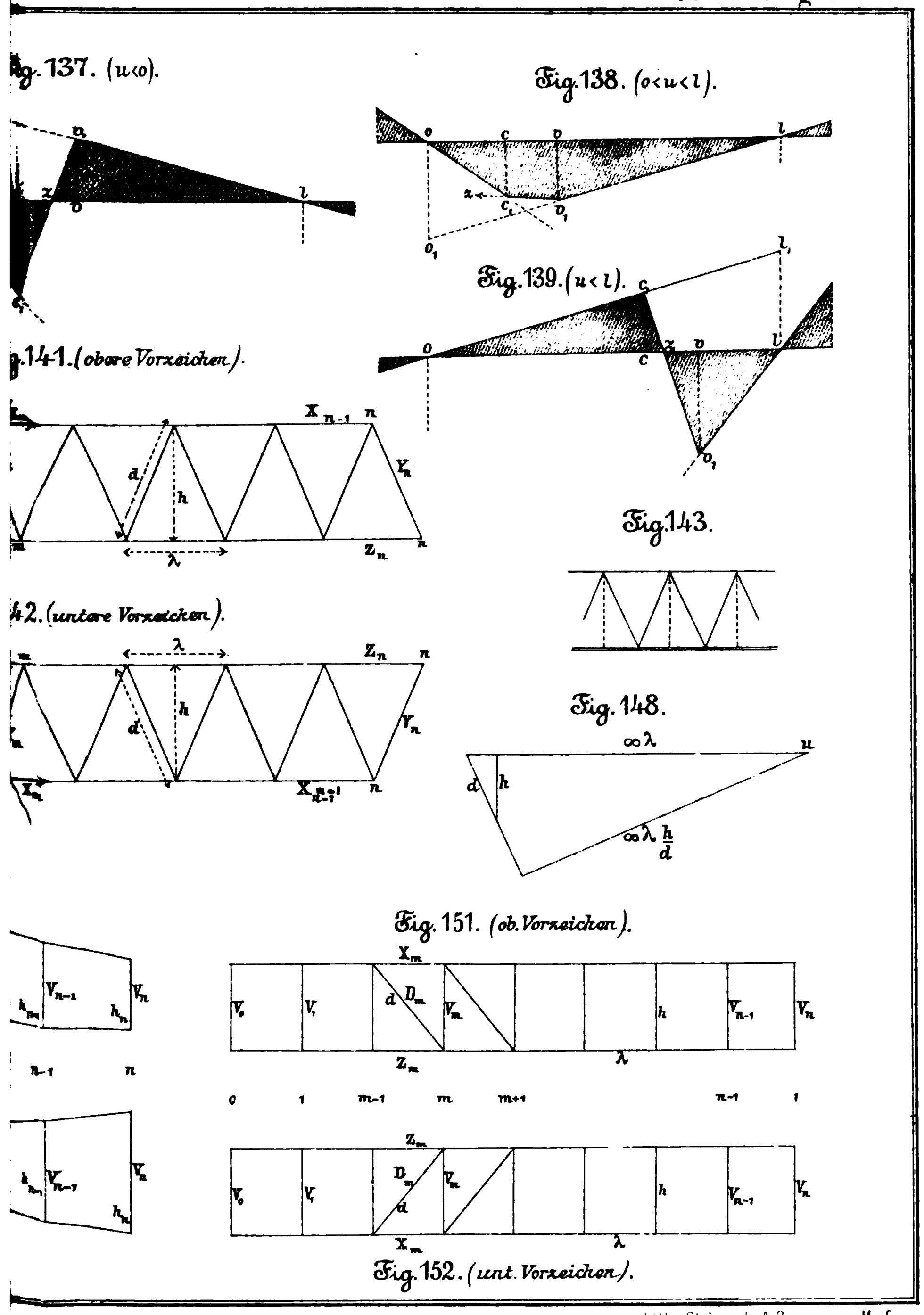


Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen



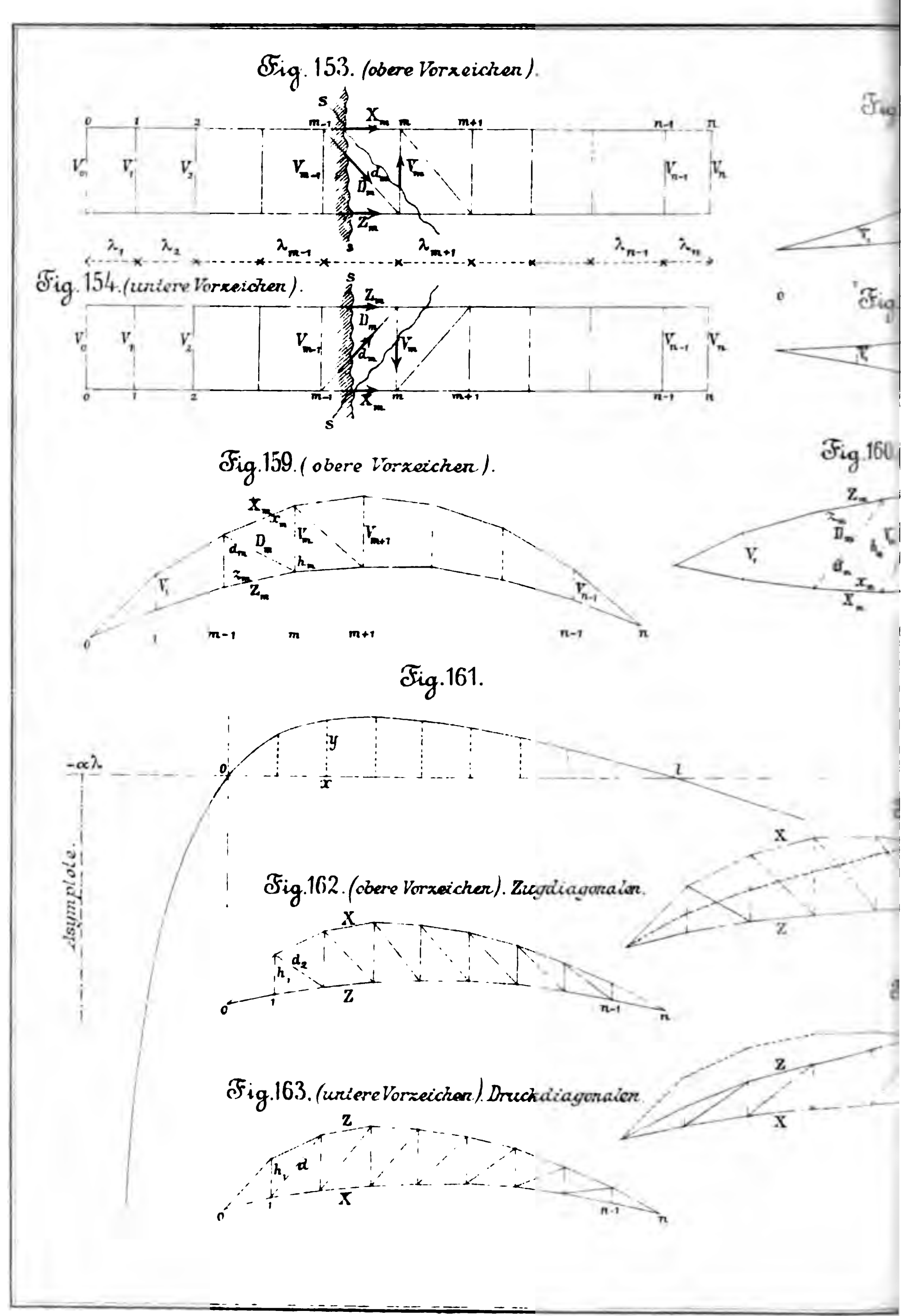


Weyrauch, Theorie.

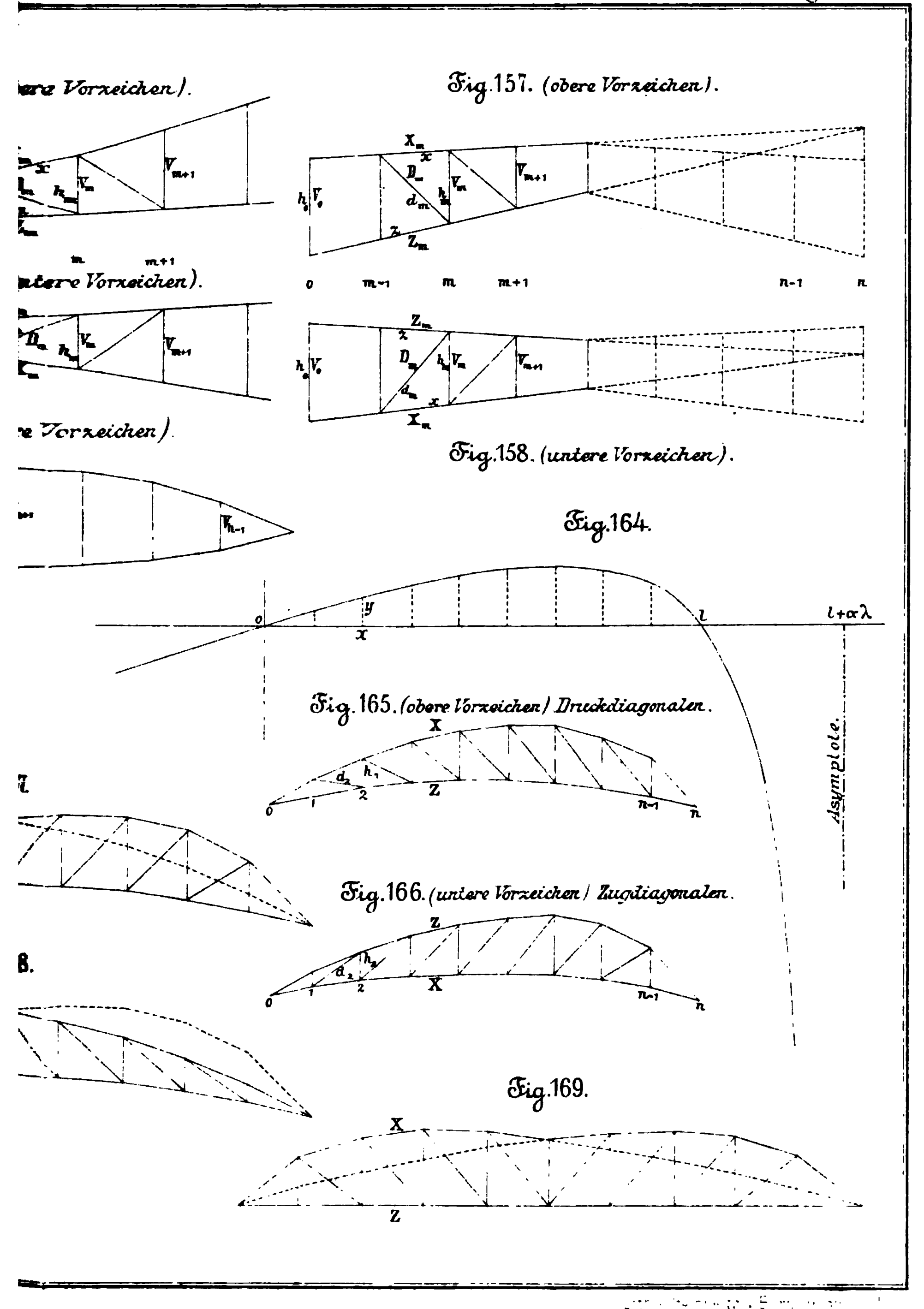


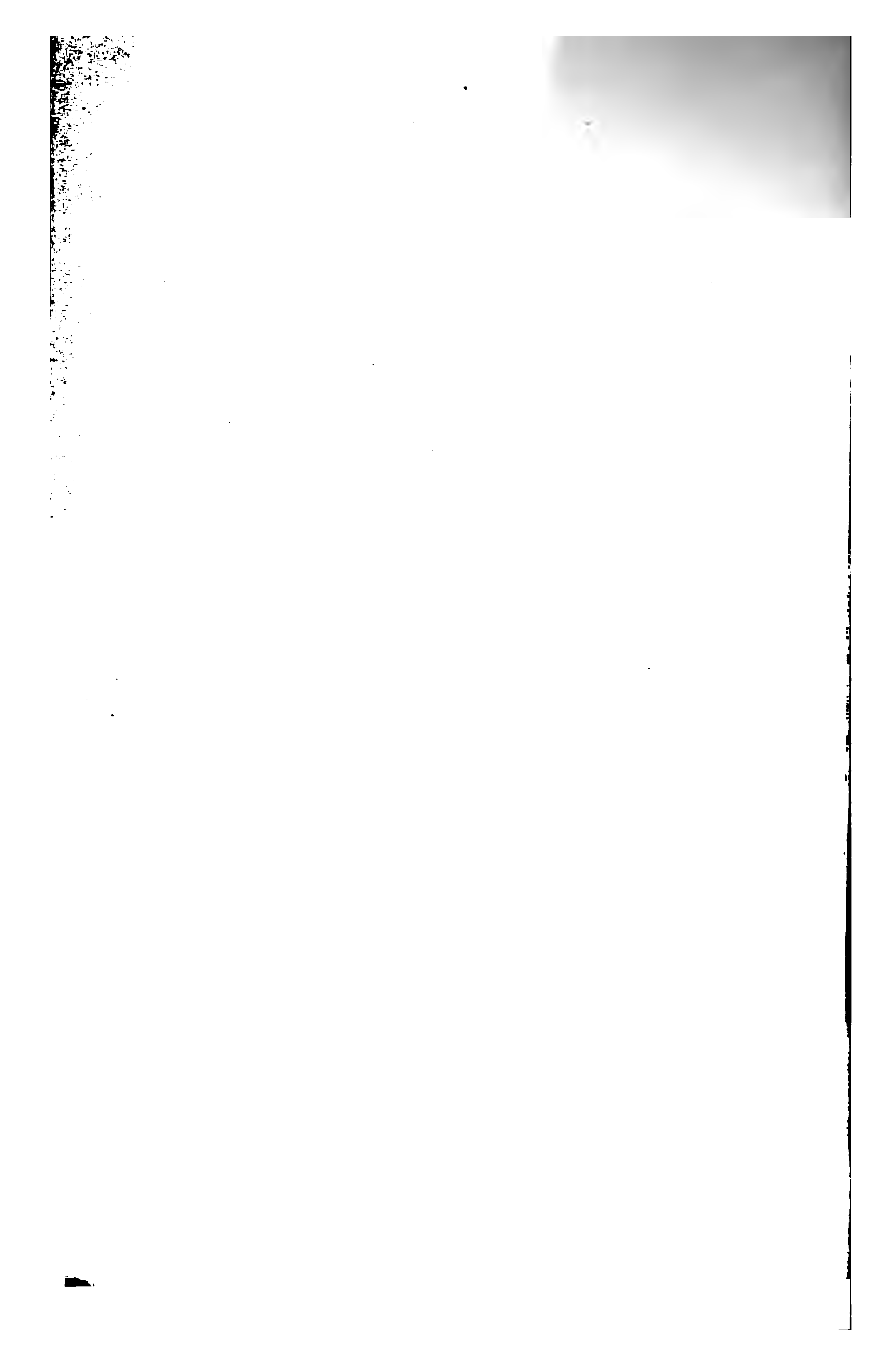
Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen.

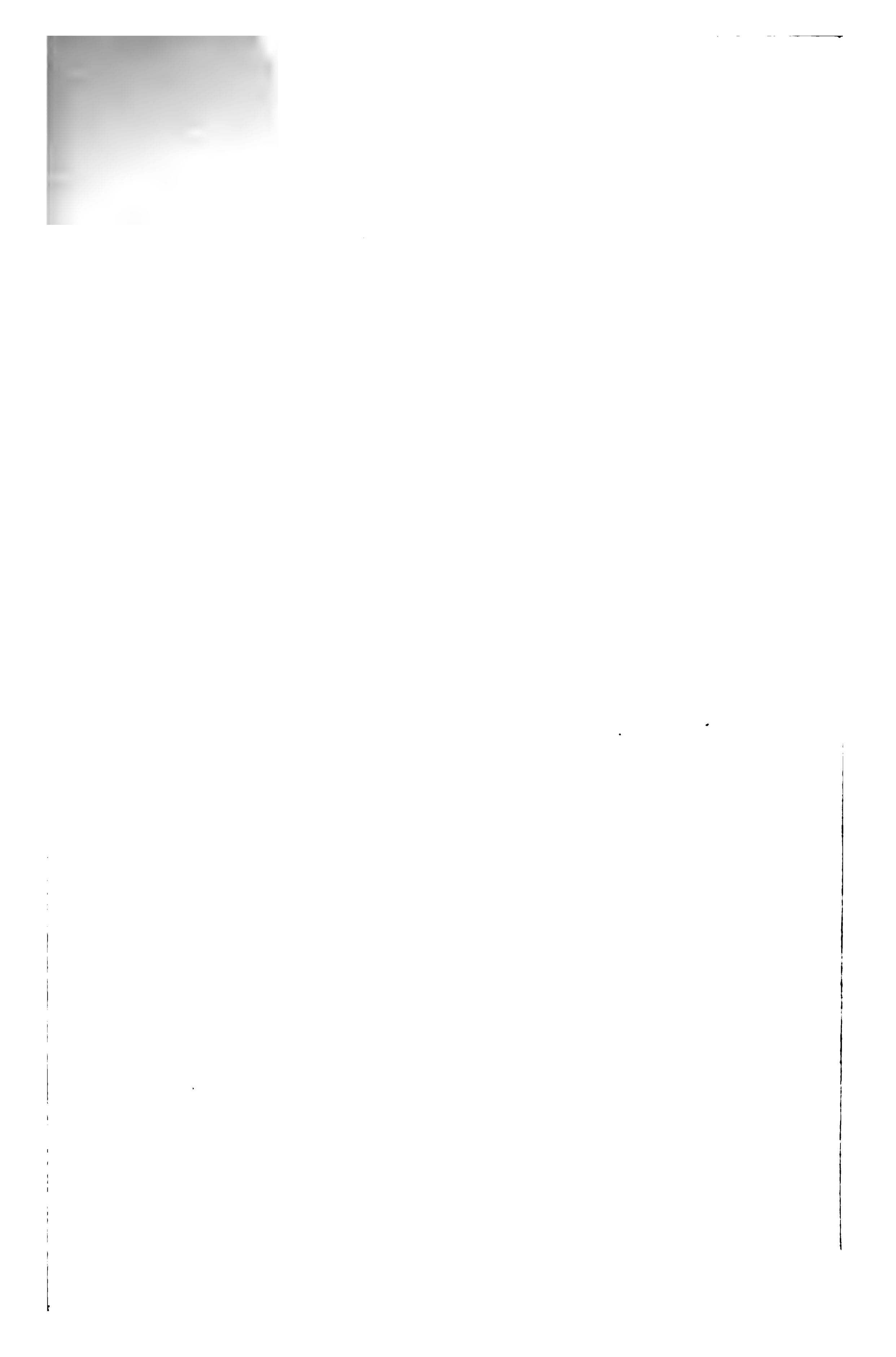


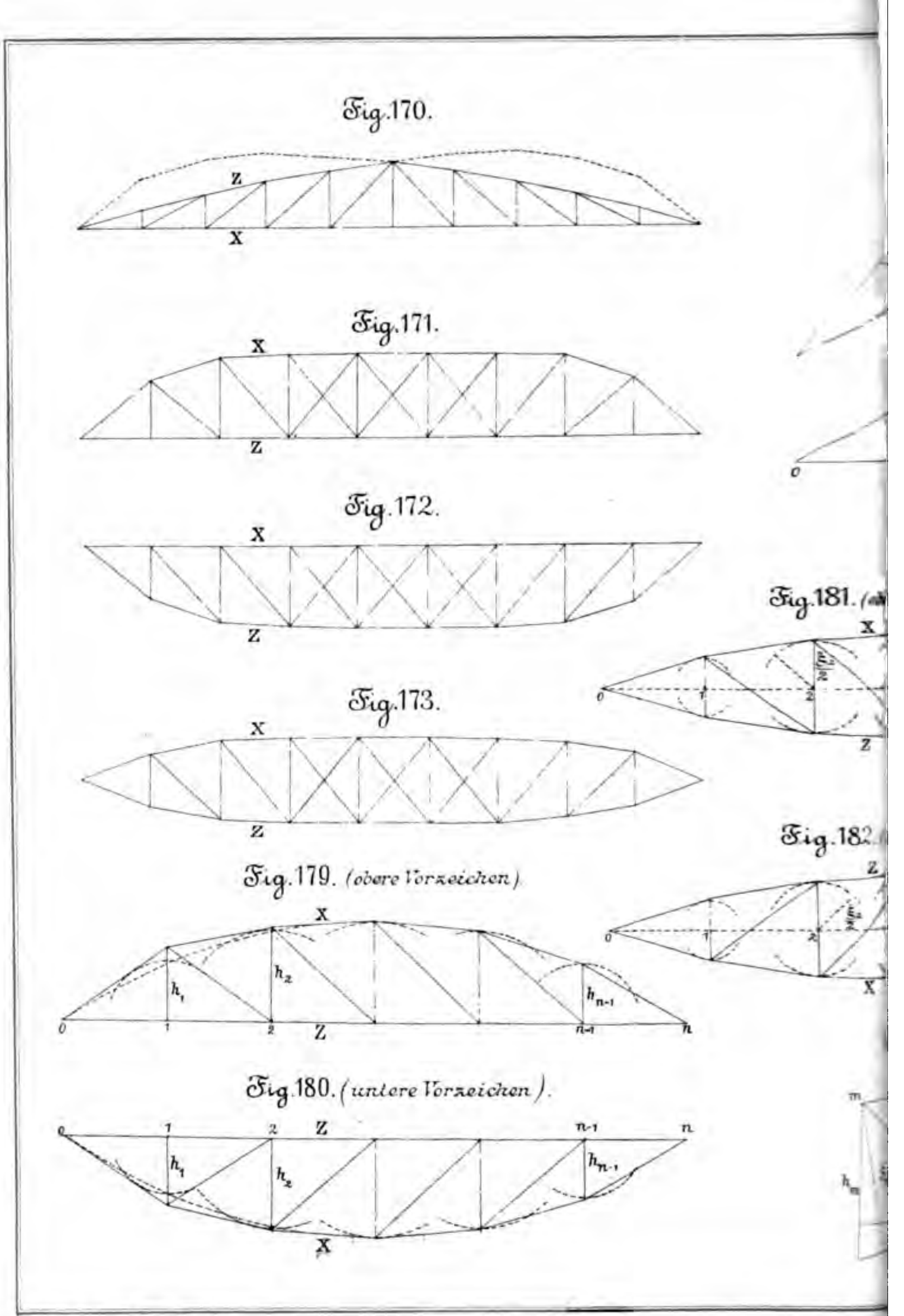


Weyrauch. Theorie.

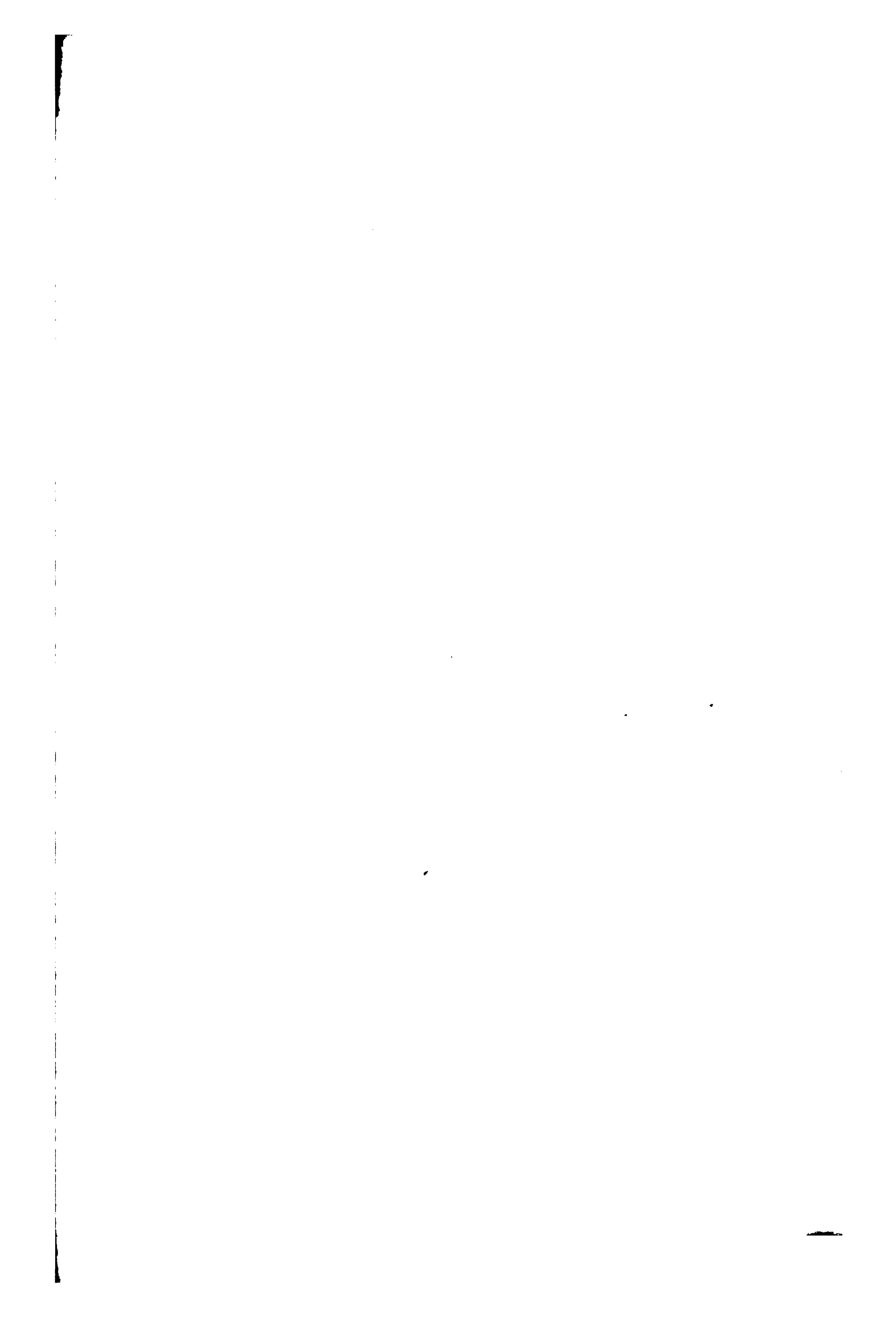

...ere Vorzeichen).
...ntere Vorzeichen).
...e Vorzeichen).
Fig. 157. (obere Vorzeichen).
Fig. 158. (untere Vorzeichen).
Fig. 164.
Fig. 165. (obere Vorzeichen) Druckdiagonalen.
Fig. 166. (untere Vorzeichen) Zugdiagonalen.
Fig. 169.
Asymptote.
l+αλ



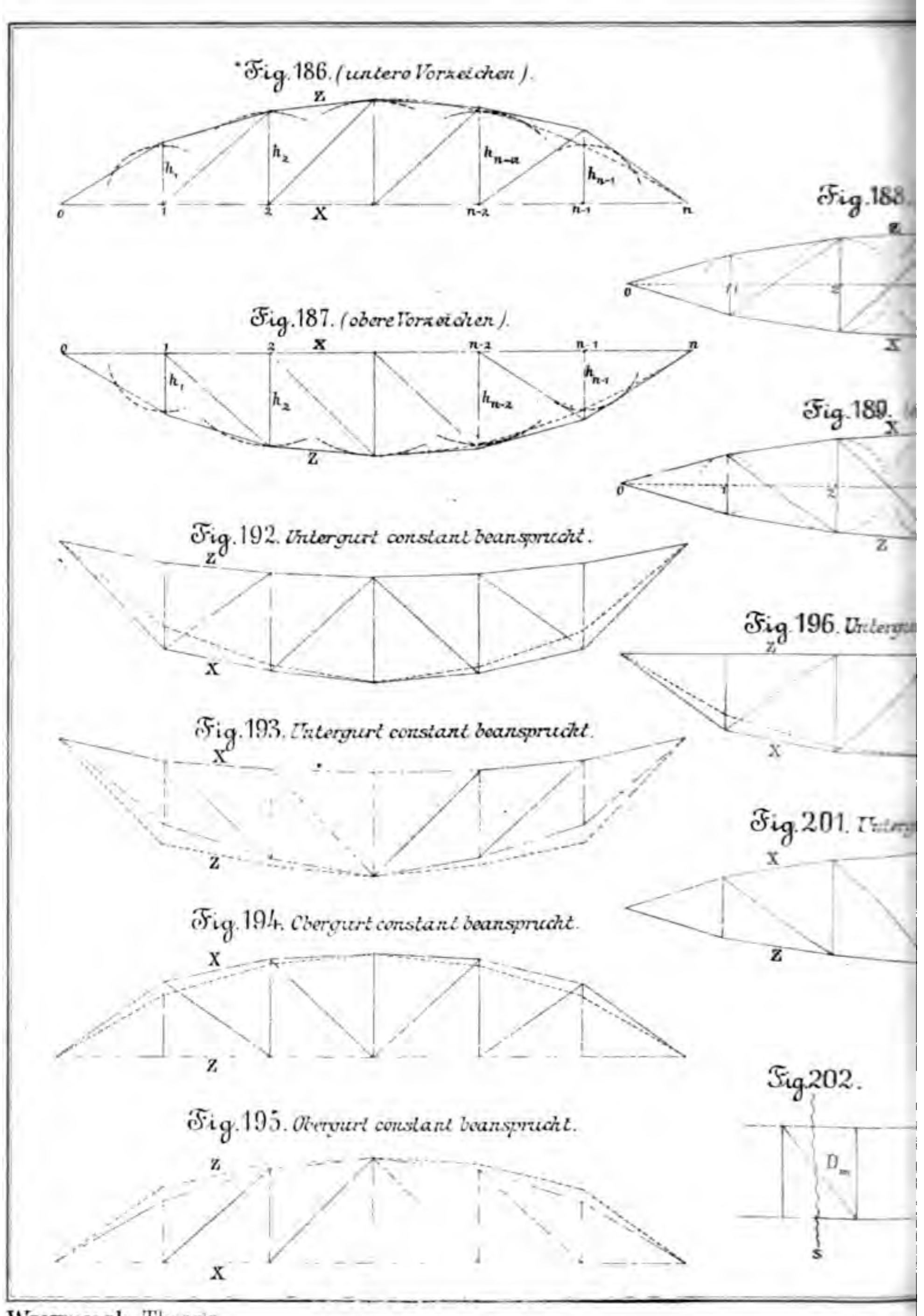




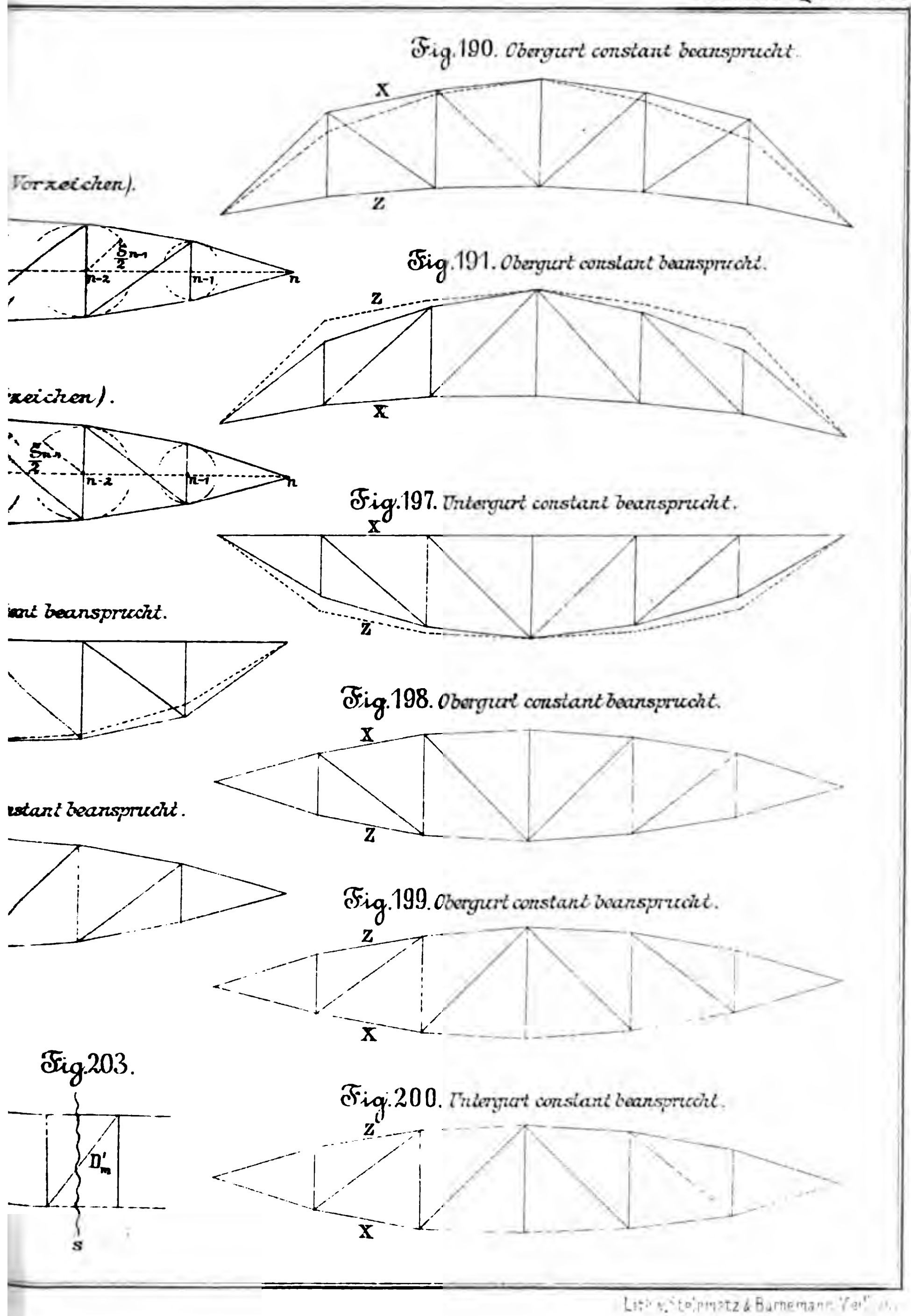
Weyrauch, Theorie.



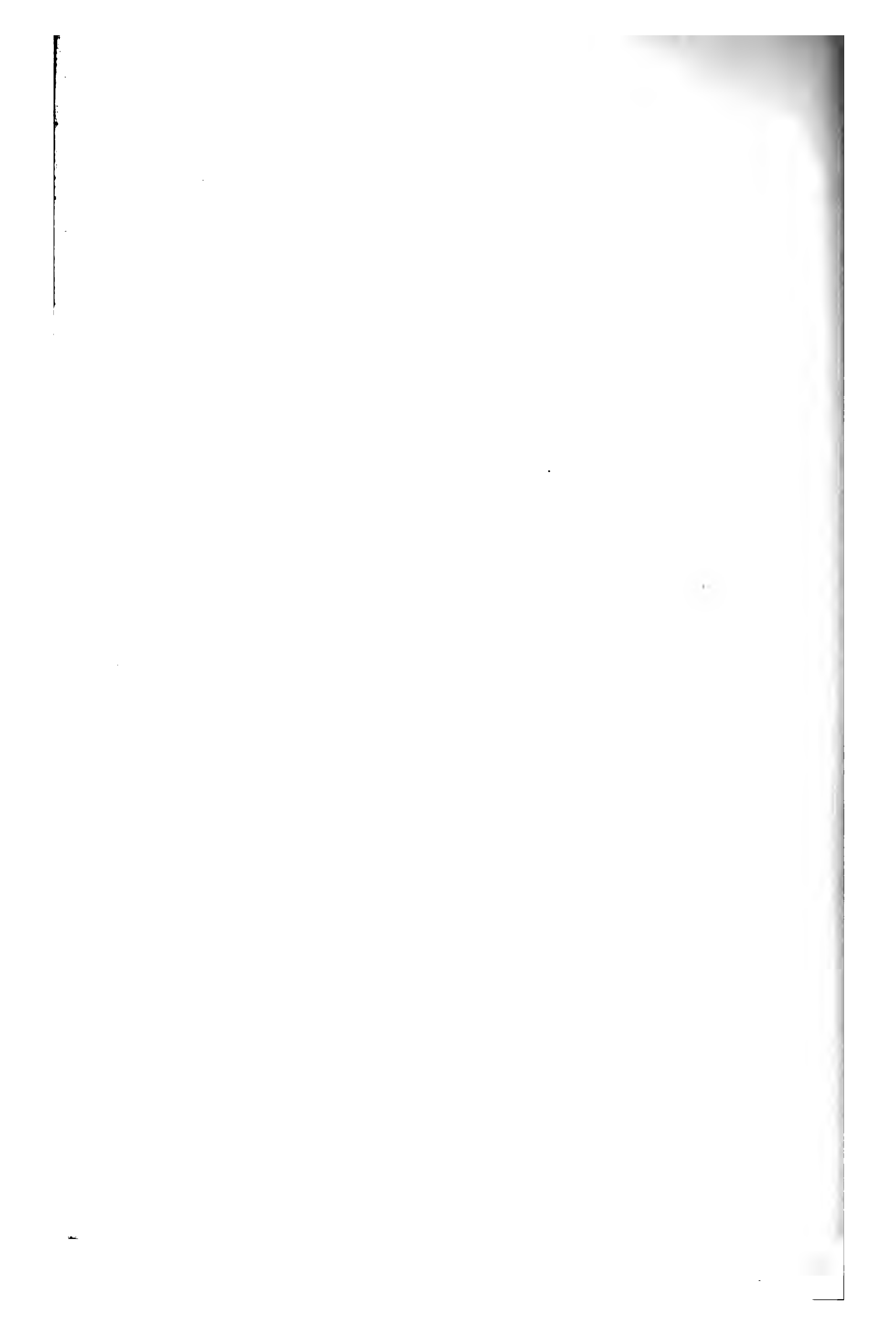




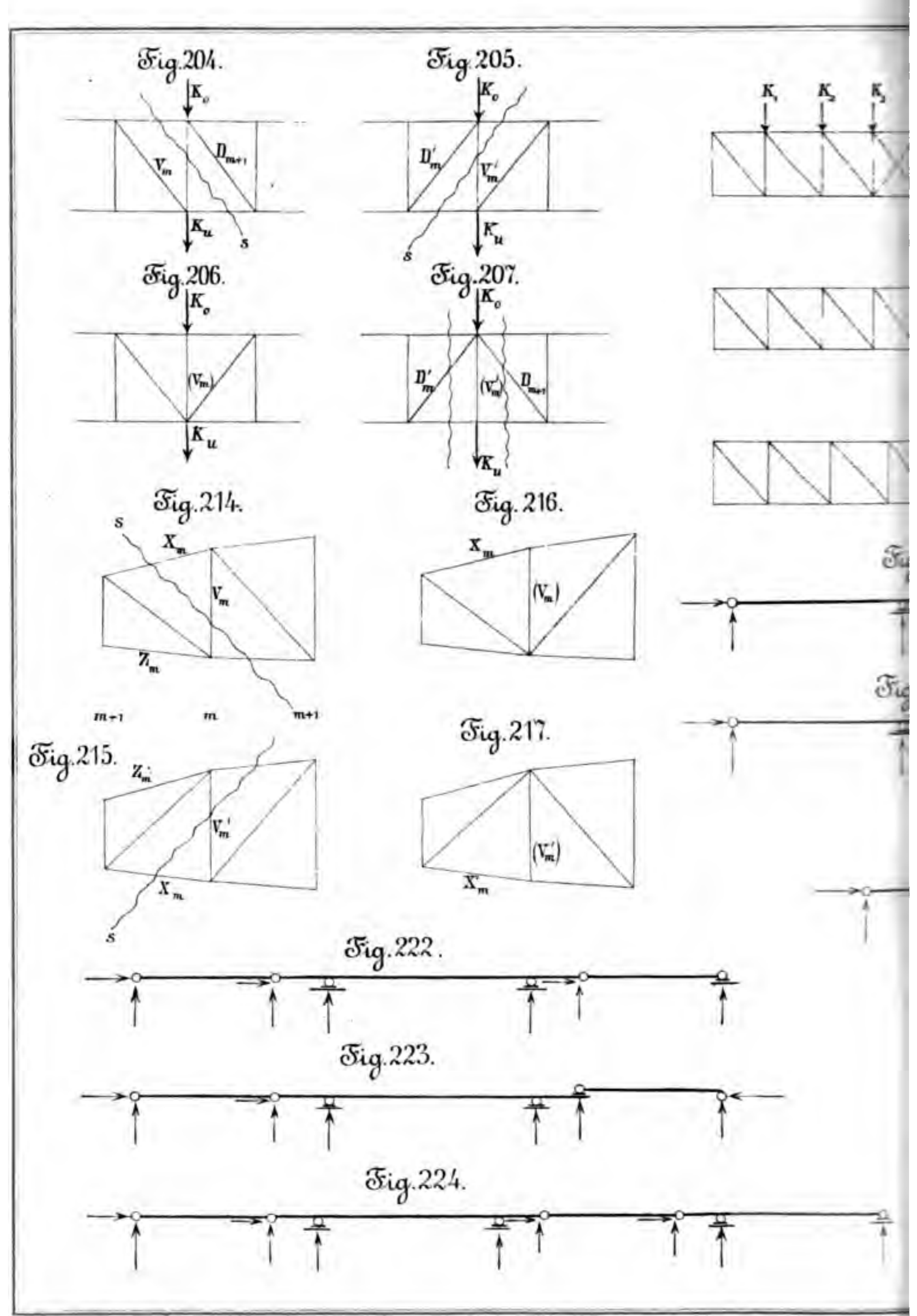
Weyrauch, Theorie.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Weil...

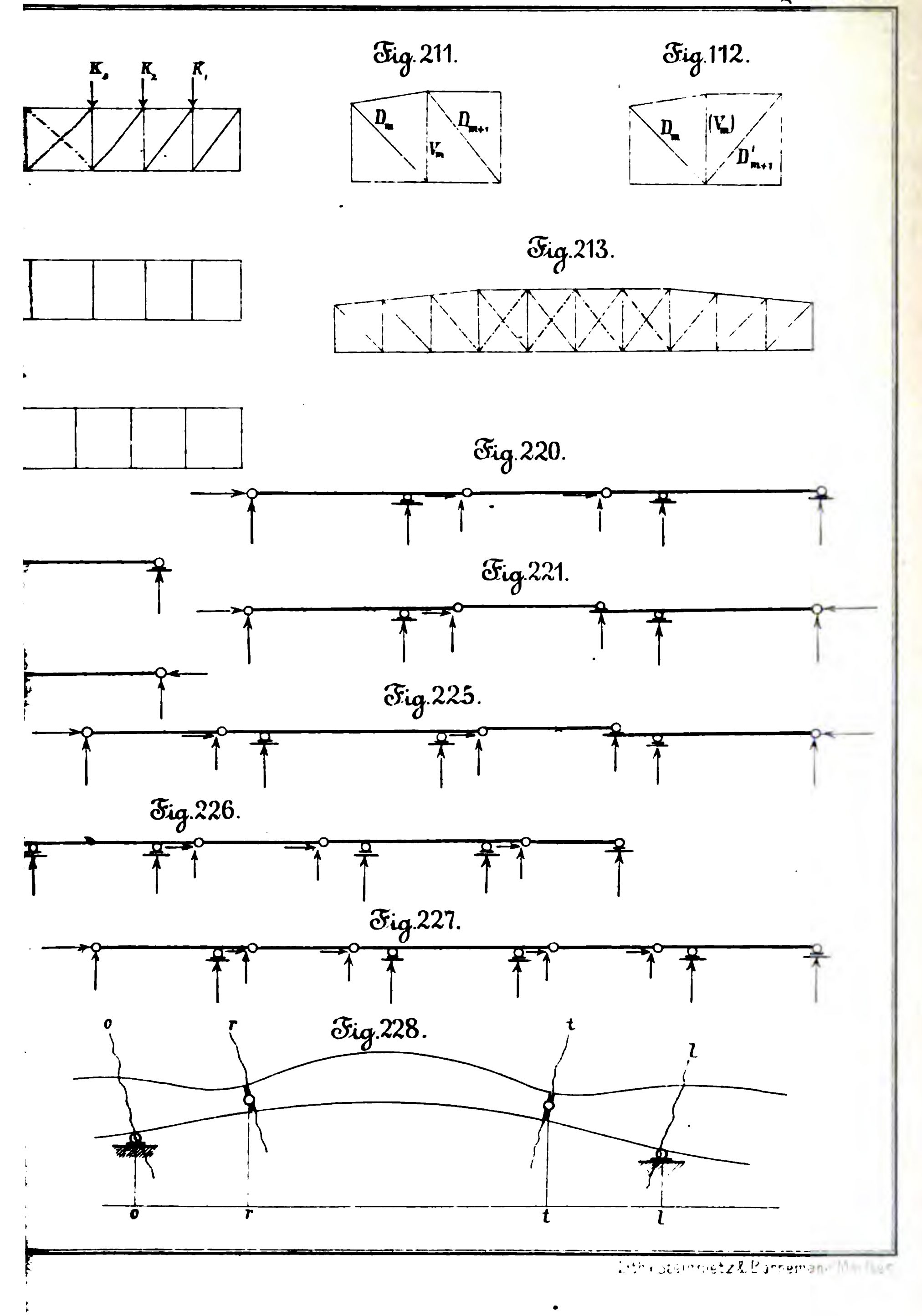


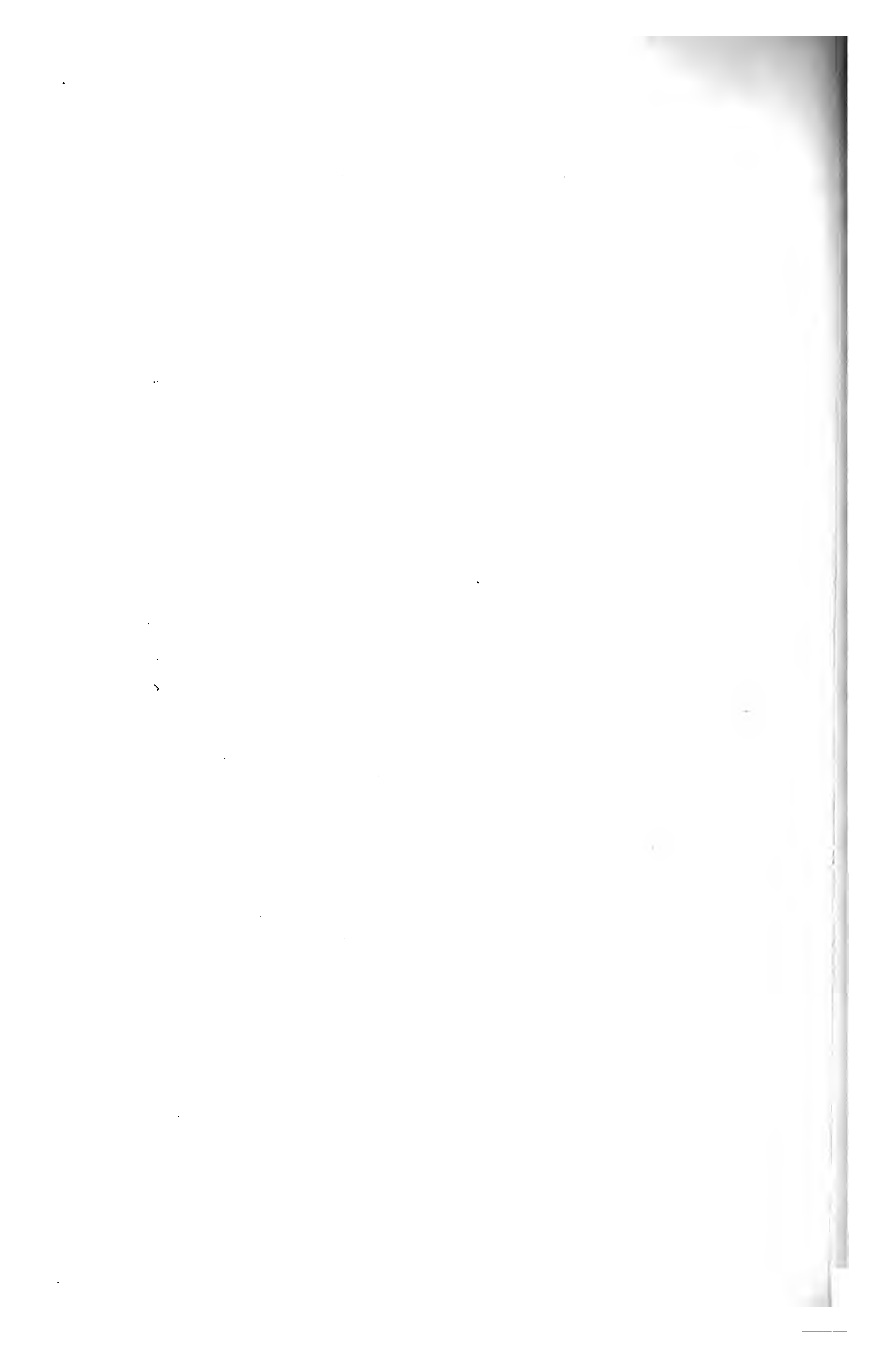




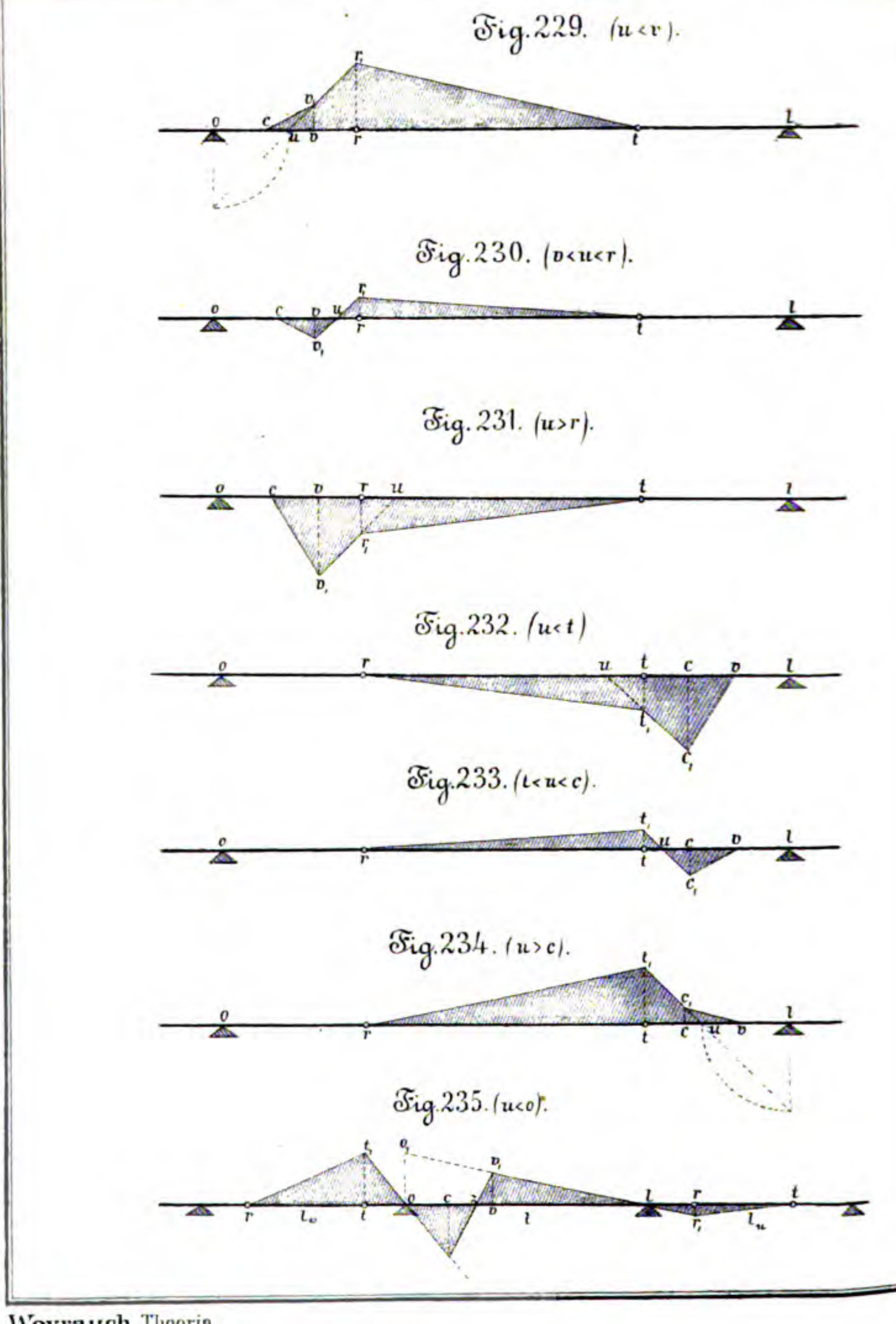
Weyrauch, Theorie.

Taf. XII. Fig. 204–228.

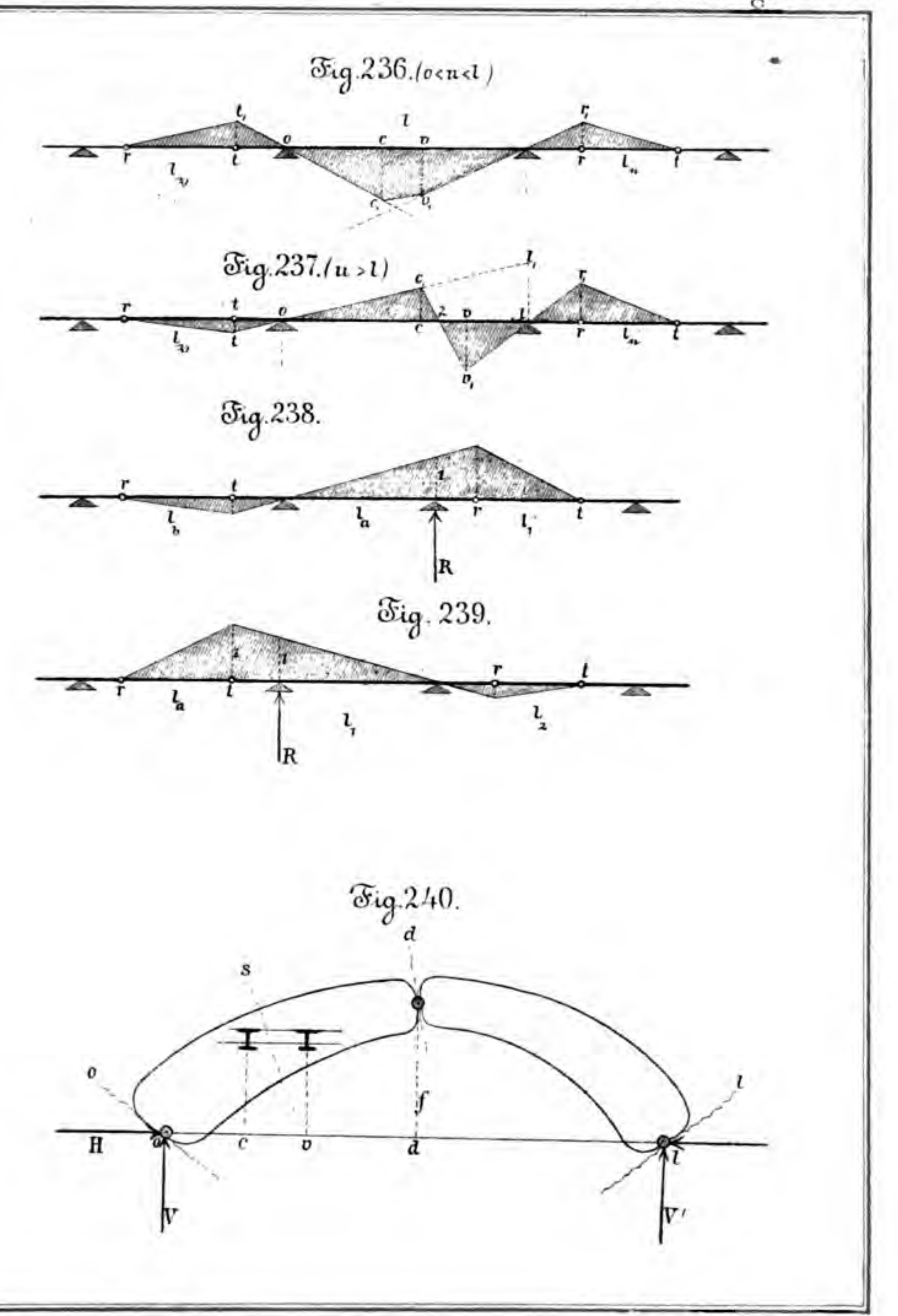




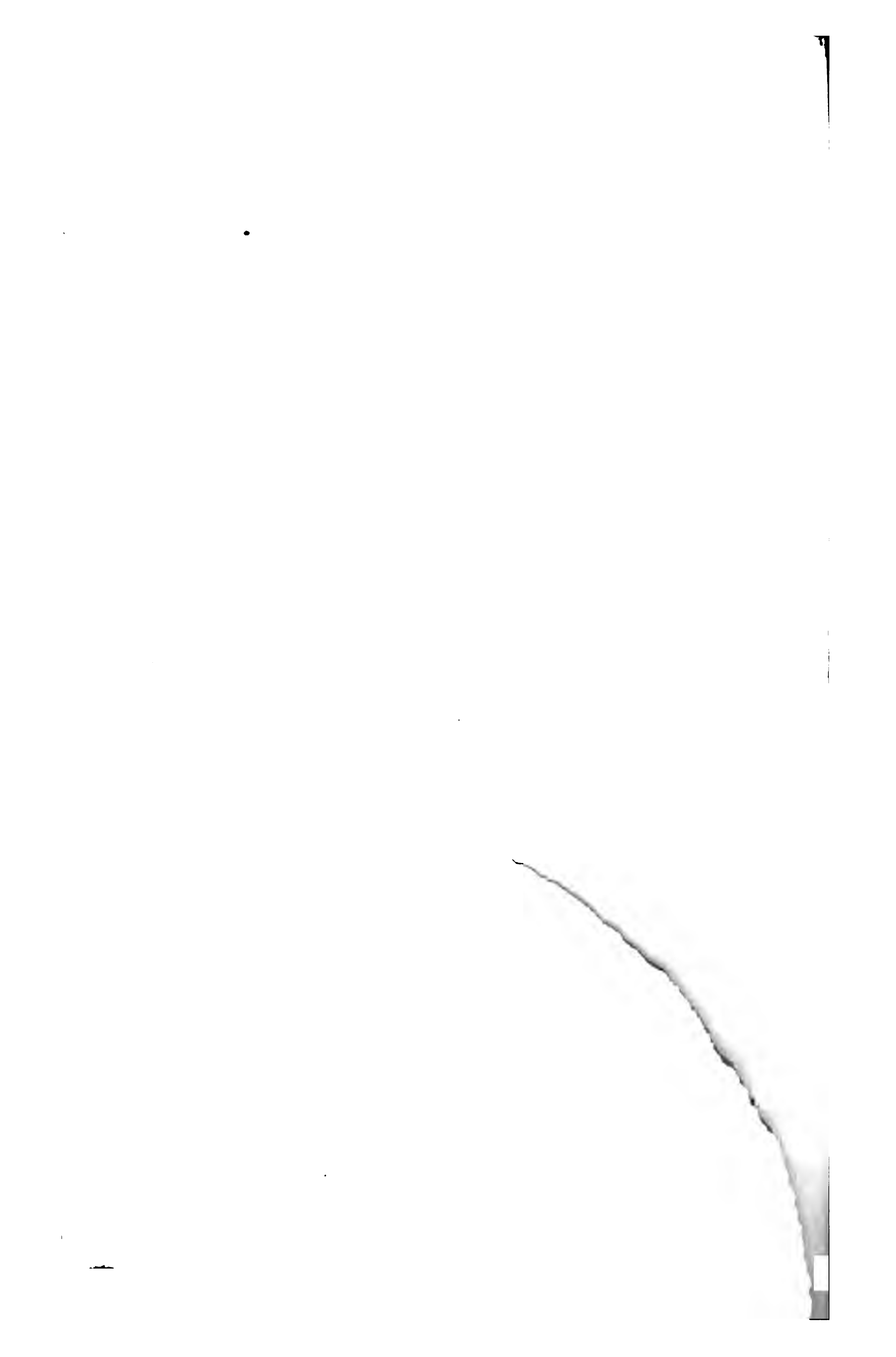


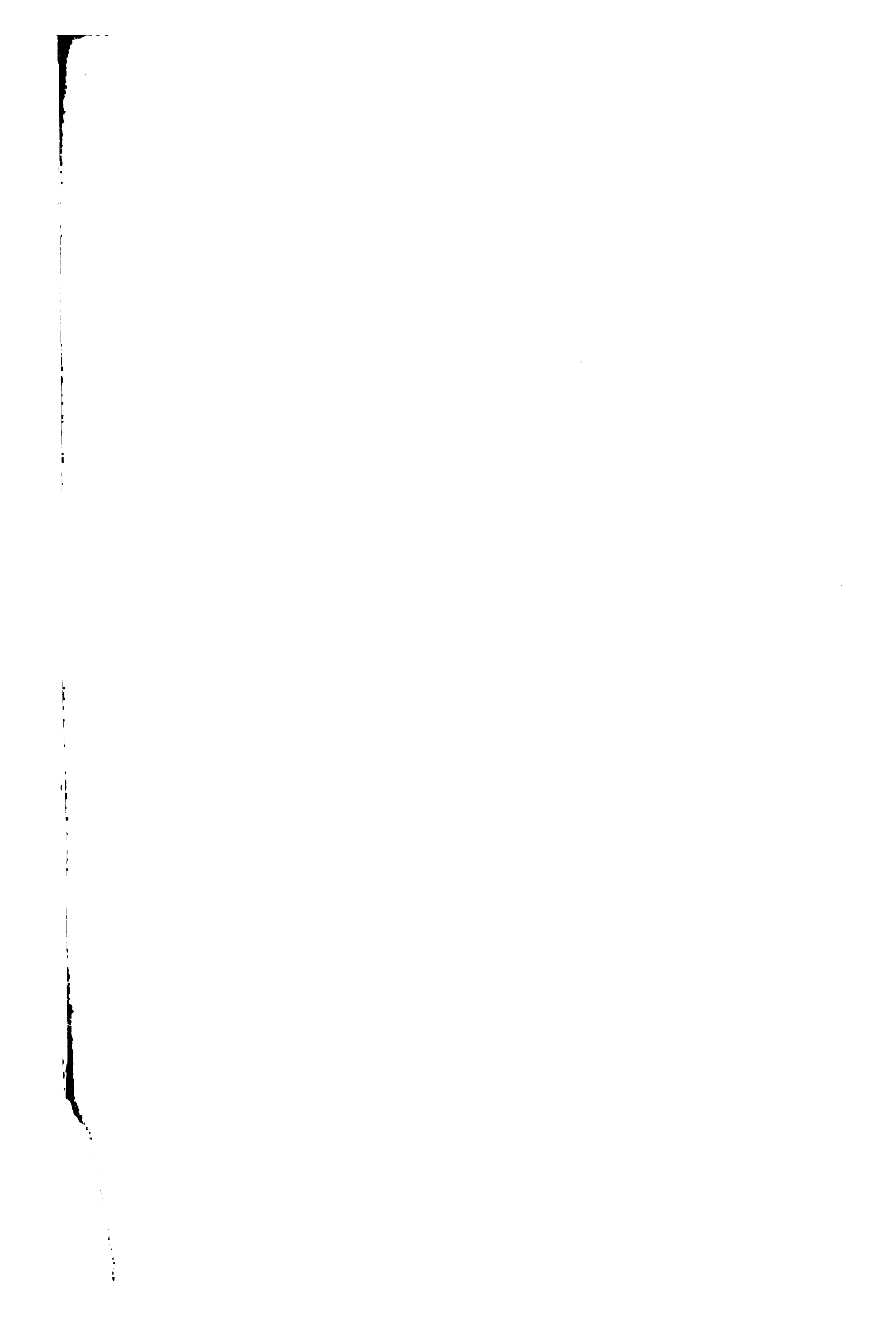


Weyrauch. Theorie.

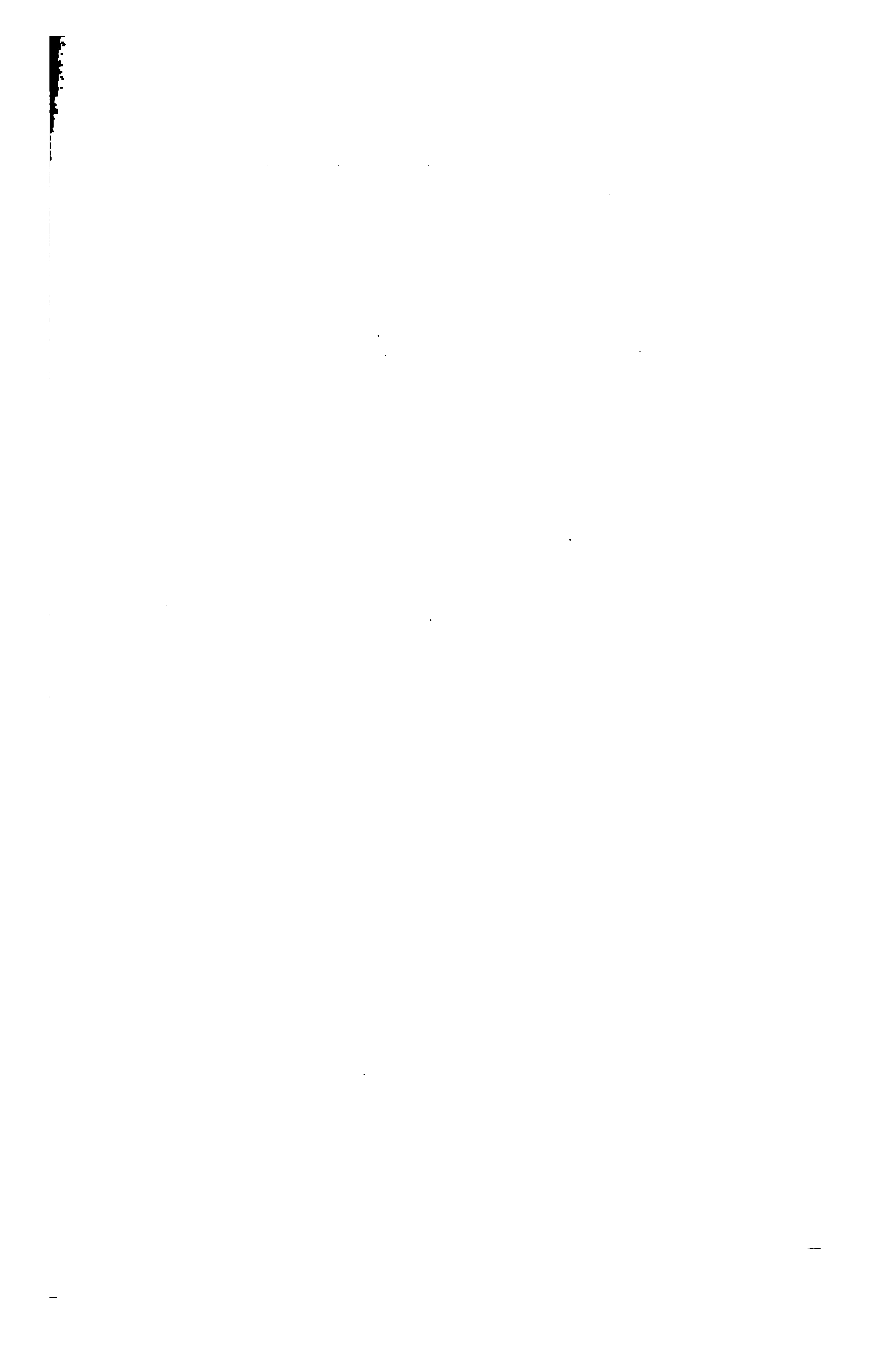


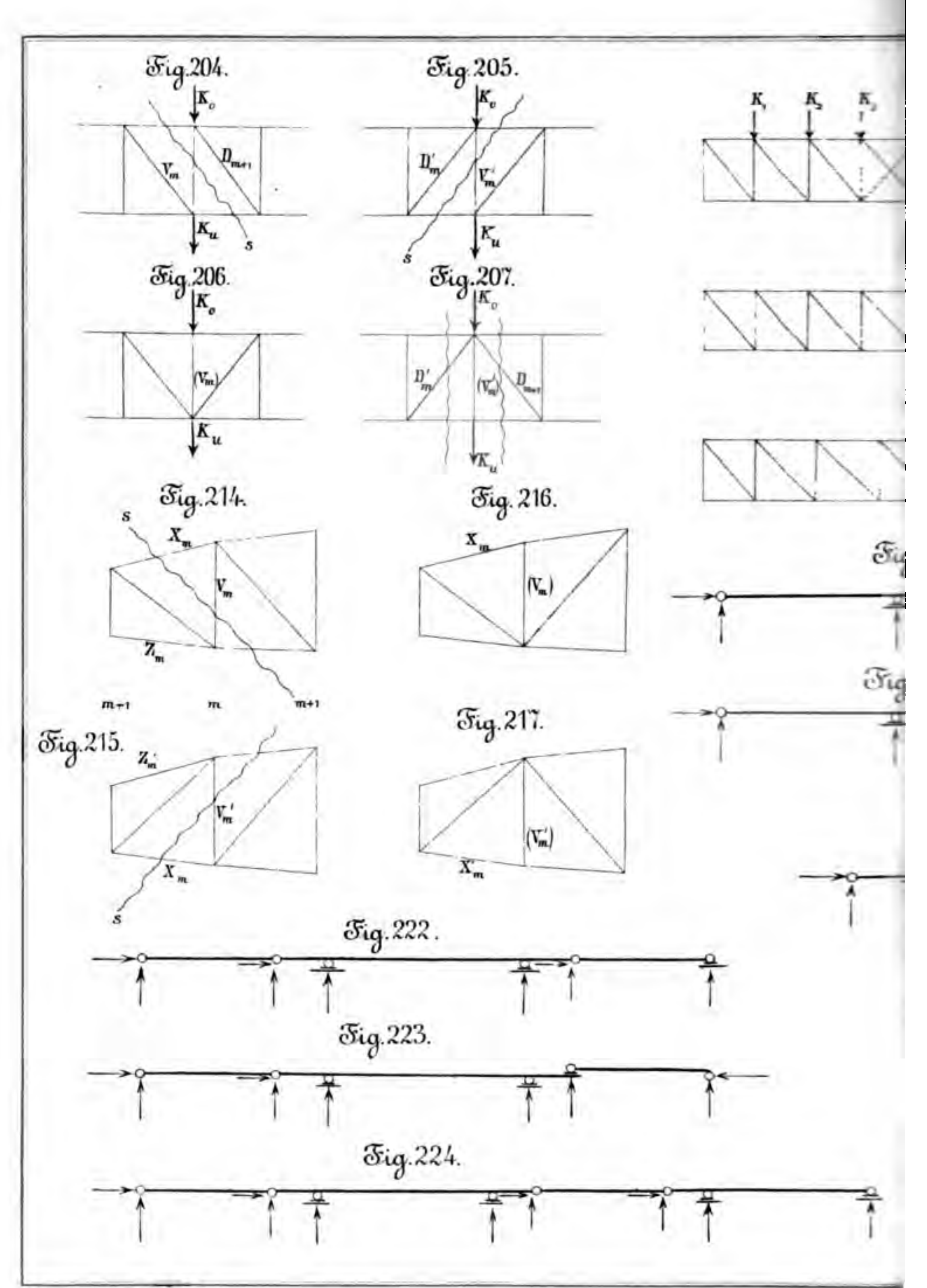
Lith. Steinmetz & Bornemann, Halle.



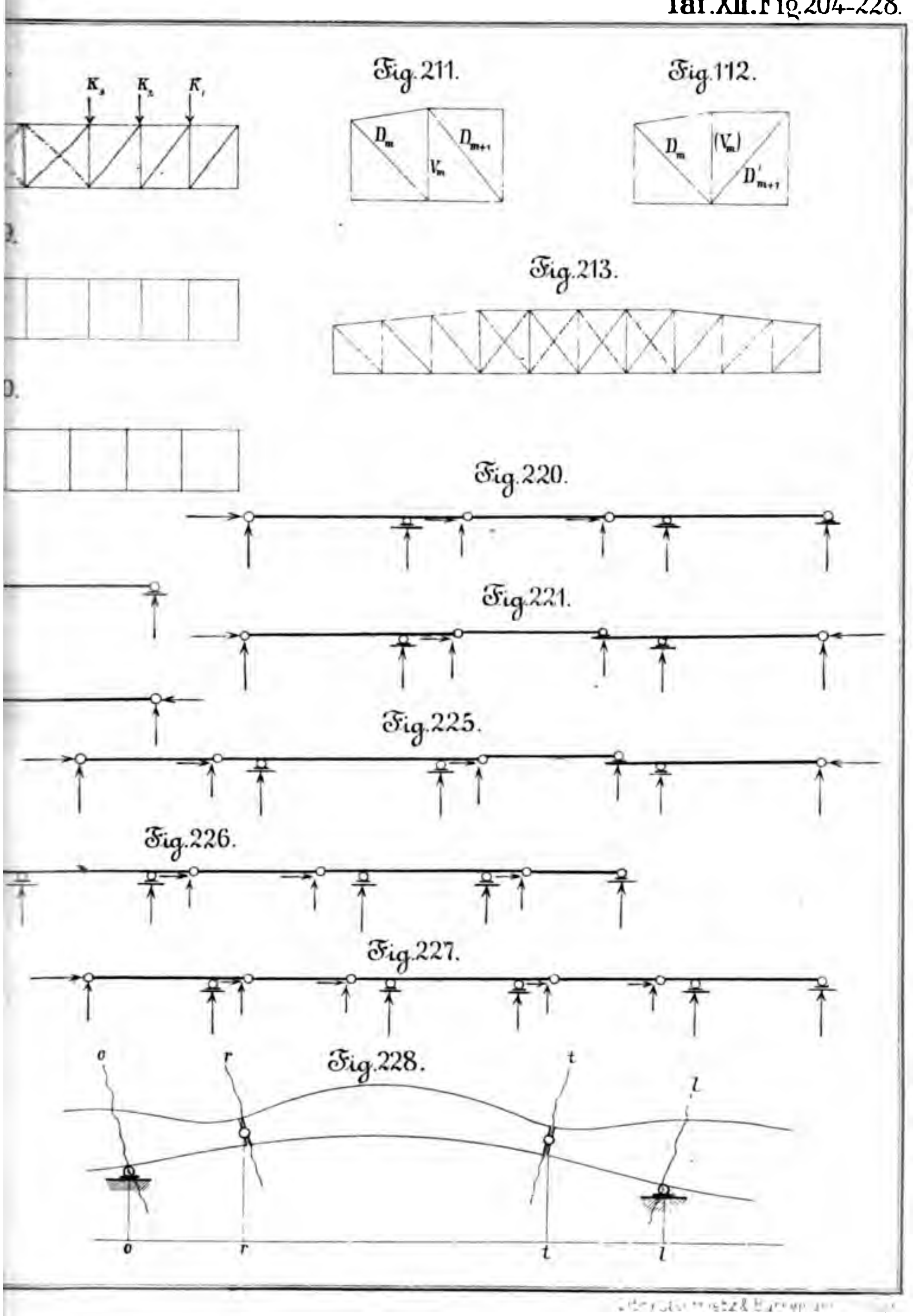


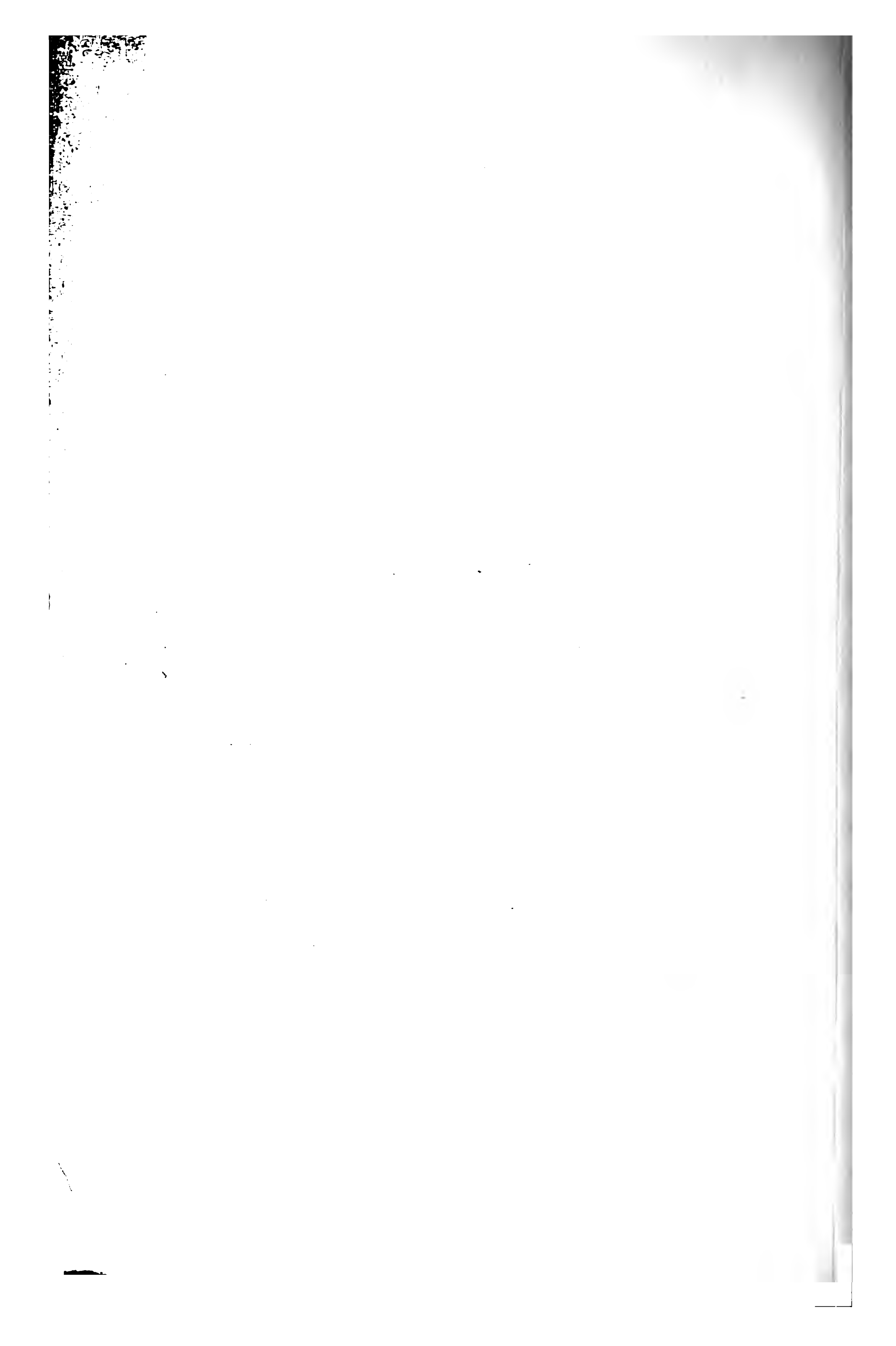


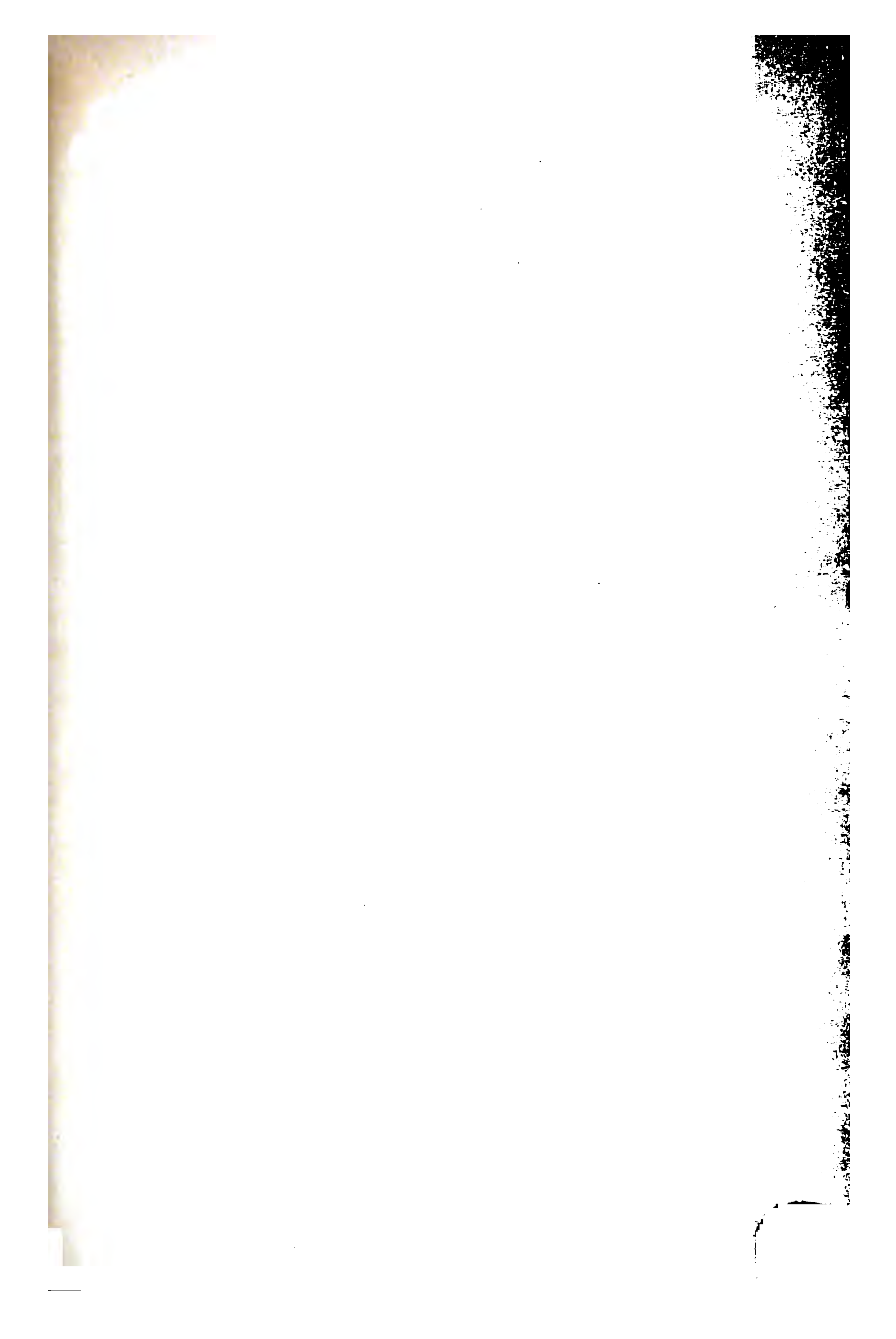


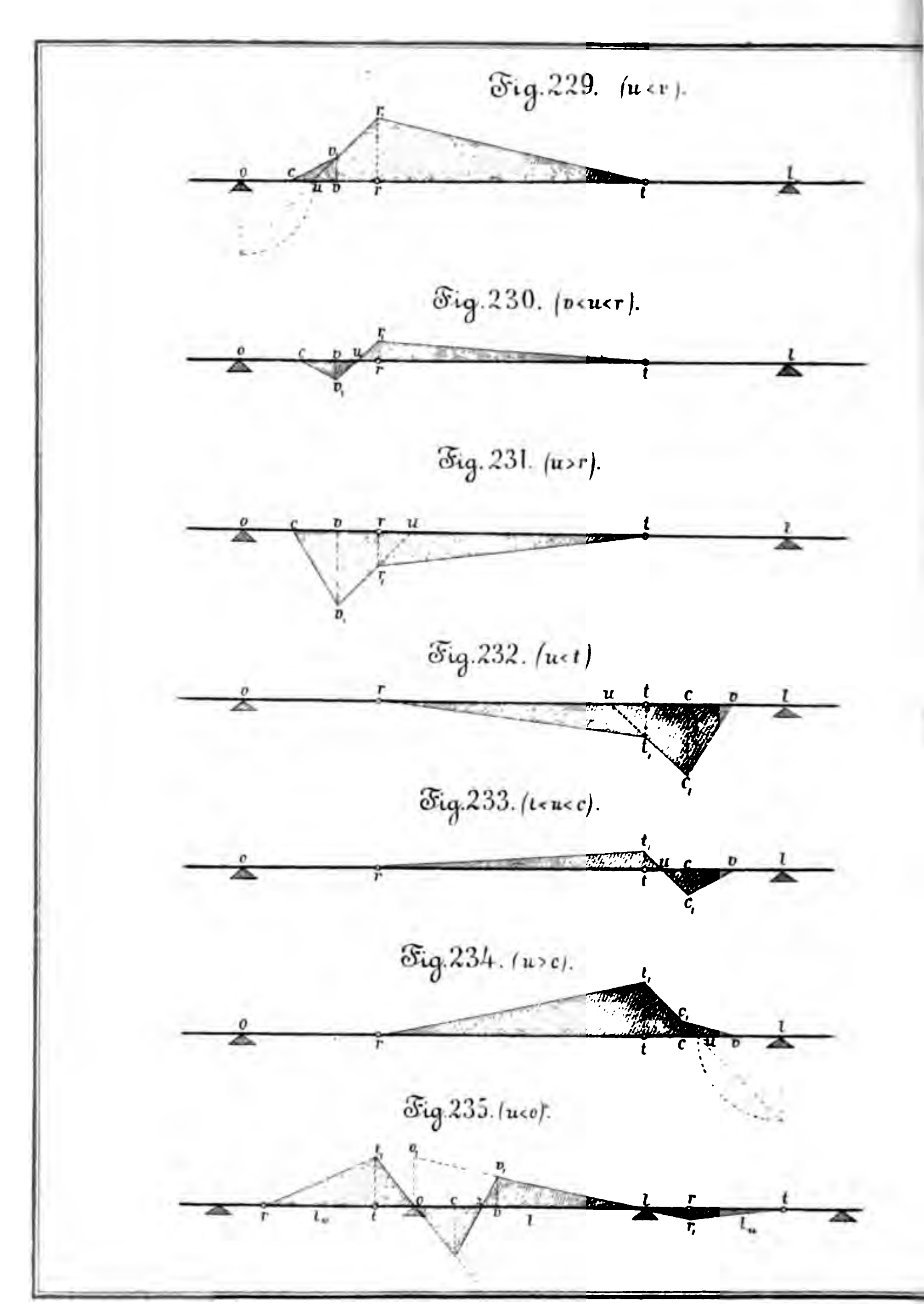


Weyrauch, Theorie.

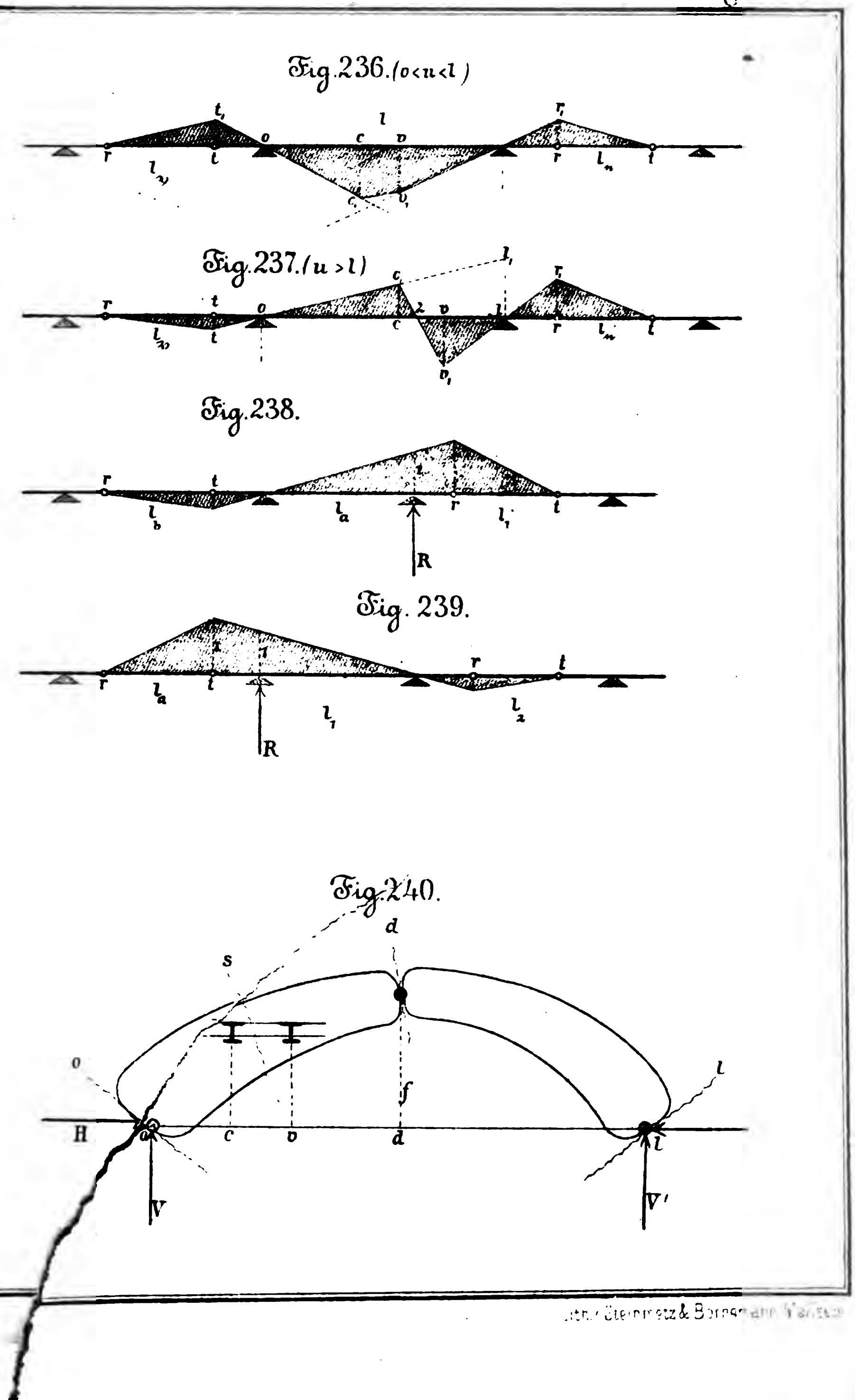

Fig. 211.
Fig. 112.
Fig. 213.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 225.
Fig. 226.
Fig. 227.
Fig. 228.



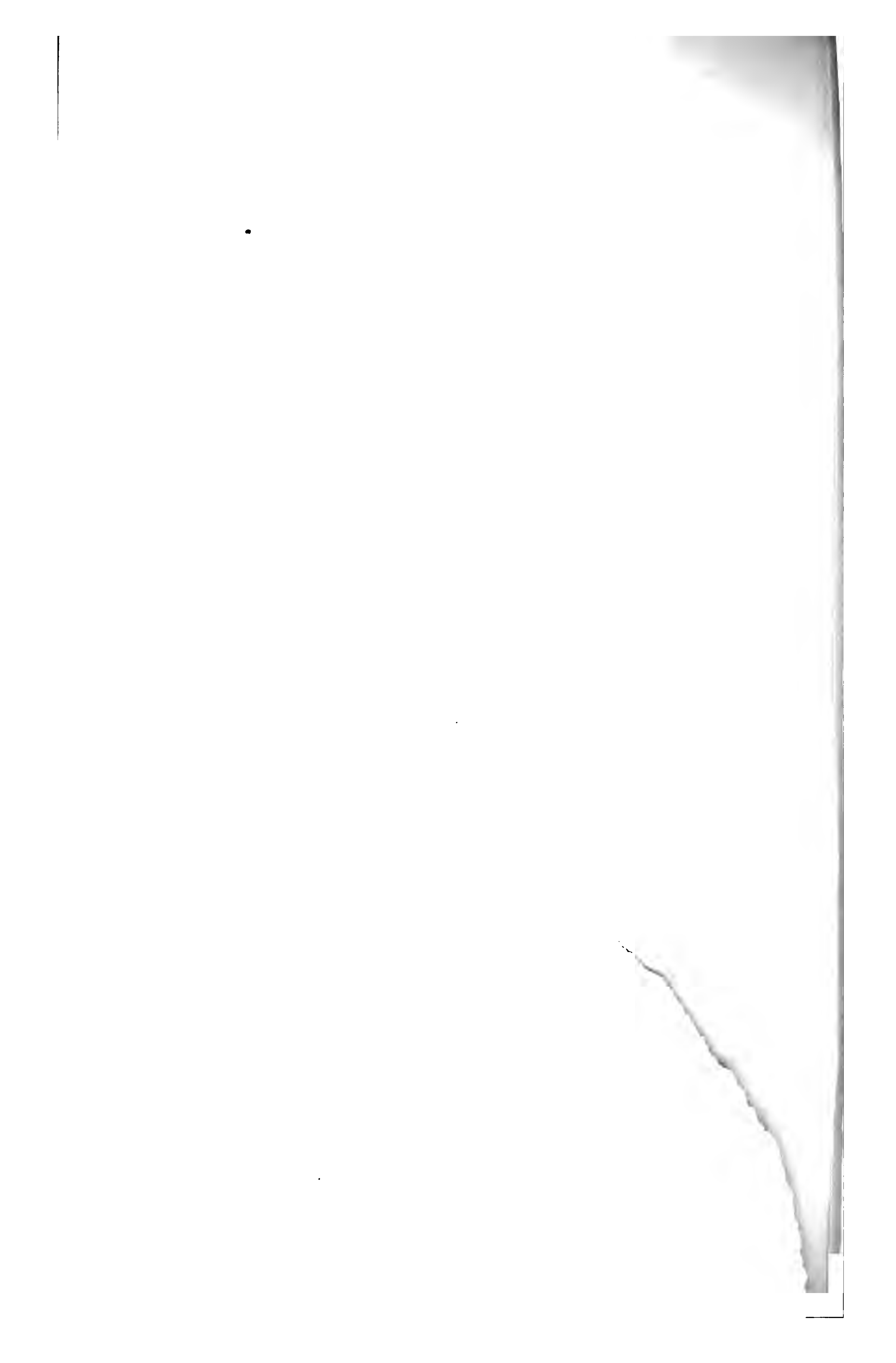


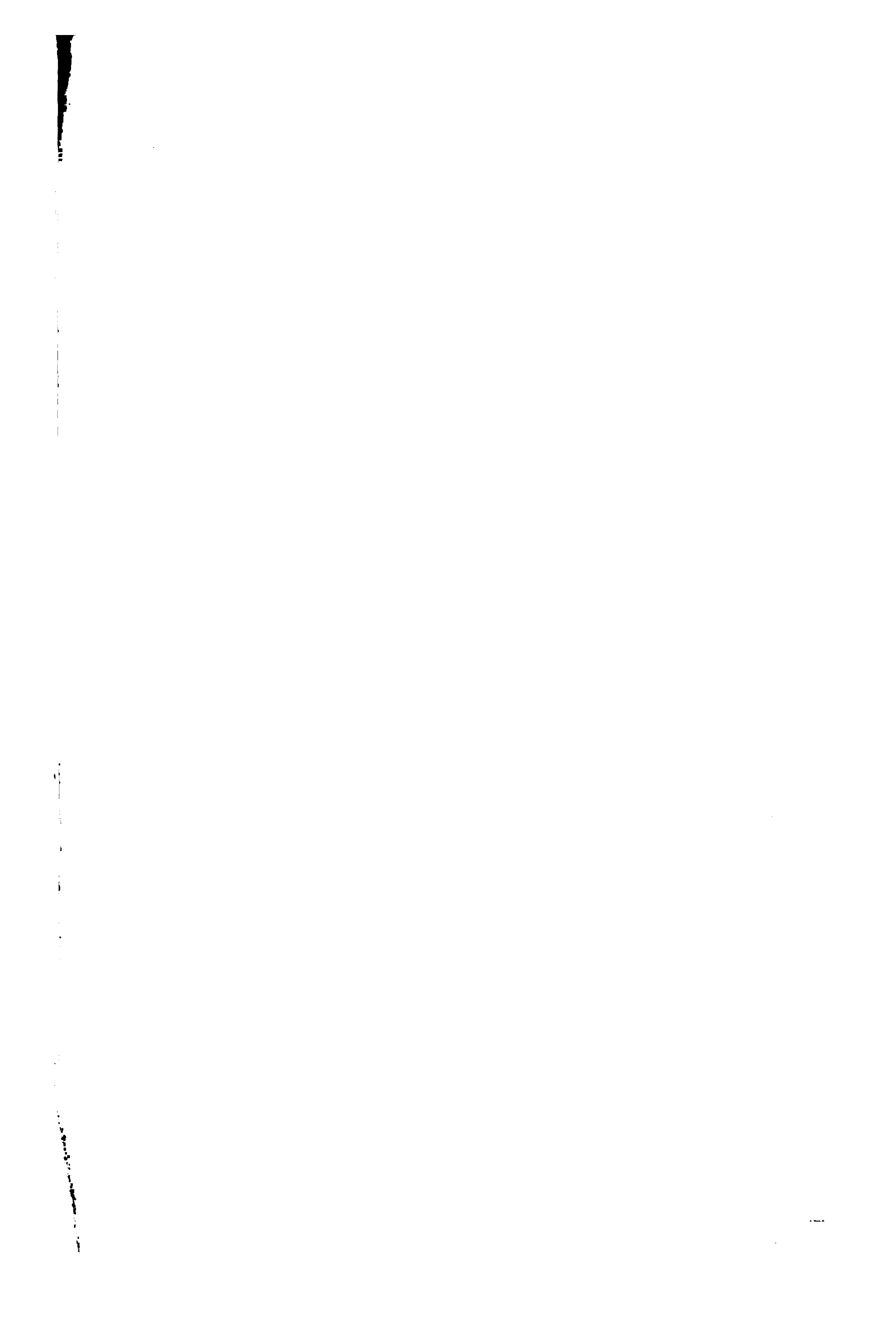


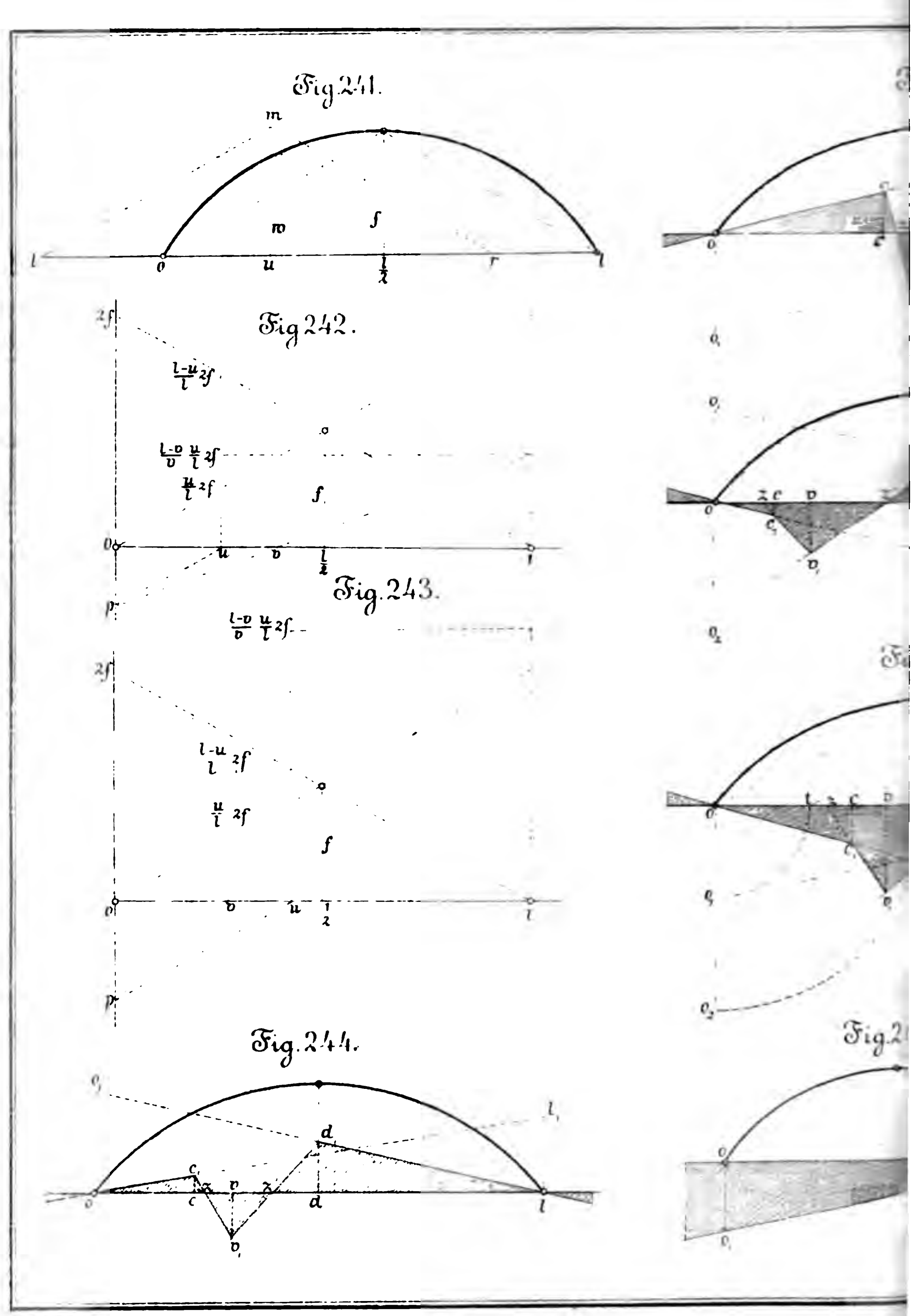
Weyrauch. Theorie.

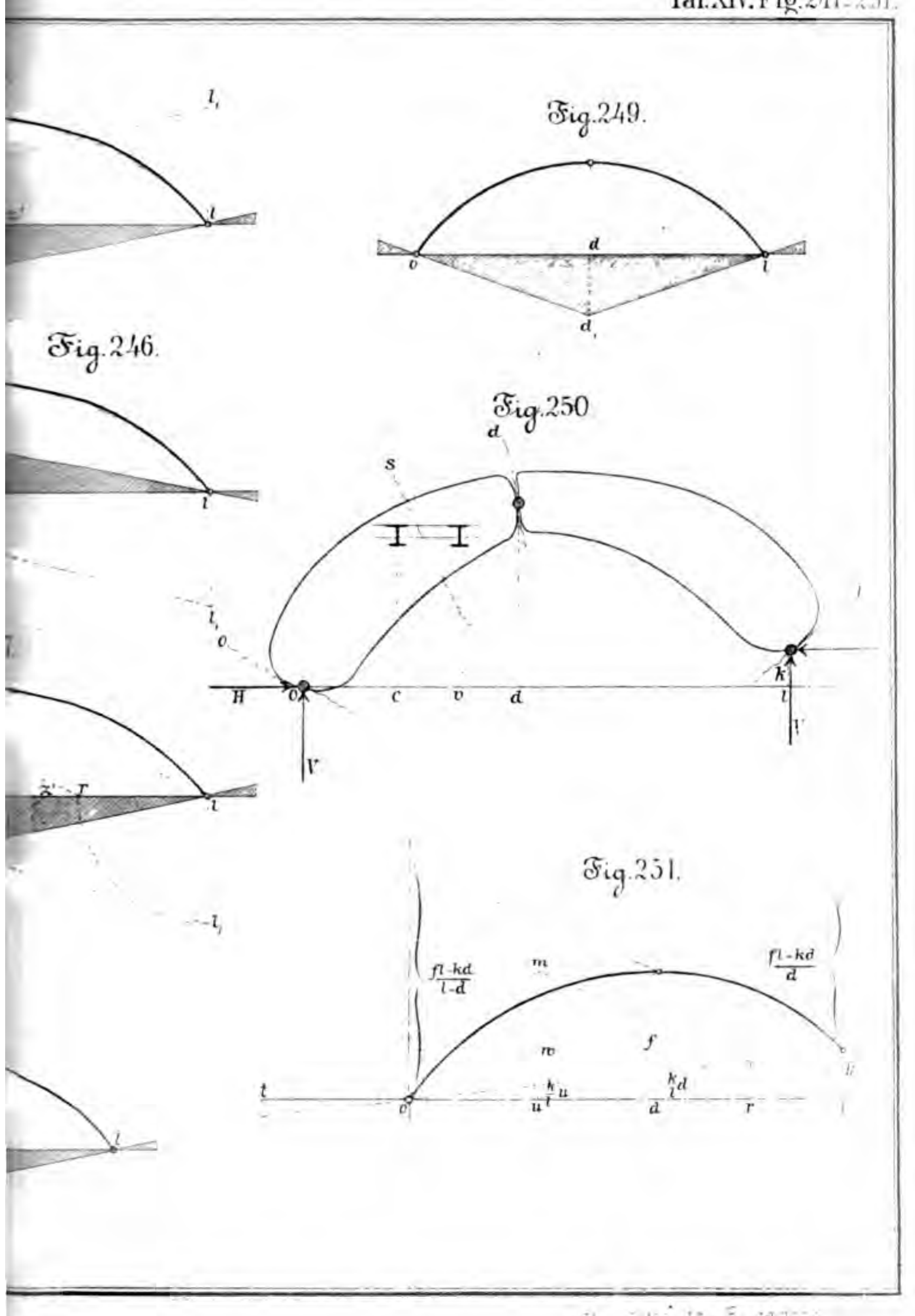


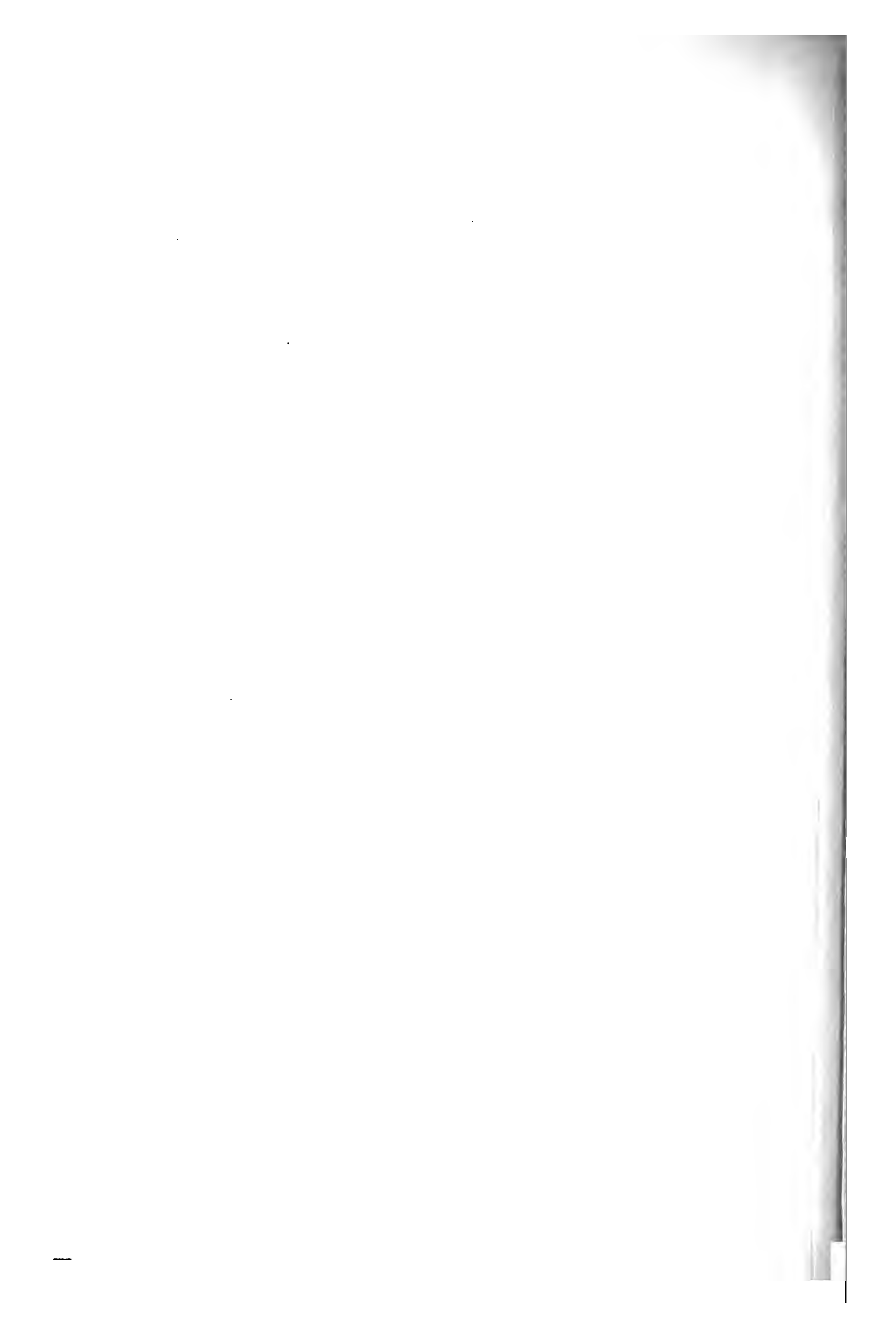
Lith. v. Steinmetz & Bornemann Warschau

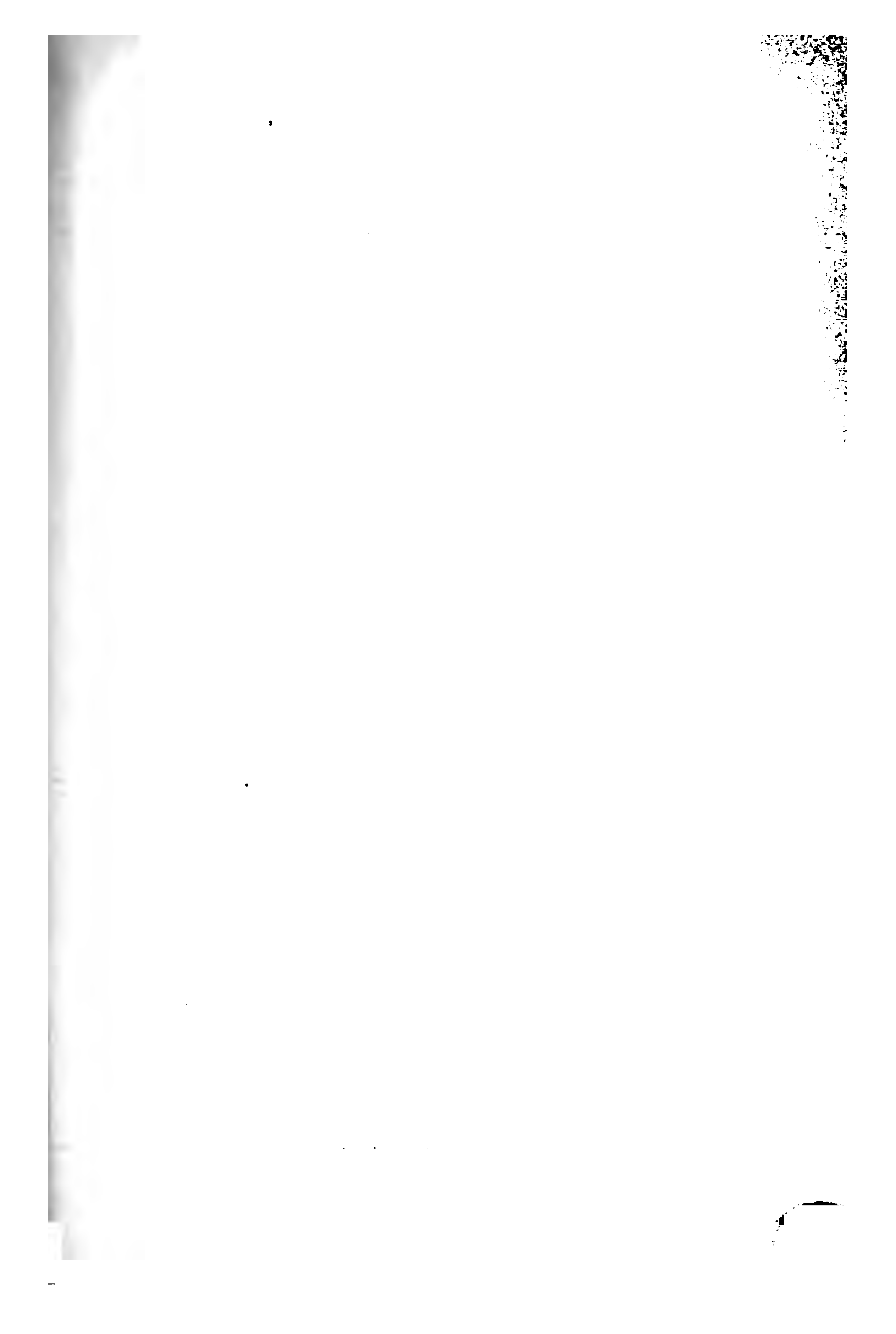


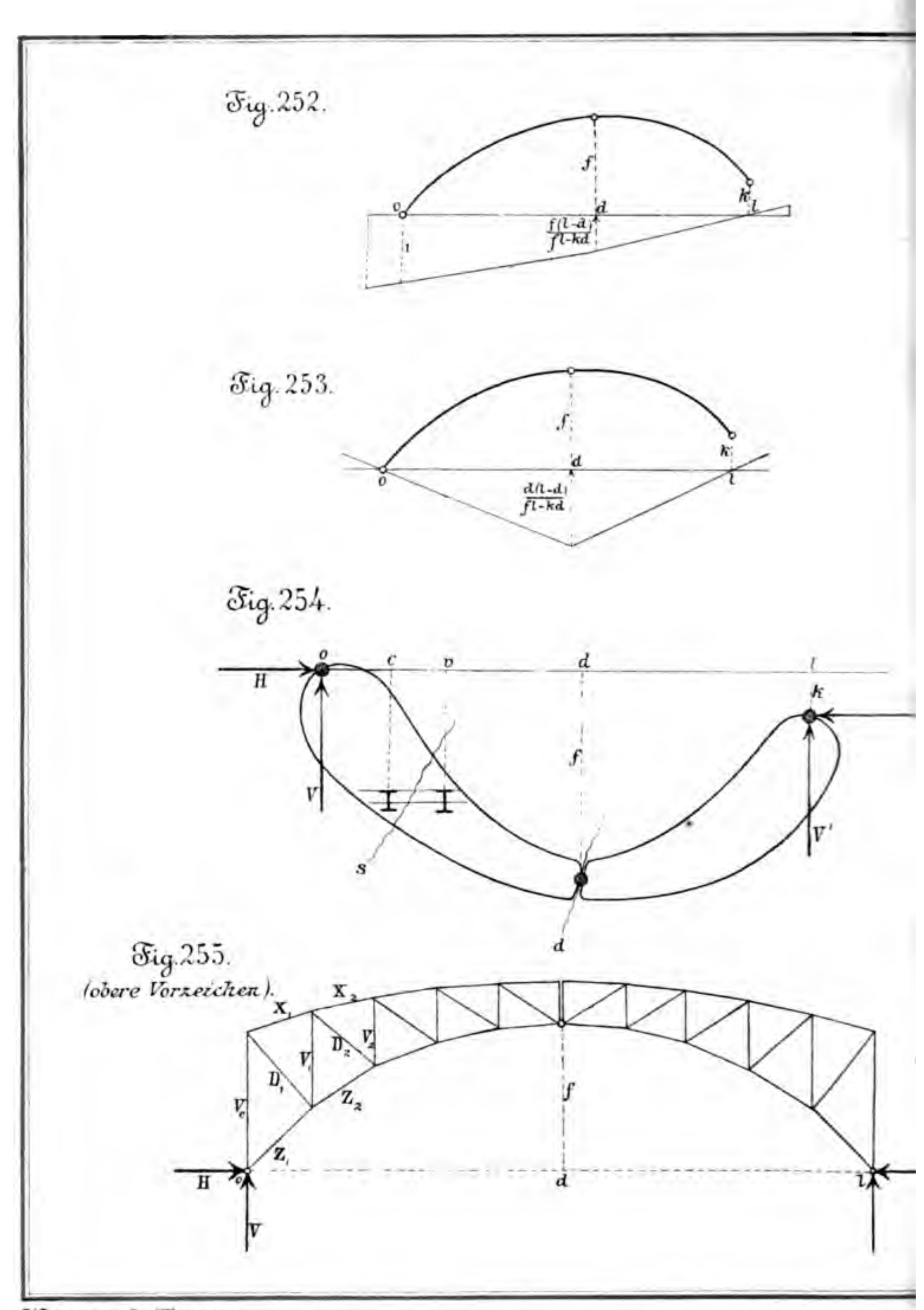


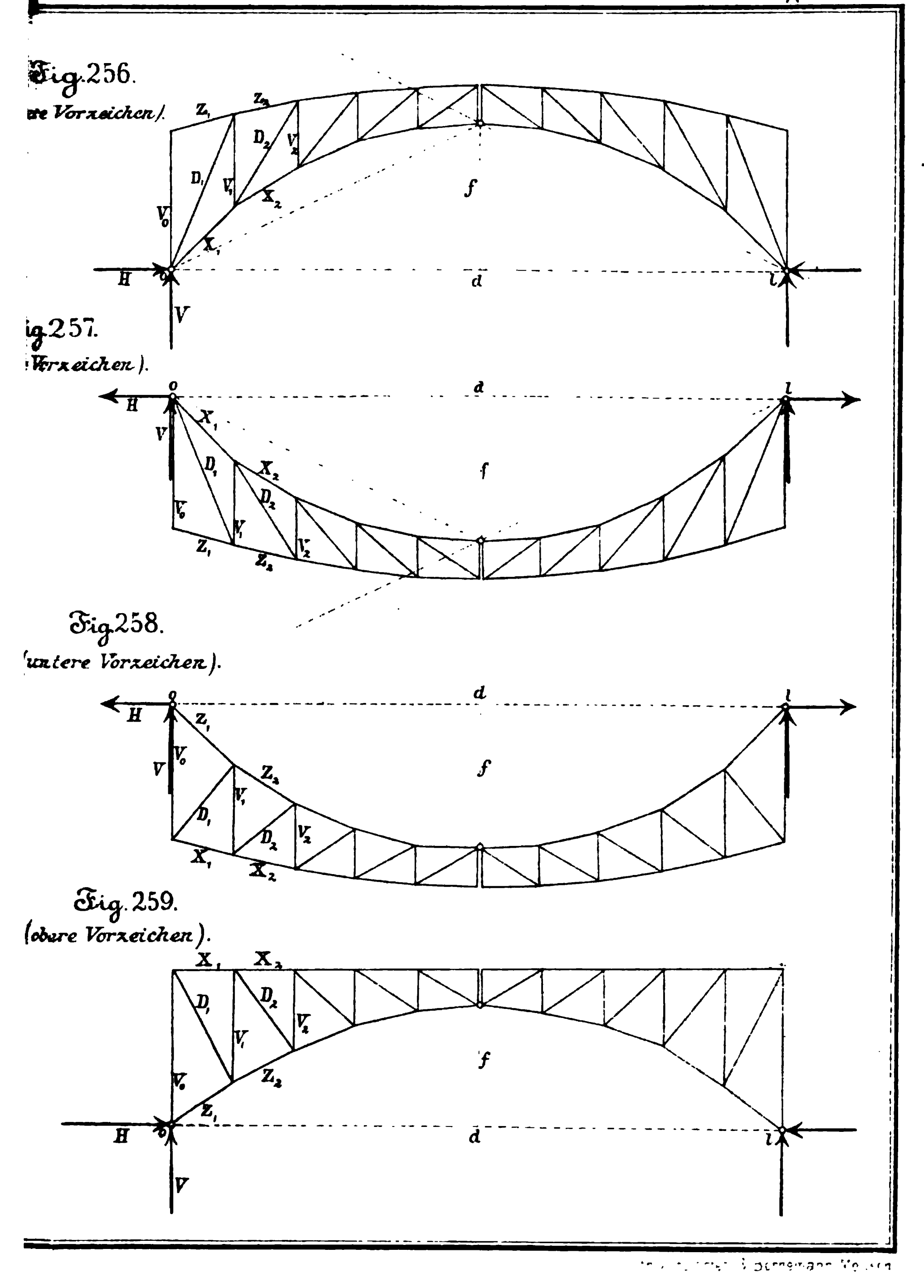

Fig. 241.
Fig. 242.
Fig. 243.
Fig. 244.

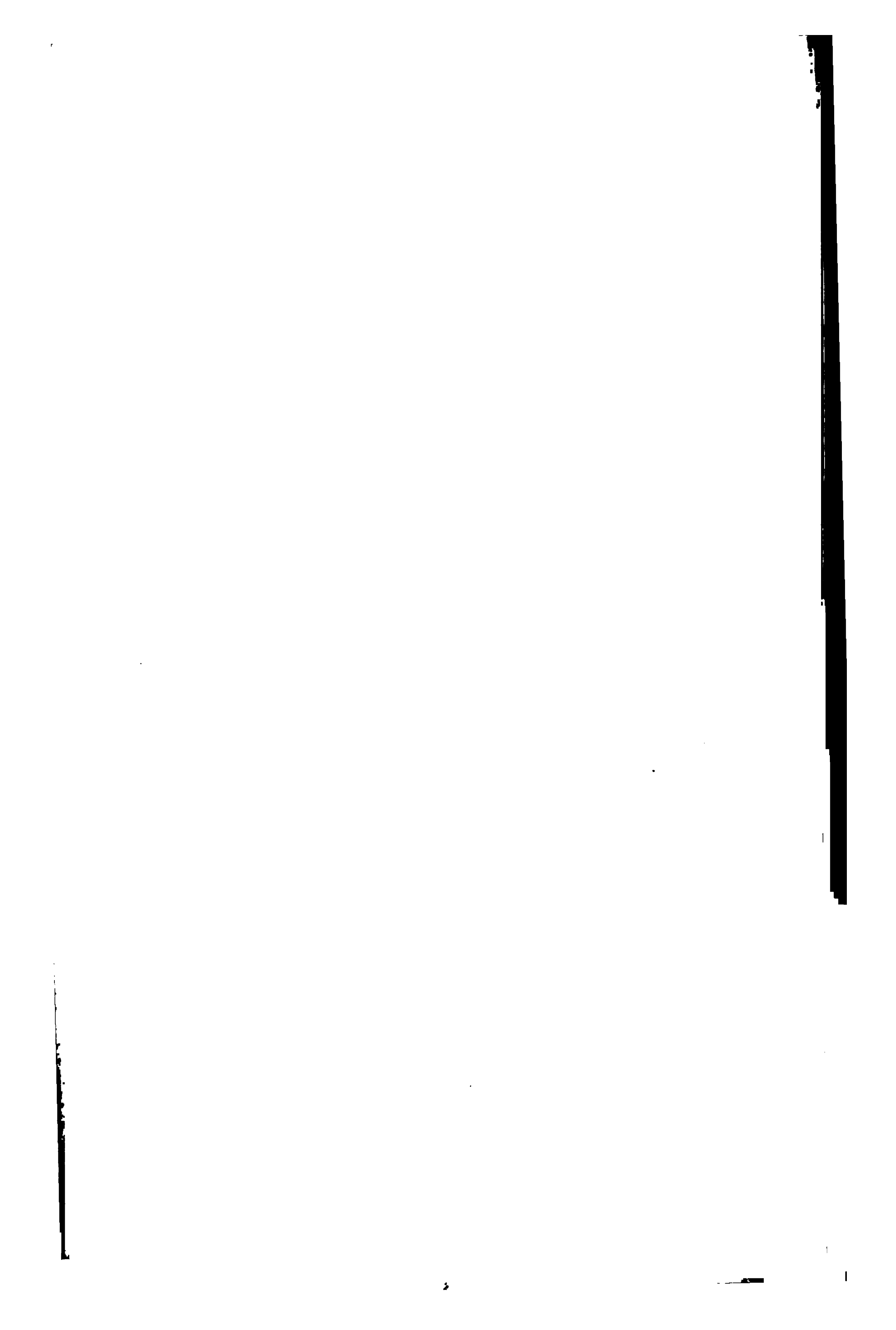

Fig. 249.
Fig. 246.
Fig. 250
Fig. 251.
fl-kd
l-d
fl-kd
d



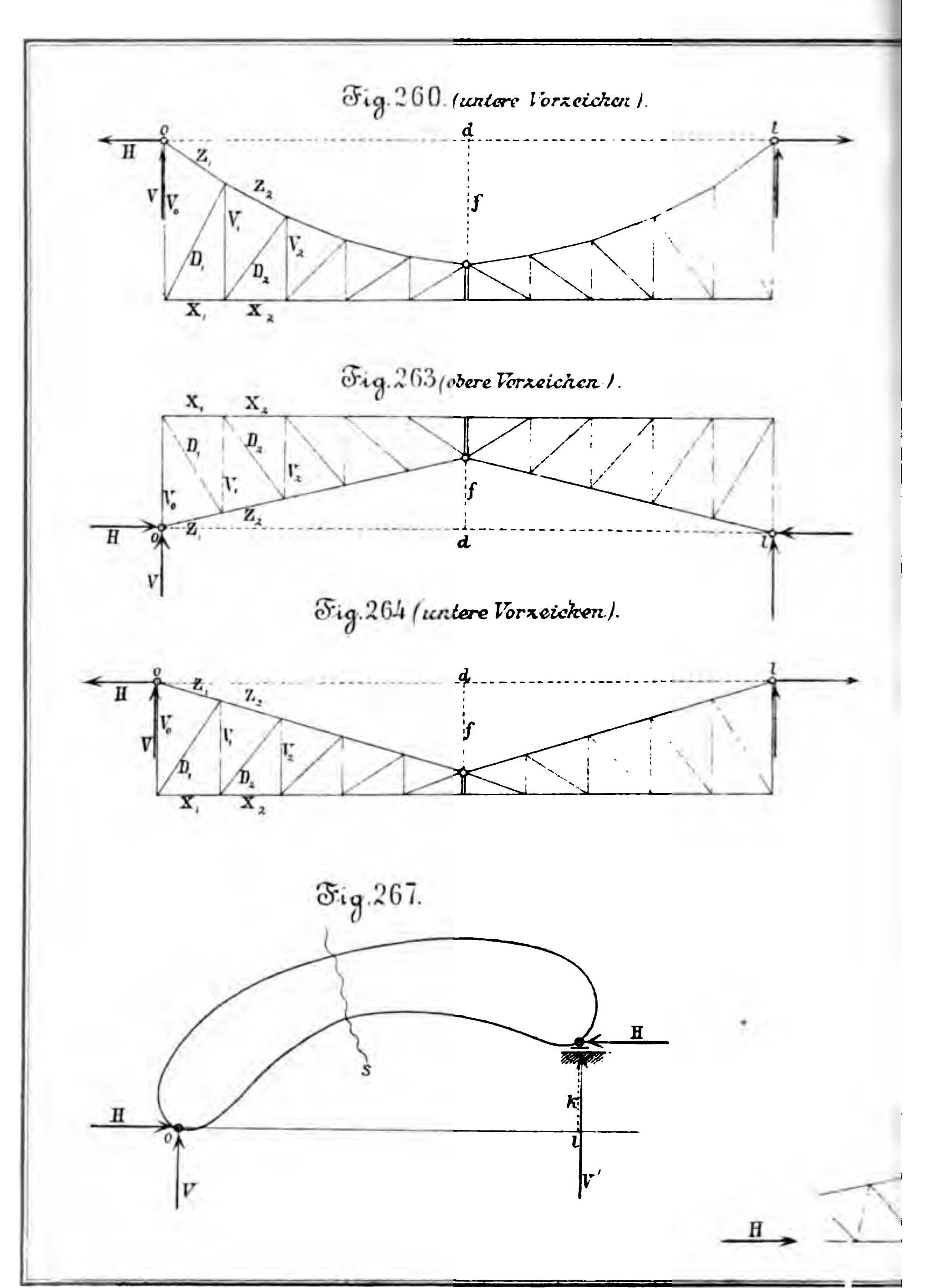



Fig. 252.
f
o
d
k
l
f(l-d)
fl-kd
1
Fig. 253.
f
d
k
o
l
d(l-d)
fl-kd
Fig. 254.
H
o
c
v
d
l
k
f
V
V'
s
d
Fig. 255.
(obere Vorzeichen).
X₁
X₂
V₁
D₂
V₂
D₁
V₀
Z₂
Z₁
f
H
o
d
l
V


Fig. 256.
Vorzeichen).
Z1
Z2
D1
D2
V0
V1
V2
X1
X2
H
V
f
d
o
l
ig. 257.
Vorzeichen).
Fig. 258.
(untere Vorzeichen).
Fig. 259.
(obere Vorzeichen).







Weyrauch, Theorie.

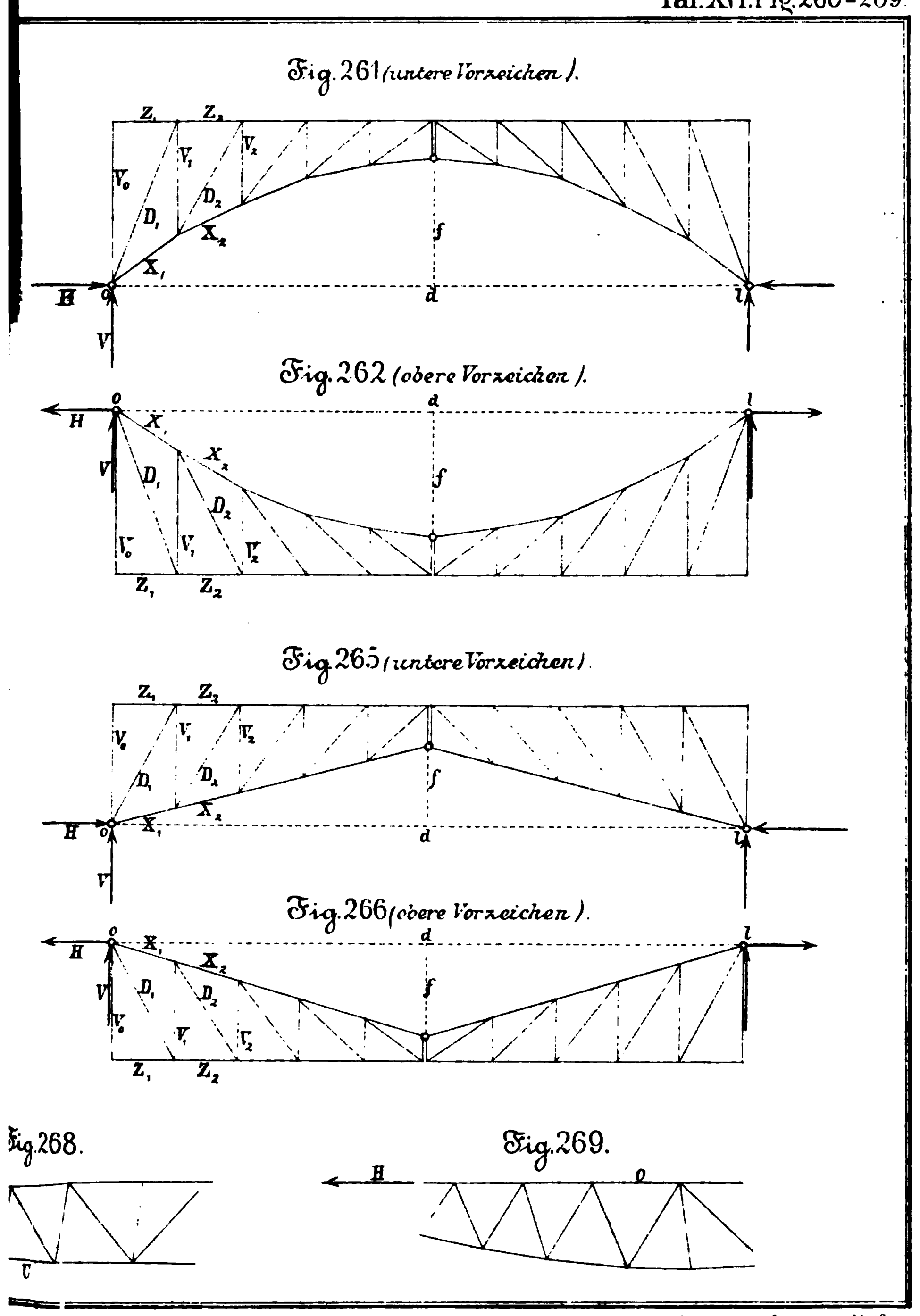


Fig. 261 (untere Vorzeichen).

Fig. 262 (obere Vorzeichen).

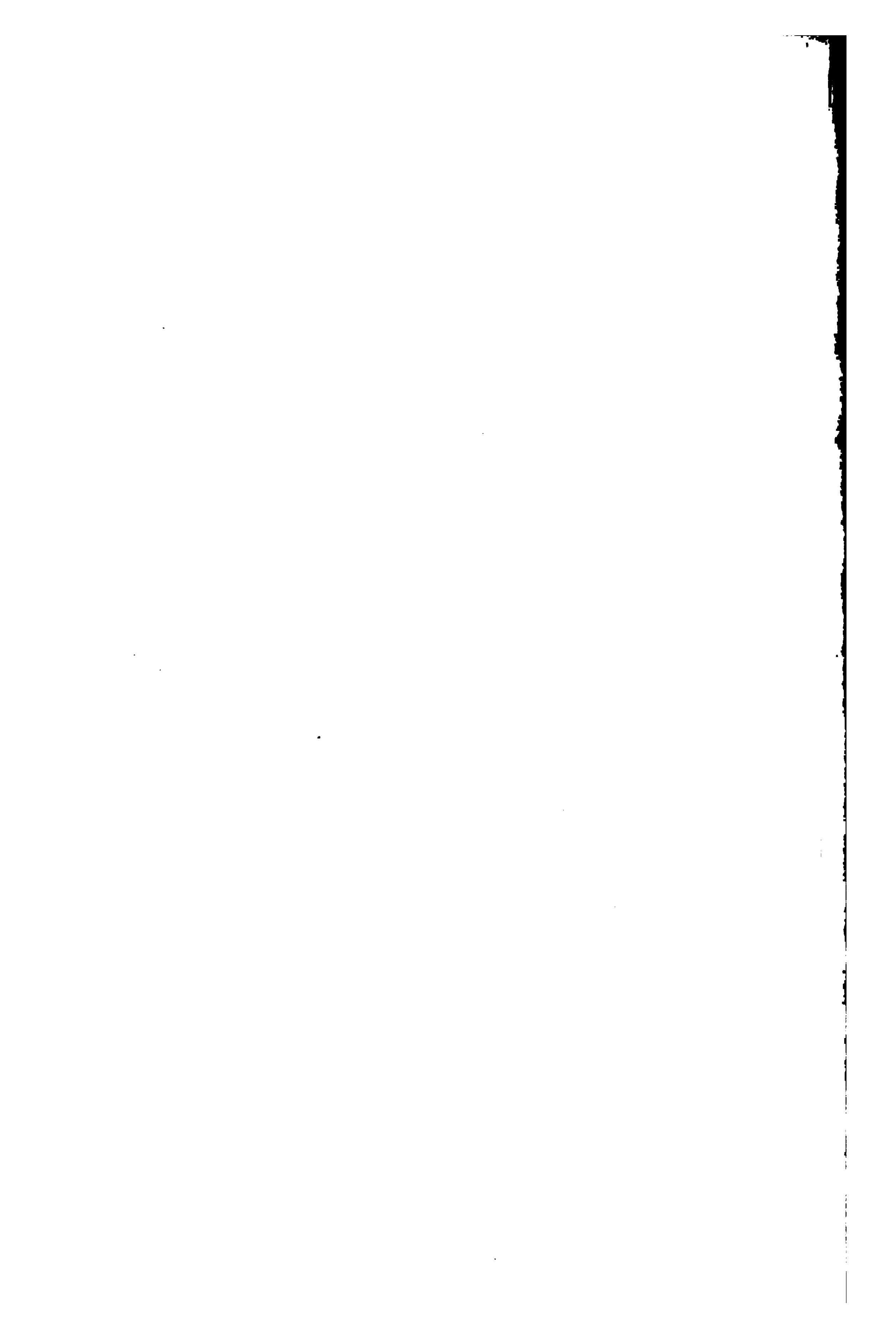
Fig. 265 (untere Vorzeichen).

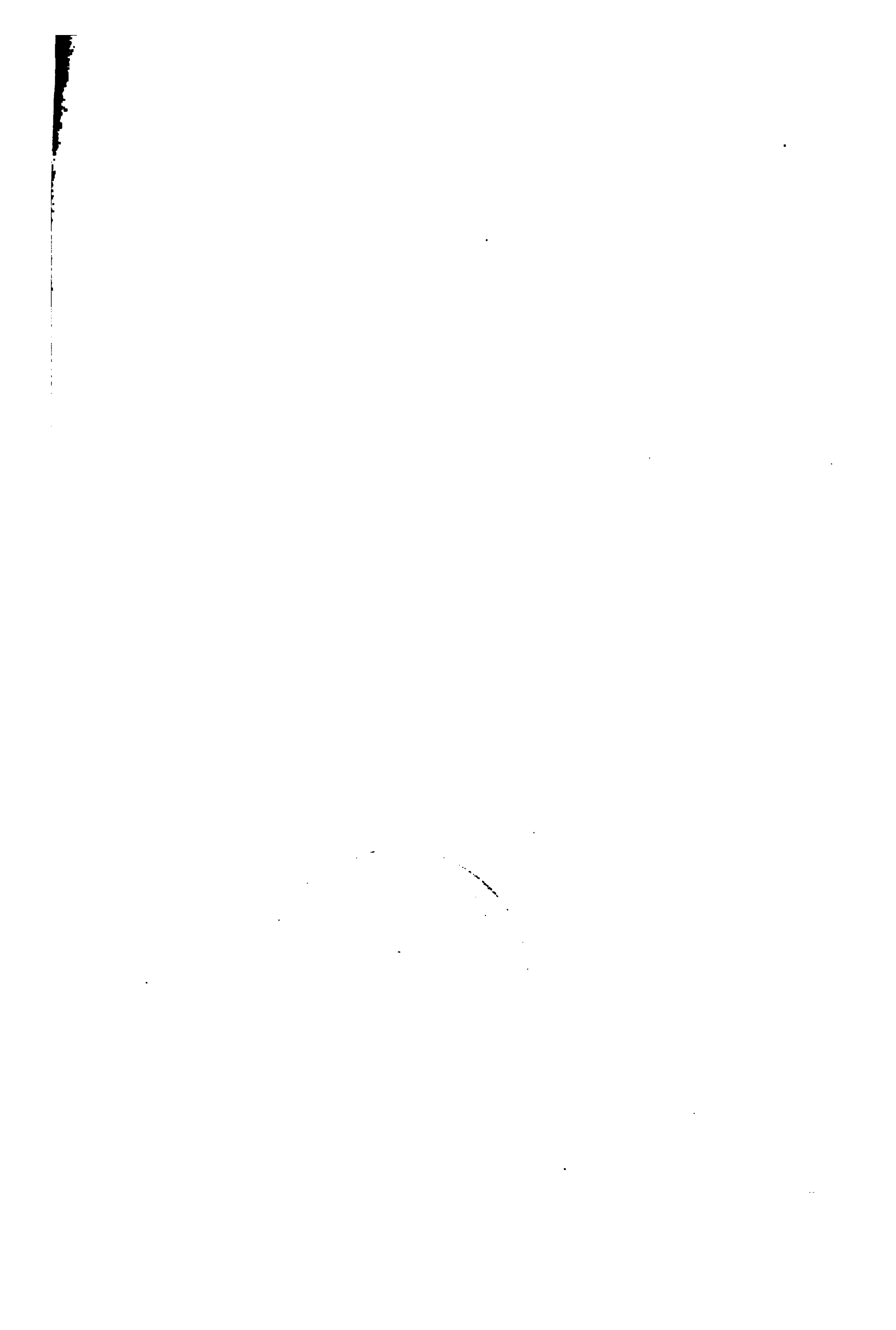
Fig. 266 (obere Vorzeichen).

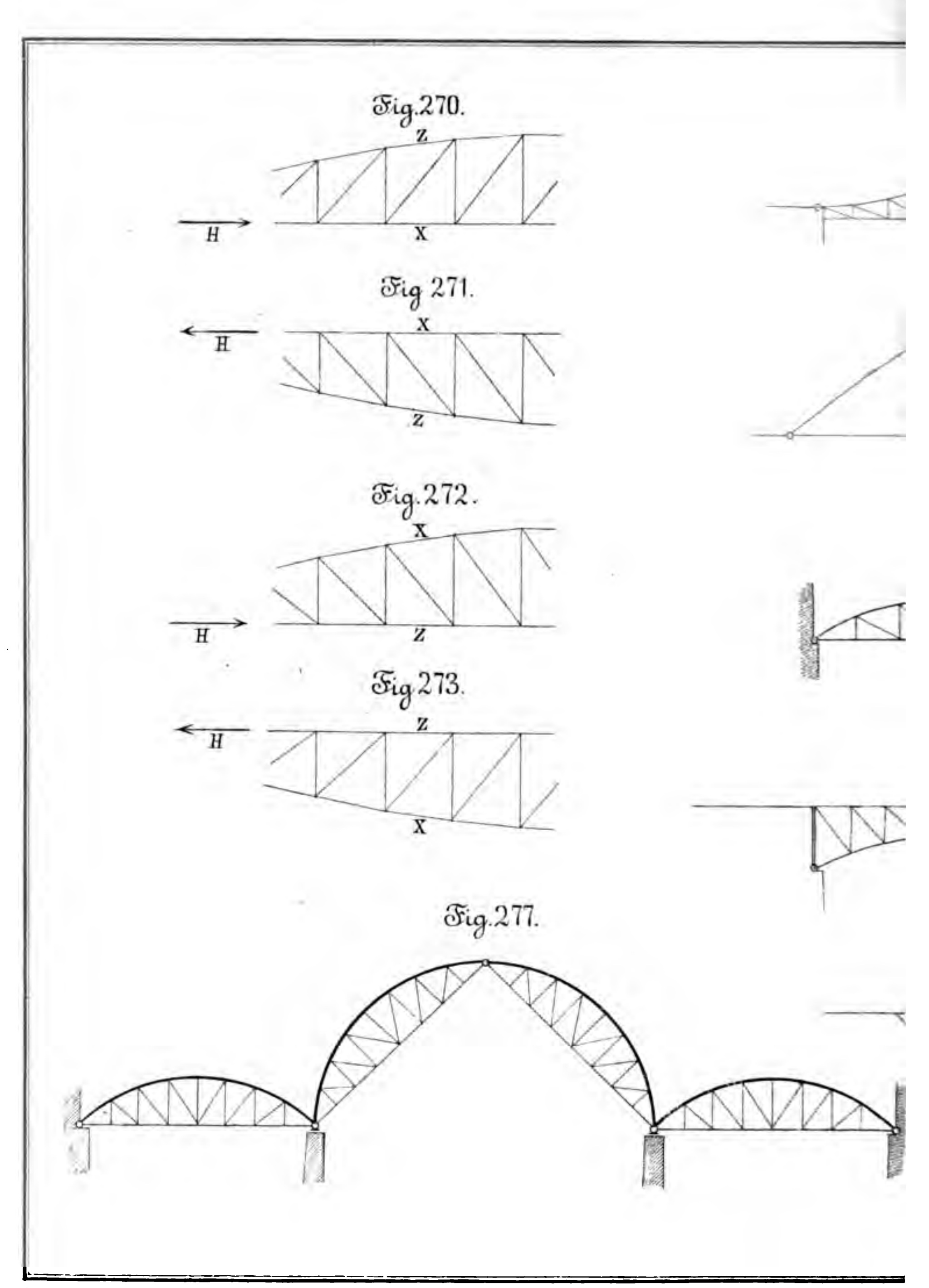
Fig. 268.

Fig. 269.

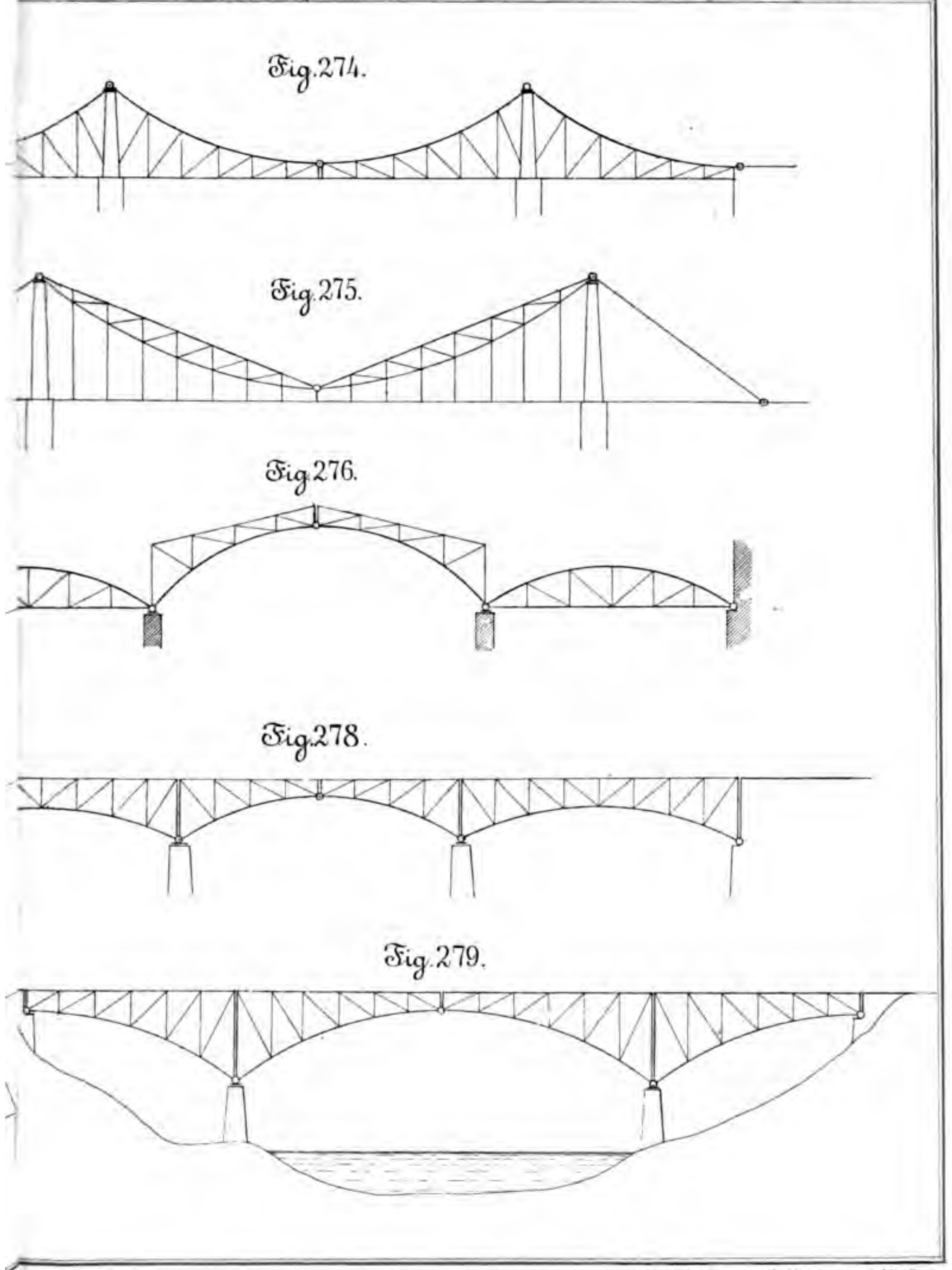
Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meißen.



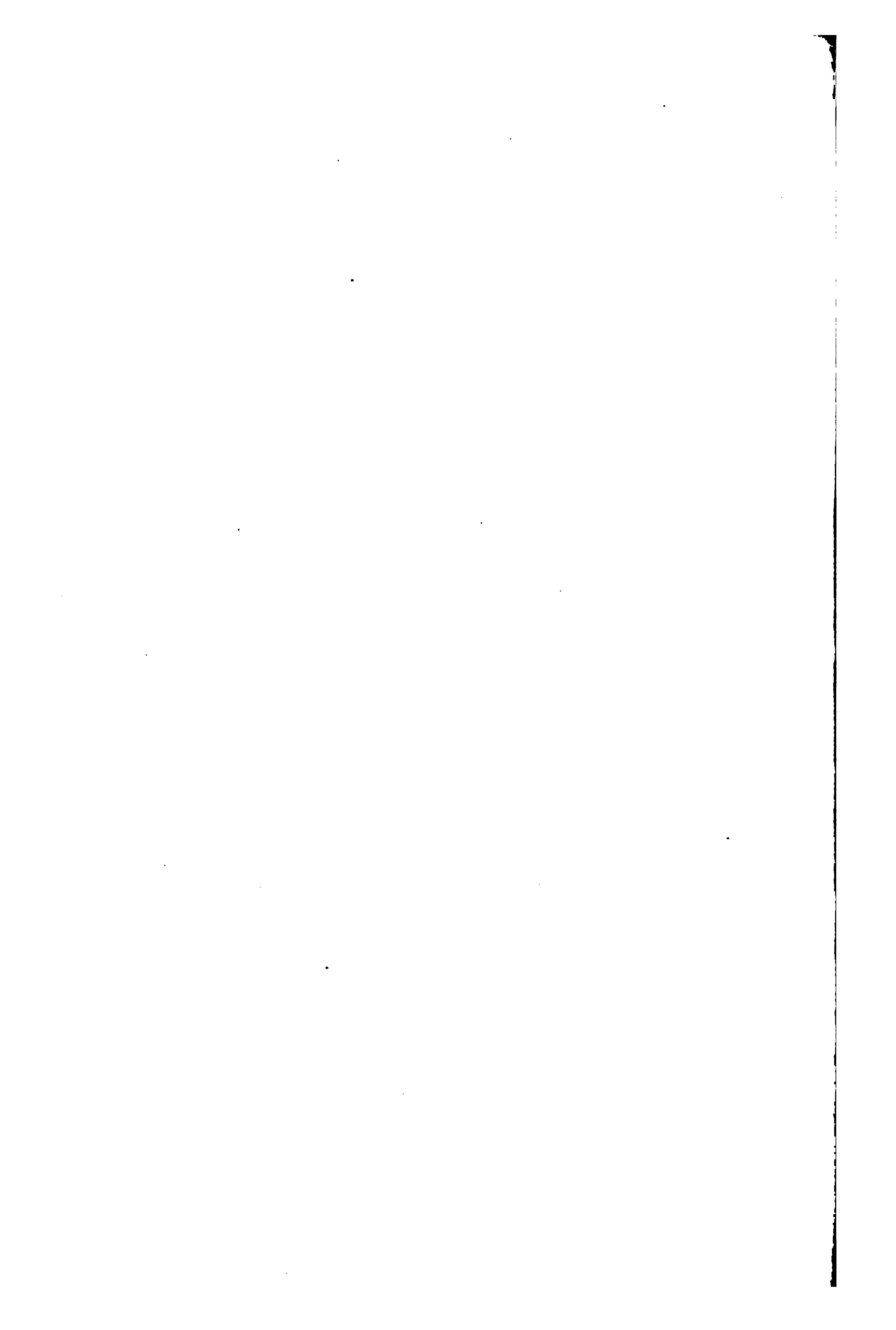




Weyrauch, Theorie.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann Meißen



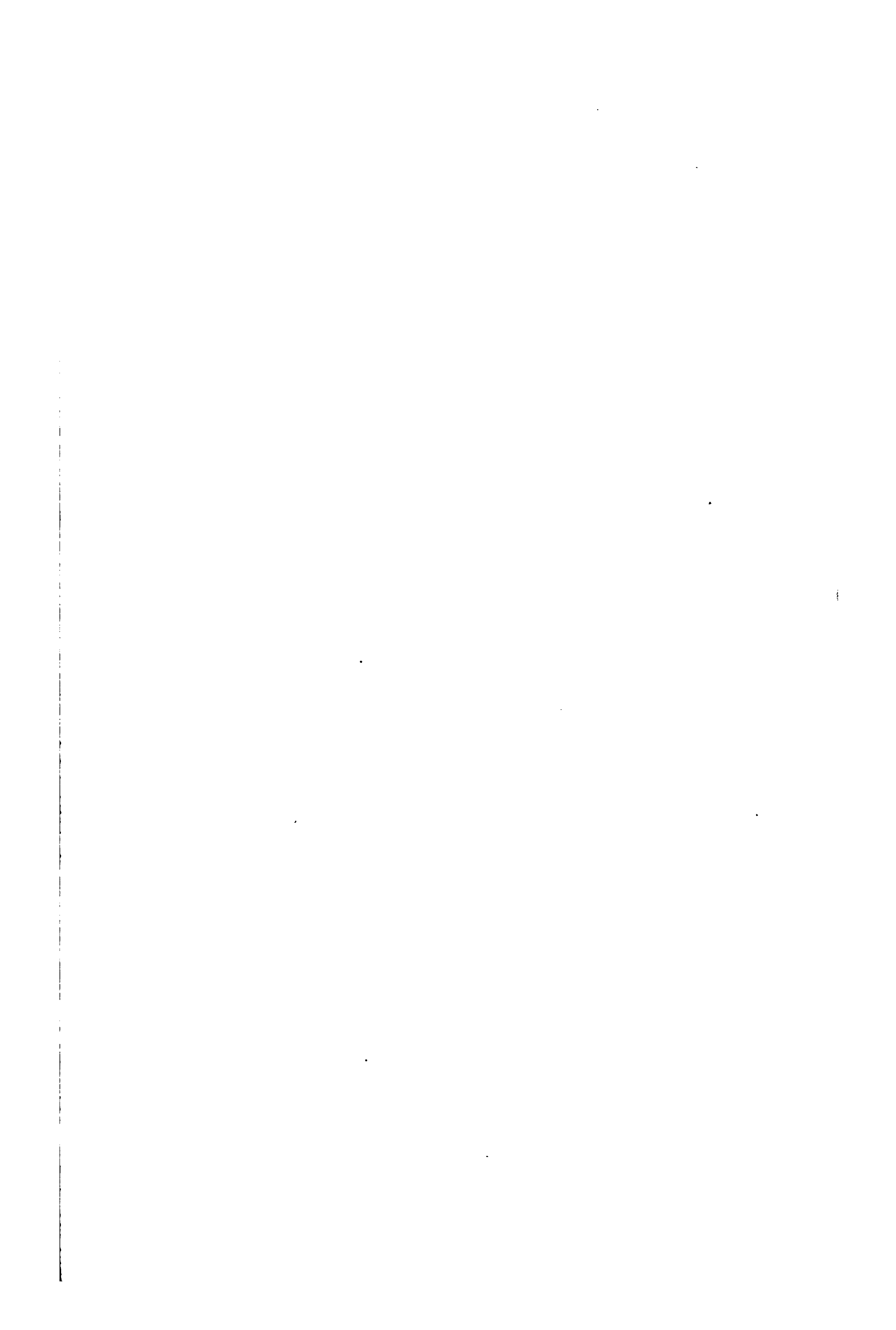


Fig. 280.

Fig. 2[illegible]

Fig. 284.

Fig. 281.

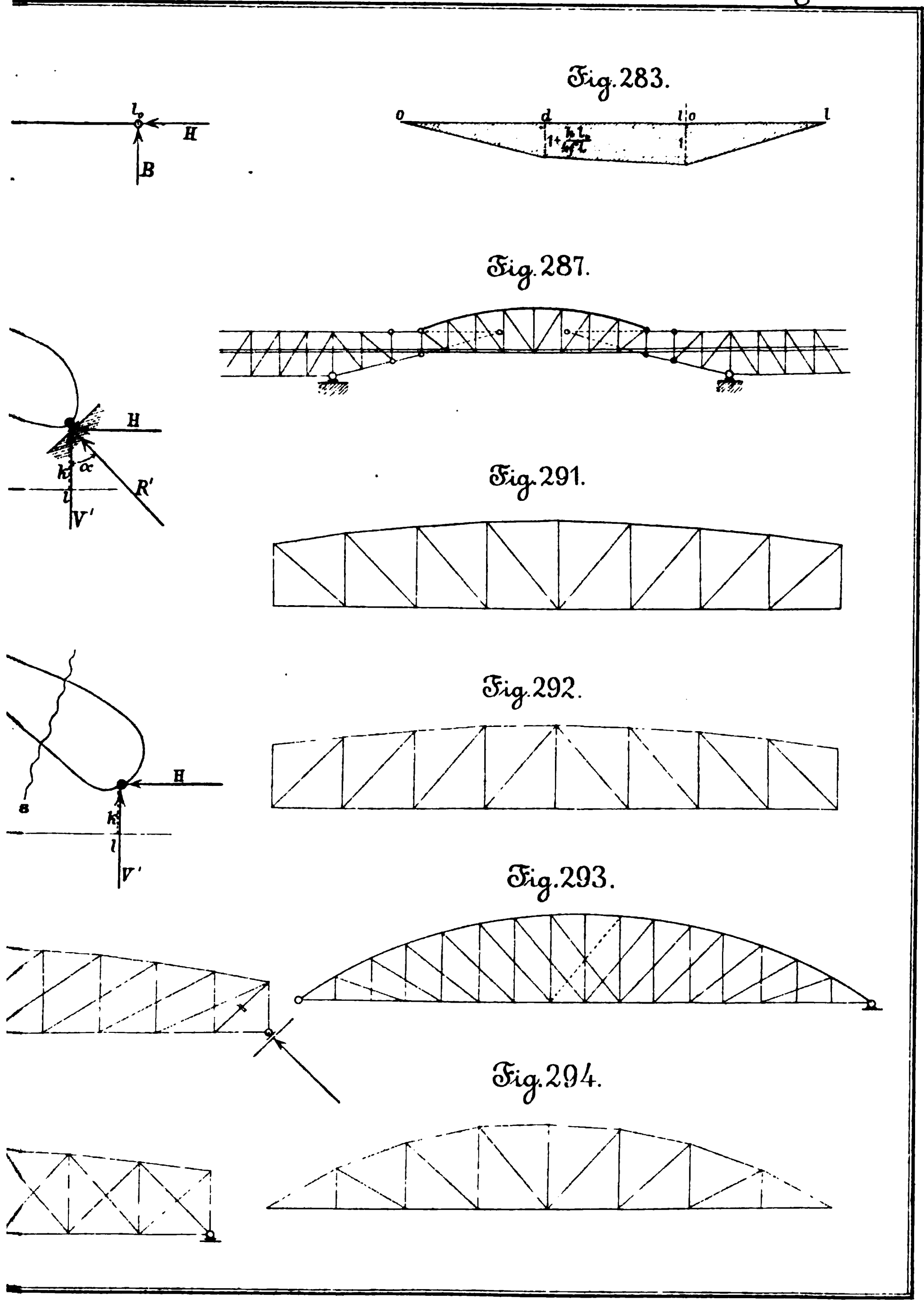
Fig. 288.

Fig. 285.

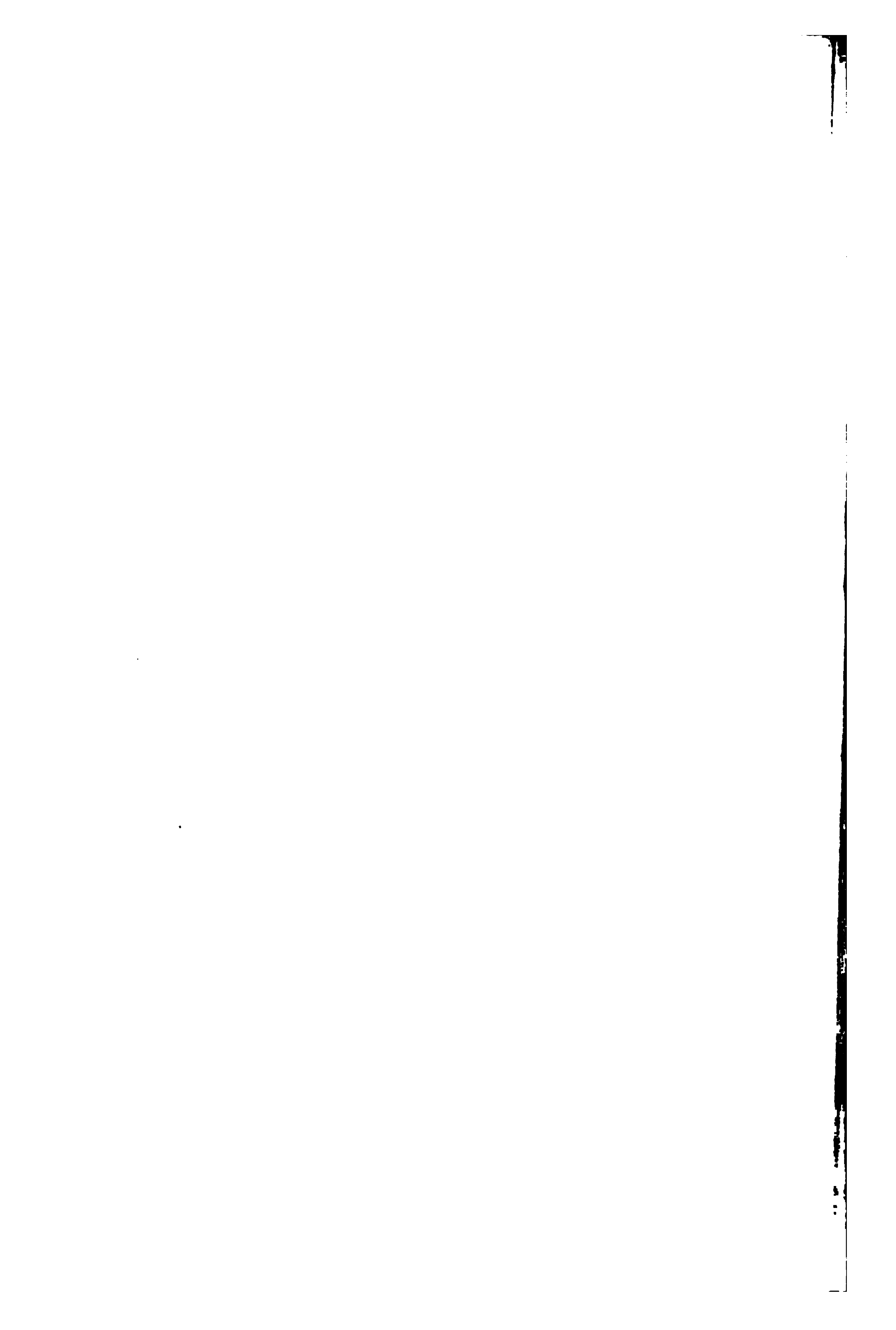
Fig. 286.

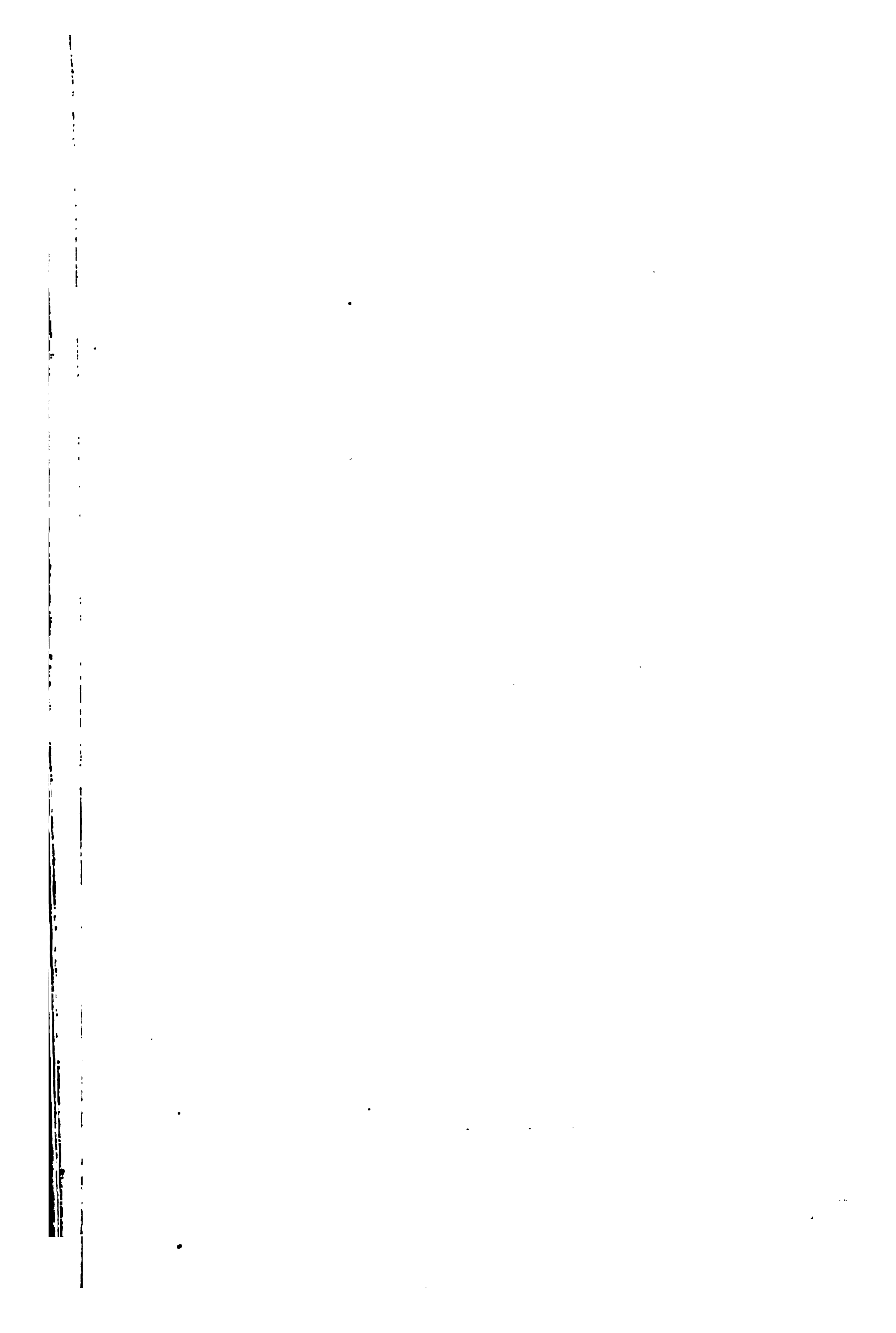
Fig. 289.

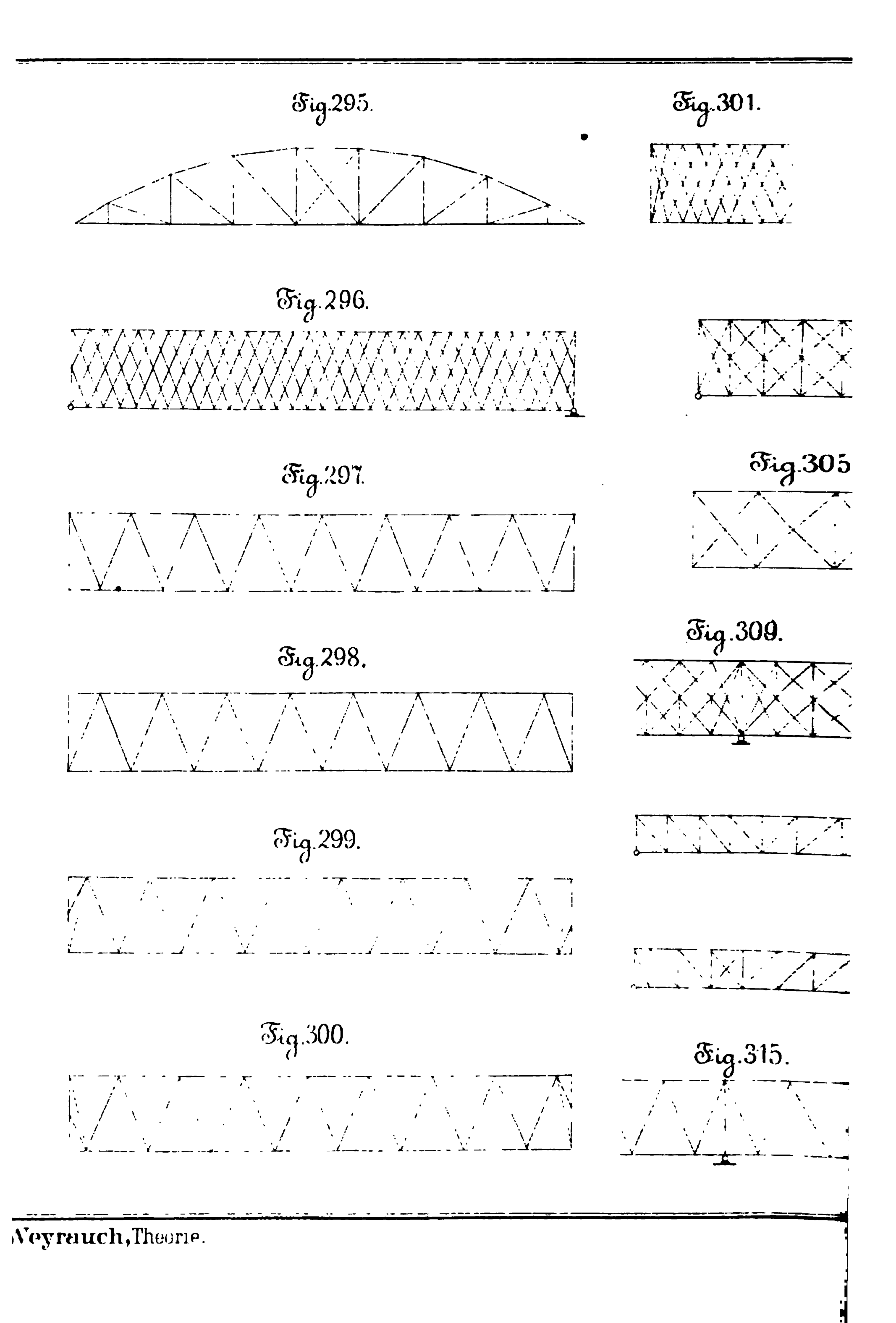
Fig. 290.



Lith. v. Steinmetz & Herremann Mc. Isen.







Weyrauch, Theorie.

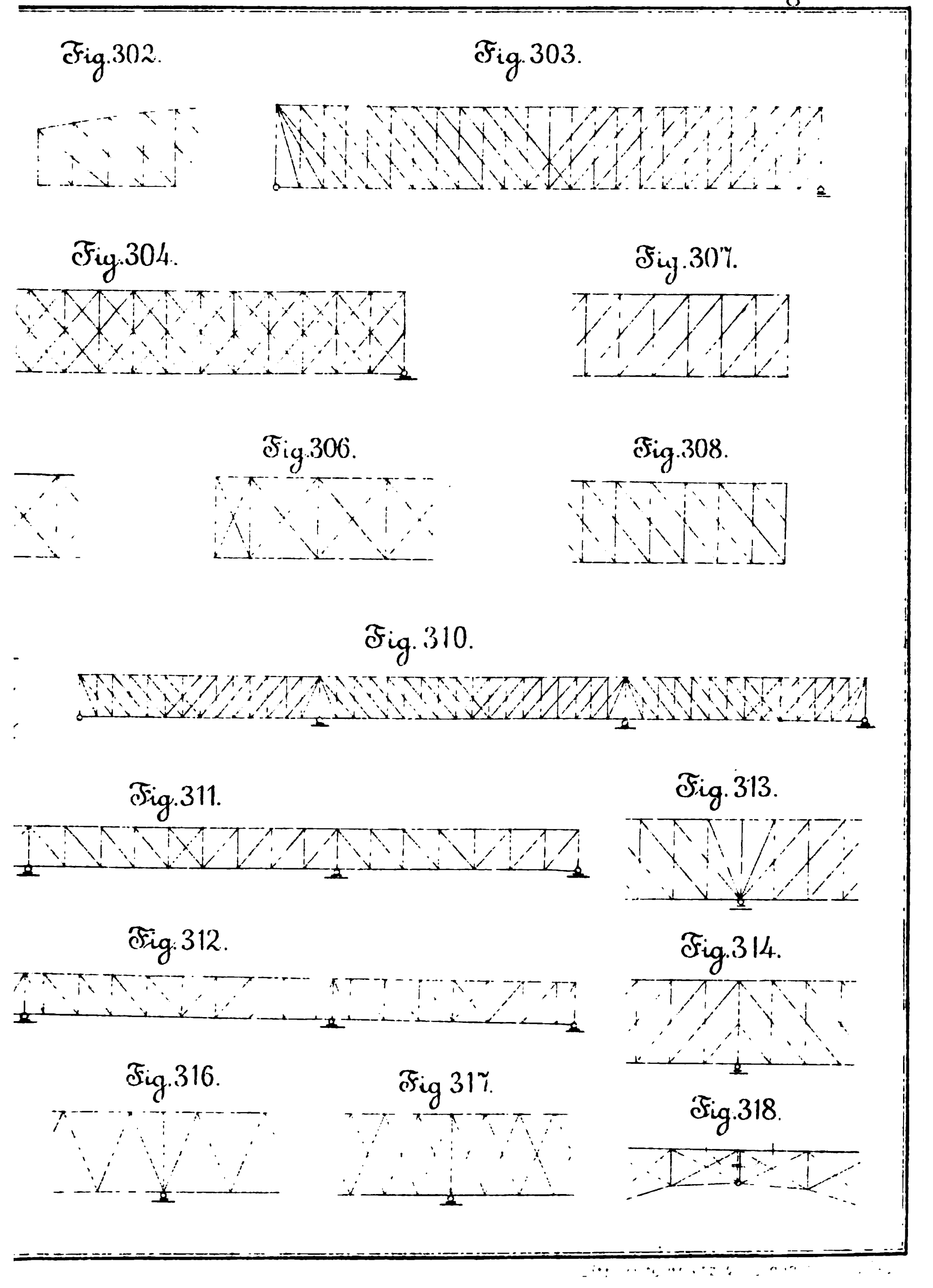
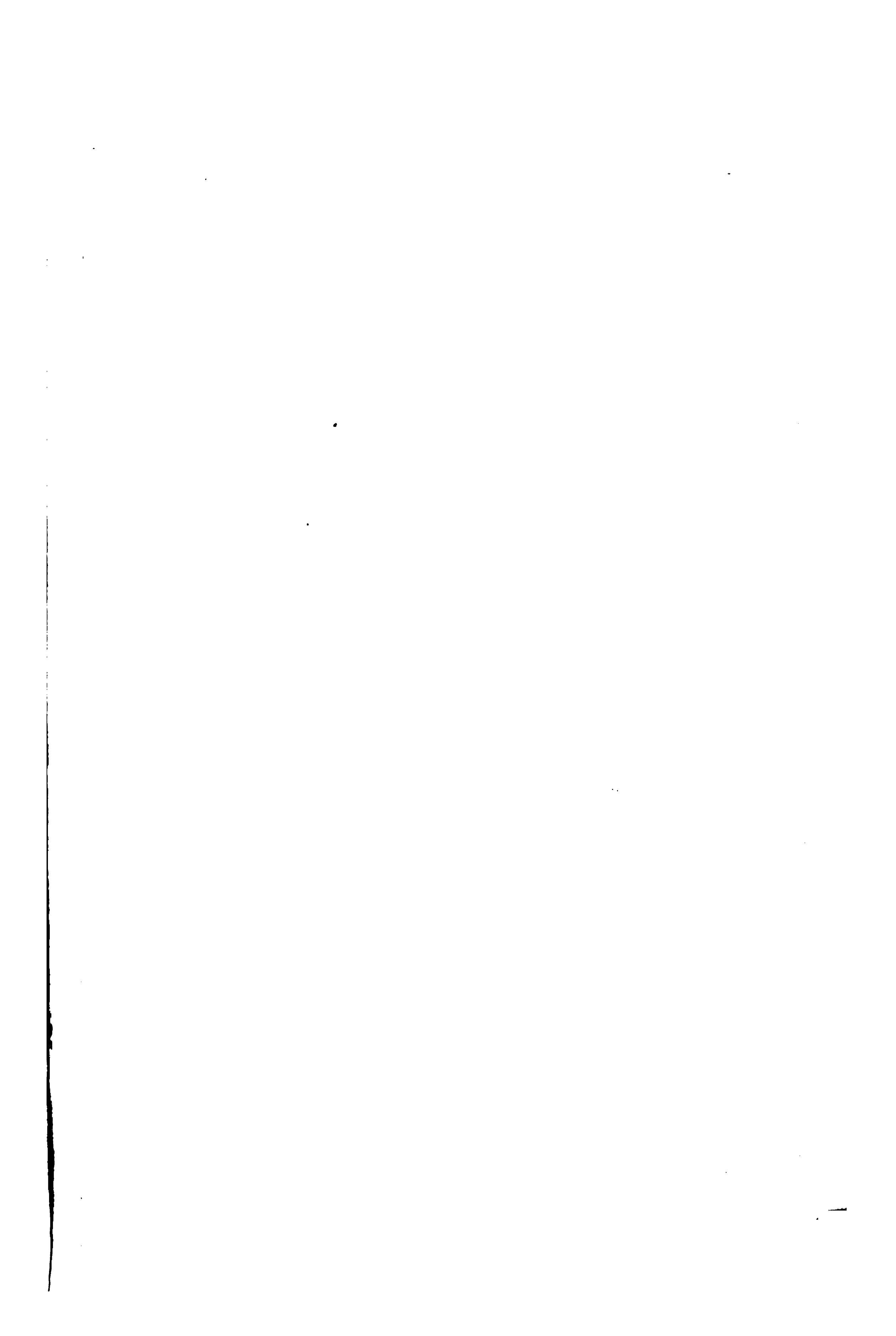
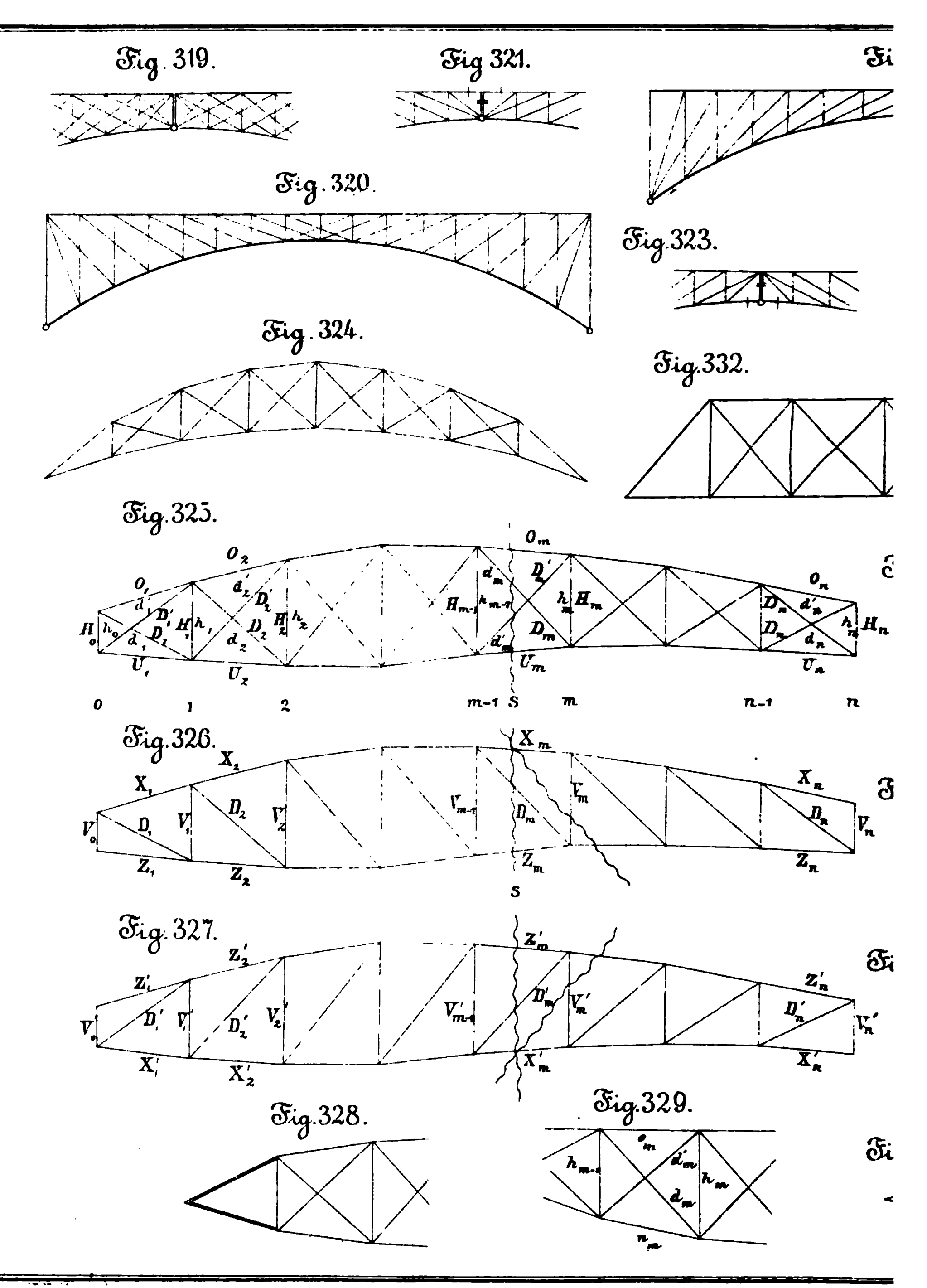
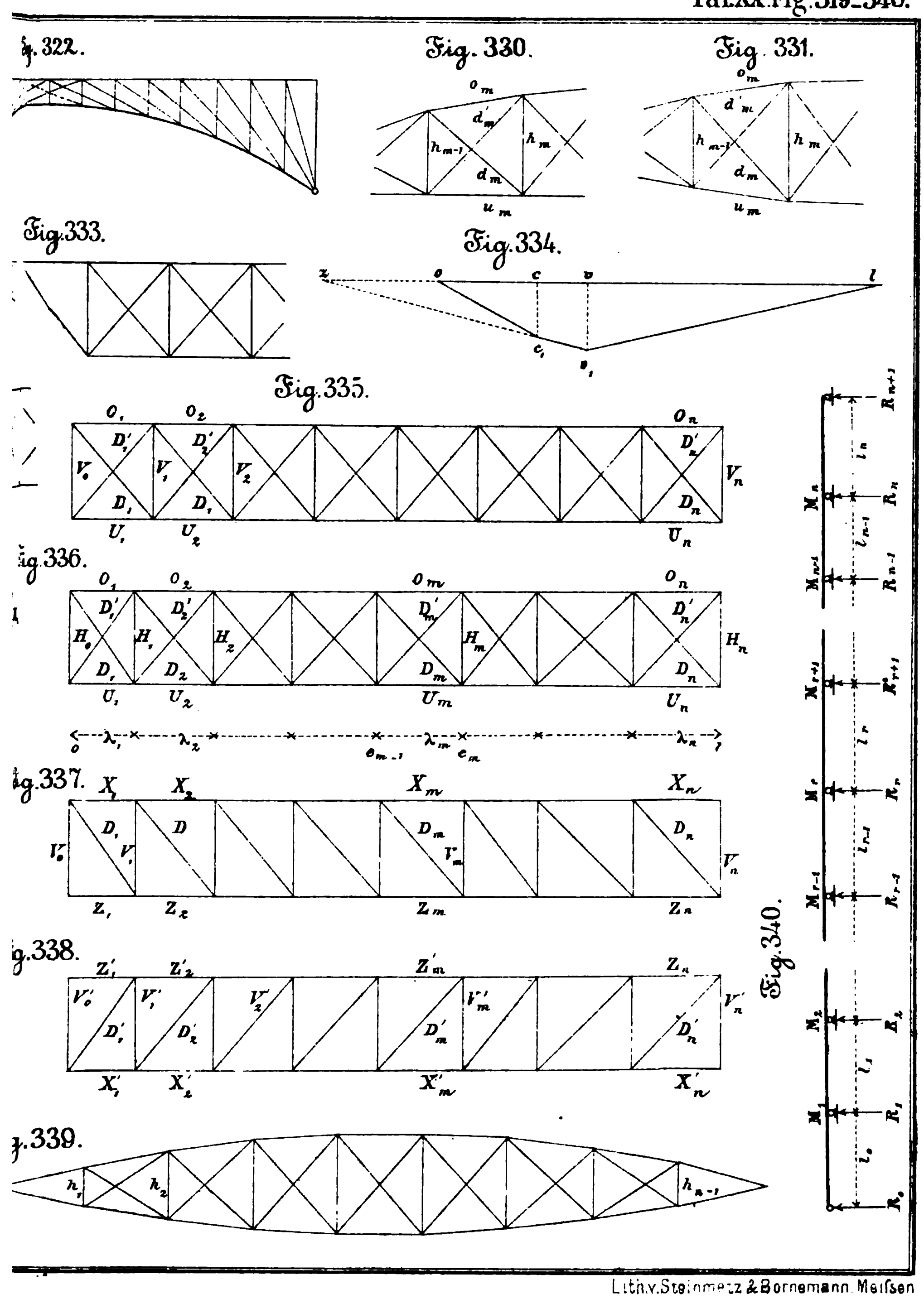


Fig. 302.
Fig. 303.
Fig. 304.
Fig. 307.
Fig. 306.
Fig. 308.
Fig. 310.
Fig. 311.
Fig. 313.
Fig. 312.
Fig. 314.
Fig. 316.
Fig 317.
Fig. 318.





Weyrauch, Theorie.



Lith. v. Steinmetz & Bornemann, Meissen